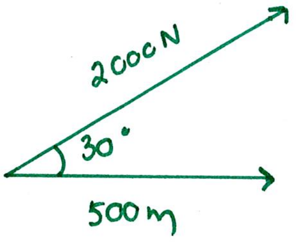
#2 Un cheval tire une barge le long d'une rivière sur une distance de 500 m. Le cheval doit appliquer une force de 2 000 N. Le vecteur force et le vecteur déplacement forme un angle de 30°.



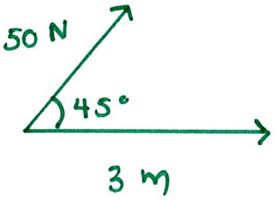
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cos \alpha$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 500 \cdot 2000 \cos 30$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 866\ 025,40 \text{ Nm}$$

Donc 866 025, 40 joules

#3 Jérôme tire sur un bloc sur une distance de 3 m avec une force de 50 Newtons formant un angle de 45° avec l'horizontale. Quel est le travail accompli par Jérôme ?



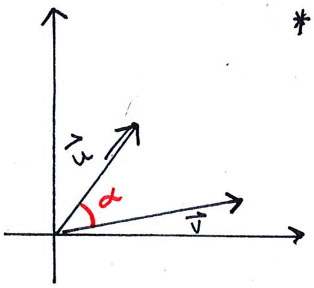
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cos \alpha$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 50 \cos 45$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 106,07 \text{ Nm}$$

Donc 106, 07 Joules

#4 Soit $\vec{u}\,(2,3)$ et $\vec{v}=(5,1)$. Trouve l'angle entre ces deux vecteurs qui sont de même origine.



* Comme on a pas d'angle passons par le produit scalaire!

1) Trouve $\vec{u}\cdot\vec{v}$ avec les composantes

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\cdot 5 + 3\cdot 1$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 13$

2) Trouve

$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{26}$

3) Trouve α :

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\alpha$

$13 = \sqrt{13}\cdot\sqrt{26}\,\cos\alpha$

$m\angle\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{13}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}}\right)$

$m\angle\alpha = 45°$

#5 Sachant que $\vec{a}\,(-2,4)$ et $\vec{b}=(4,3)$. Détermine l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si (2 vecteurs de même origine)

$$\vec{u} = 3\vec{a} + 5\vec{b} \;\; et \;\; \vec{v} = 2\vec{a} + \vec{b}$$

1) Trouve composantes

$\vec{u} = 3(-2,4) + 5(4,3)$ $\qquad$ $\vec{v} = 2(-2,4) + (4,3)$

$\vec{u} = (14, 27)$ $\qquad$ $\vec{v} = (0, 11)$

2) Trouve normes :

$\|\vec{u}\| = \sqrt{14^2+27^2}$ $\qquad$ $\|\vec{v}\| = \sqrt{0^2+11^2}$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{925}$ $\qquad$ $\|\vec{v}\| = 11$

3) Trouve $\vec{u}\cdot\vec{v}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 14\cdot 0 + 27\cdot 11$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 297$

4) Trouve α :

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cos\alpha$

$297 = \sqrt{925}\cdot 11\,\cos\alpha$

$m\angle\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{297}{11\sqrt{925}}\right)$

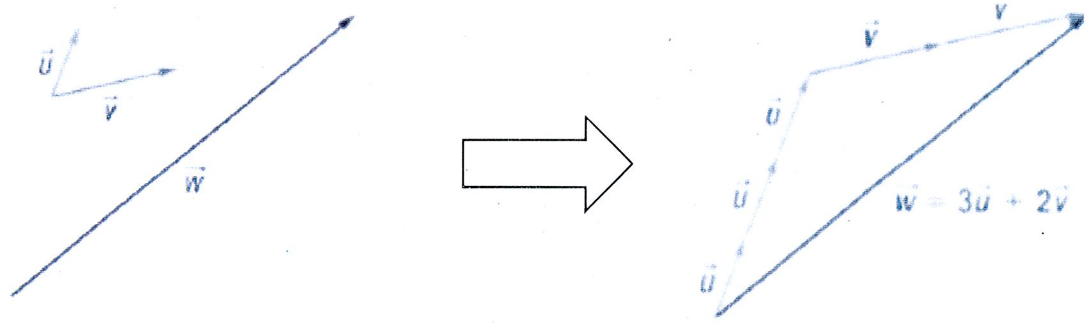
$m\angle\alpha = 27.41°$

Combinaison linéaires

Dans un plan, un vecteur est décomposable en une somme de deux autres vecteurs qui eux-mêmes, peuvent être exprimés sous la forme d'un produit d'un vecteur par un scalaire. Ainsi, le vecteur *w* peut s'exprimer comme une **combinaison linéaire** des vecteurs *u* et *v* de la façon suivante :

$$\boxed{\vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}}$$

Ex. : En mettant bout à bout un certain nombre de chacun des vecteurs *u* et *v*, il est possible d'obtenir le vecteur *w* sous la forme d'une combinaison linéaire de $\vec{u}$ *et de* $\vec{v}$.



On peut déterminer la valeur des coefficients k_1 et k_2 en résolvant des systèmes d'équation à l'aide d'une des méthodes déjà apprises : méthode de comparaison, méthode de substitution et méthode de réduction !

Ex. :1) Sachant que $\vec{u} = (2,5)$ *et* $\vec{v} = (3,4)$, exprime le vecteur $\vec{w} = (16,26)$ sous la forme d'une combinaison linéaire de $\vec{u}$ *et de* $\vec{v}$

1) Trouve ton système d'équations:

$k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{w}$

$k_1(2,5) + k_2(3,4) = (16,26)$

$2k_1 + 3k_2 = 16$

$5k_1 + 4k_2 = 26$

2) Choisis ta méthode de résolution!

Disons substitution : isole k_1 dans ①

$k_1 = \frac{16}{2} - \frac{3k_2}{2}$

3) Trouve k_2 :

$5(\underset{-40}{8} - \frac{3}{2}k_2) + 4k_2 = 26$

$40 - \frac{15}{2}k_2 + \frac{8}{2}k_2 = 26 - 40$

$-\frac{7}{2}k_2 = -14$ $\quad k_2 = 4$

4) Trouve k_1

$k_1 = 8 - \frac{3\cdot 4}{2} = 2$

Rép: $\vec{w} = 2\vec{u} + 4\vec{v}$

2) Sachant que $\vec{u} = (2,1)$ *et* $\vec{v} = (1,-3)$, exprime le vecteur $\vec{w} = (4,9)$ sous la forme d'une combinaison linéaire de $\vec{u}$ *et de* $\vec{v}$

1) Trouve le système d'équation :

$k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{w}$

$k_1(2,1) + k_2(1,-3) = (4,9)$

$2k_1 + k_2 = 4$

$k_1 - 3k_2 = 9$

2) Résolution par réduction !

Multiplions ② $\times 2 \Rightarrow 2k_1 - 6k_2 = 18$

alors

$$\begin{array}{r} 2k_1 + k_2 = 4 \\ -\ (2k_1 - 6k_2 = 18) \\ \hline 7k_2 = -14 \end{array}$$

Donc

$k_2 = -2$

Trouve k_1 :

$k_1 = 3 \cdot -2 + 9$

$k_1 = 3$

Rép :

$3\vec{u} - 2\vec{v} = \vec{w}$

Exercices

#1 Exprime chacun des vecteurs ci-dessous sous la forme d'une combinaison linéaire de $\vec{u} = (4,-1)$ *et* $\vec{v} = (6,\ 3)$.

a) $\vec{q} = (-12,-15)$

1) $k_1(4,-1) + k_2(6,3) = (-12,-15)$

$4k_1 + 6k_2 = -12$

$(-k_1 + 3k_2 = -15) \times -4$

2) Résolution :

$$\begin{array}{r} 4k_1 + 6k_2 = -12 \\ -\ (4k_1 - 12k_2 = 60) \\ \hline 18k_2 = -72 \end{array}$$

$k_2 = -4$

Trouve k_1 :

$k_1 = 3 \cdot -4 + 15$

$k_1 = 3$

Rép :

$3\vec{u} - 4\vec{v} = \vec{q}$

b) $\vec{s} = (-2,5)$

1) $4k_1 + 6k_2 = -2$

$(-k_1 + 3k_2 = 5) \times -4$

2) Résolution

$$\begin{array}{r} 4k_1 + 6k_2 = -2 \\ -\ (4k_1 - 12k_2 = -20) \\ \hline 18k_2 = 18 \end{array}$$

$k_2 = 1$

Trouve k_1 :

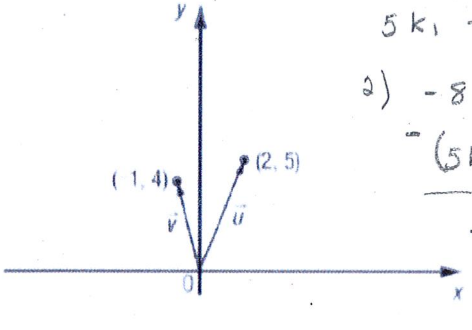
$k_1 = 3 \cdot 1 + 15$

$k_1 = 18$

Rép : $18\vec{u} + \vec{v} = \vec{s}$

#2 Les composantes du vecteurs AB sont (-8, 6). Dans chaque cas, exprimez le vecteur AB sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs u et v représentés ci-dessous.

a)



1) $k_1(2,5) + k_2(-1,4) = (-8,6)$

$(2k_1 - k_2 = -8) \times -4$

$5k_1 + 4k_2 = 6$

2) $-8k_1 + 4k_2 = 32$

$-(5k_1 + 4k_2 = 6)$

$-13k_1 = 26$

$k_1 = -2$

3) Trouve k_2

$k_2 = 2 \cdot -2 + 8$

$k_2 = 4$

Rép

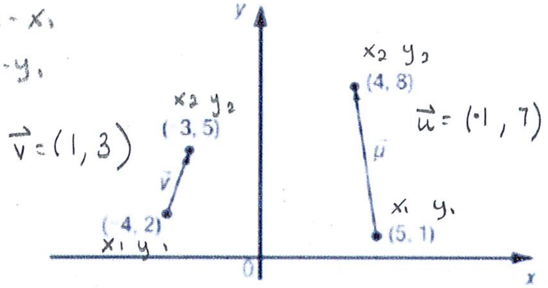
$-2\vec{u} + 4\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

b)

composantes

$a = \Delta x = x_2 - x_1$

$b = \Delta y = y_2 - y_1$



1) $k_1(-1,7) + k_2(1,3) = (-8,6)$

$(-k_1 + k_2 = -8) \times 3$

$7k_1 + 3k_2 = 6$

2) $-3k_1 + 3k_2 = -24$

$-(7k_1 + 3k_2 = 6)$

$-10k_1 = -30$

$k_1 = 3$

3) Trouve k_2

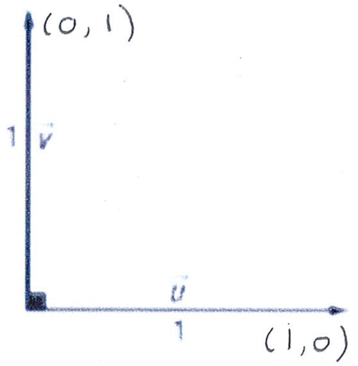
$k_2 = 3 - 8$

$k_2 = -5$

Rép :

$3\vec{u} - 5\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

c)



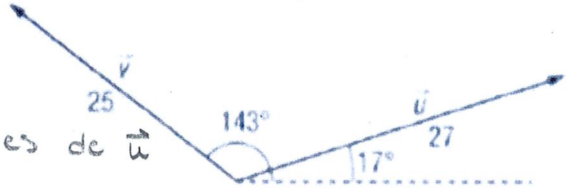
1) $k_1(1,0) + k_2(0,1) = (-8,6)$

$k_1 = -8$

$k_2 = 6$

Donc $-8\vec{u} + 6\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

d)



1) Trouve les composantes de $\vec{u}$

a: $\cos 17 = \frac{a}{27}$ b: $\sin 17 = \frac{b}{27}$

$a = 27\cos 17$ $b = 27 \cdot \sin 17$

$a = 25,82$ $b = 7,89$

2) Trouve les composantes de $\vec{v}$:

a: $a = 25\cos 143$ $b = 25\sin 143$

$a = -19,97$ $b = 15,05$

3) $k_1(25,82, 7.89) + k_2(-19.97, 15,05) = (-8,6)$

$25,82k_1 - 19,97k_2 = -8$

$7,89k_1 + 15,05k_2 = 6$

4) Par substitution

$k_1 = \frac{-15,05k_2}{7,89} + \frac{6}{7,89}$

trouve k_2:

$25,82\left(\frac{-15,05k_2}{7,89} + \frac{6}{7,89}\right) - 19,97k_2 = -8$

$-69,22k_2 = -27,63$

$k_2 = 0,4$

$k_1 = \frac{-15,05 \cdot 0,4}{7,89} + \frac{6}{7,89}$

$k_1 \approx 0$

Donc $0,4\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

#3 Trouve la mesure de l'angle entre les vecteurs qui correspondent aux combinaisons linéaires suivantes :

$$\vec{v} = 2(2,-1) + 3(-1,2) \;\; et \;\; \vec{s} = -1(3,2) + 2(-3,1)$$

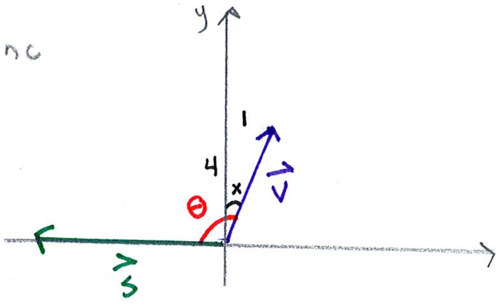
1) Trouve $\vec{v}$:

$\vec{v} = (1, 4)$

2) Trouve $\vec{s}$:

$\vec{s} = (-9, 0)$

Donc



3) Trouve $m\angle x$:

$m\angle x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

$= 14,04°$

4) $\theta = 90 + 14,04$

$= 104,04°$

Propriétés des opérations sur les vecteurs

1- Propriétés de l'addition vectorielle

- L'addition de 2 vecteurs est un vecteur
- L'addition est associative : $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- L'addition est commutative : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- L'addition de vecteur possède un élément neutre : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
- Chaque vecteur a son opposé : $\vec{u} = -\vec{u}$ ou $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

2- Propriétés de la multiplication d'un vecteur par un scalaire

- Le produit d'un vecteur par un scalaire est un vecteur
- La multiplication est associative : $k_1 (k_2 \vec{u}) = (k_1 \cdot k_2) \vec{u}$
- Existence d'un scalaire neutre : $1 \vec{u} = \vec{u}$
- Distributivité sur l'addition de vecteurs : $k (\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- Distributivité sur l'addition de scalaire : $\vec{u} (k_1 + k_2) = k_1 \vec{u} + k_2 \vec{u}$

3- Propriétés de la multiplication scalaire de deux vecteurs

- La multiplication scalaire de deux vecteurs est un scalaire
- Commutativité : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Associativité des scalaires : $k_1 \vec{u} \cdot k_2 \vec{v} = (k_1 \cdot k_2)(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- Distributivité sur une somme vectorielle : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$

Ces propriétés nous permettront de simplifier des opérations sur les vecteurs et de démontrer certains théorèmes ou énoncés mathématiques.

Exercices

#1 Simplifie l'expression et justifie les étapes

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD} =$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD}$	Chasles
$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$	Commutativité
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$	Chasles
$\overrightarrow{AE}$	Chasles

b) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP} =$

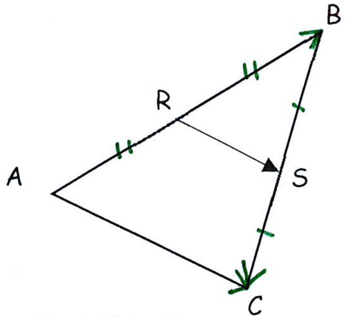
$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{NP}$	Vecteur opposé
$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}$	Commutativité
$\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NP}$	Loi de Chasles
$\overrightarrow{PP}$	Chasles
$\vec{0}$	Vecteur nul

c) $2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DB} =$

$2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}$	Vecteurs opposés
$4\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BD}$	addition
$4(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD})$	SME
$4\overrightarrow{AD}$	Chasles

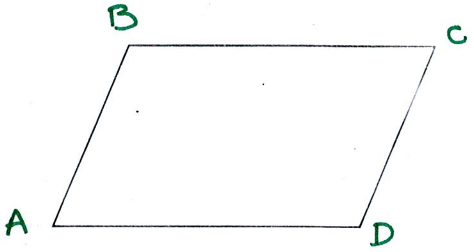
#2 Théorème des points milieux des côtés d'un triangle : Le segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et mesure la moitié de sa longueur

Démontre que : $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{2} = \overrightarrow{RS}$



Affirmation	Justification
$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{RS}$	
$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SC}) = \overrightarrow{RS}$	loi de Chasles
$\frac{1}{2}(\overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{BS}) = \overrightarrow{RS}$	Par hypothèse $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{RB}$
	et $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{BS}$
$\frac{1}{2}(\overrightarrow{RB} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{RS}) = \overrightarrow{RS}$	Commutativité
$\frac{1}{2}(\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RS}) = \overrightarrow{RS}$	loi de Chasles
$\frac{1}{2}(2\overrightarrow{RS}) = \overrightarrow{RS}$	addition
$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RS}$	
cqfd !!	

#3 Si ABCD est un quadrilatère et que deux côtés opposés sont congrus et parallèles, alors ABCD est un parallélogramme.



Hypothèse : $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

Conclusion : $\left.\begin{array}{l} \overline{BC} \cong \overline{AD} \\ \overline{BC} \parallel \overline{AD} \end{array}\right\} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

Preuve :

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ Par hypothèse
2. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ Chasles
3. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ Chasles
4. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ Par transitivité
5. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ Soustraction de quantité égale

* Des vecteurs équipollents ont la même longueur, le même sens et la même direction

Donc ABCD est un parallélogramme car il possède 2 paires de côtés parallèles et isométriques.