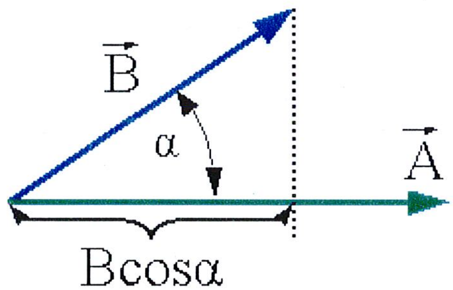
Les vecteurs



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha$$

ATHÉMATIQUE SN5

Nom : ______________________ Groupe : _________

Vecteur vs Scalaire :

Une quantité est dite scalaire si elle est définie par un simple **nombre**. Elle est dite **vectorielle** si elle est associée à une grandeur, une direction et un sens (flèche).

Vecteur AB :

Ex. Indiquez si les grandeurs suivantes sont scalaires ou vectorielles :
a) La vitesse et la direction d'une balle de golf : vectorielle
b) La durée des saisons : scalaire
c) Le périmètre d'un quadrilatère : scalaire
d) Le déplacement d'un coureur de cross-country : vectorielle

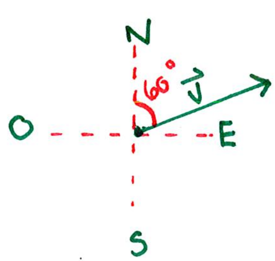
Notation vectorielle :

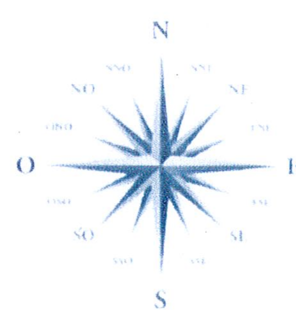
- Deux points A et B pris dans cet ordre, représentent un vecteur. Ce vecteur est noté $\overrightarrow{AB}$.
  Ou bien si A (a, b) et B (c, d) alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(a,b)(c,d)}$

- Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est représenté par une flèche allant du point d'origine A (queue) au point d'extrémité B (tête).

Représentation géométrique :

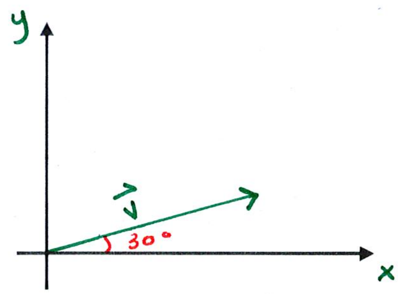
Pour décrire la direction et le sens des vecteurs, on peut utiliser les mots gauche, droite, etc. mais également faire référence à la rose des vents.
Ex. Représente le vecteur suivant : Le vecteur $\vec{v}$ a une norme (une longueur) de 5 unités et est orienté N 60° E.





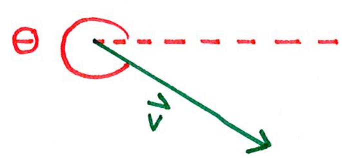
En mathématiques, on préfère indiquer la direction en faisant référence à l'axe horizontal du plan cartésien !

Ex. Représente le vecteur suivant : Le vecteur $\vec{v}$ mesure 5 unités et son orientation est de 30° par rapport à l'axe des x.



Note :
L'orientation est toujours mesurée dans le sens antihoraire (donc toujours positif). Il est l'angle formé par le vecteur et l'horizon. Souvent noté : θ

Ex. :

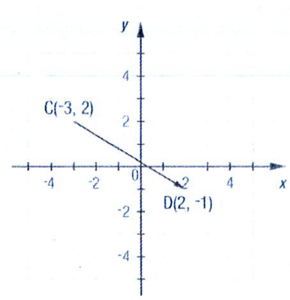


Composantes d'un vecteur

Dans un plan cartésien, un vecteur peut être représenté par une flèche d'origine (x_1 , y_1) et d'extrémité (x_2, y_2). Ce vecteur peut être décrit par un couple de nombres (a, b) où :

- a est la **composante horizontale** du vecteur et $\Delta x = x_2 - x_1$
- b est la **composante verticale** du vecteur et $\Delta y = y_2 - y_1$

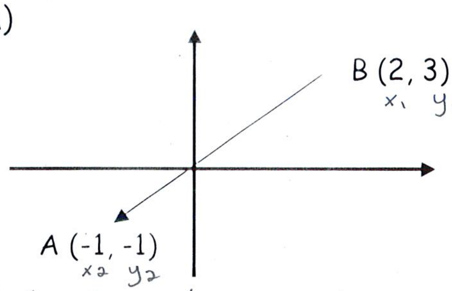
Ex. :



- Composante horizontale : 2 − -3 = 5
- Composante verticale : -1 − 2 = -3
- $\overrightarrow{CD}$ = (5, -3)

Ex. Détermine les composantes du vecteur représenté :

a)



$\Delta x = x_2 - x_1$

$\Delta x = -1 - 2$

$\Delta x = -3$

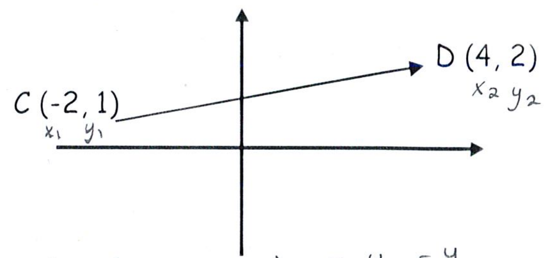
$\Delta y = y_2 - y_1$

$\Delta y = -1 - 3$

$\Delta y = -4$

Donc $\overrightarrow{AB} = (-3, -4)$

b)



$\Delta x = x_2 - x_1$

$\Delta x = 4 - -2$

$\Delta x = 6$

$\Delta y = y_2 - y_1$

$\Delta y = 2 - 1$

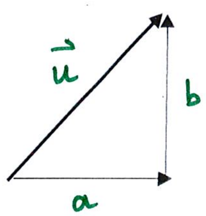
$\Delta y = 1$

Donc $\overrightarrow{CD} = (6, 1)$

Norme d'un vecteur :

La norme d'un vecteur est sa longueur

Soit $\vec{u} = (a, b)$ (les composantes) alors utilisons Pythagore !



Symbole : $\|\vec{u}\|$

Norme :

$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Ex. Soit une vecteur $\overrightarrow{AB}$ et les coordonnées des extrémités A (5, 3) et B (6, -9), trouve la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

(A : x_1 y_1 ; B : x_2 y_2)

1) Trouve les composantes :

$\Delta x = x_2 - x_1$

$\Delta x = 6 - 5$

$\Delta x = 1$

$\Delta y = y_2 - y_1$

$\Delta y = -9 - 3$

$\Delta y = -12$

Donc $\overrightarrow{AB} = (1, -12)$

2) $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + (-12)^2}$

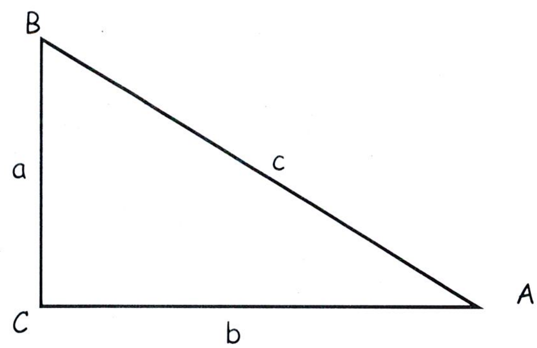
$= \sqrt{145}$

où utilise directement

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Note : Qu'un vecteur soit représenté ou non dans un plan cartésien, il est possible de déduire la norme et l'orientation de ce vecteur à partir de ses composantes, et vice versa. **Pour ce faire, certaines notions de trigonométries seront nécessaires.**

Rappel : La trigonométrie est l'étude des relations entre les angles et les côtés d'un triangle. Un **rapport trigonométrique** est un nombre qui exprime un rapport de mesures des longueurs. Dans un triangle rectangle, les trois principaux rapports trigonométriques sont :



$$\sin A = \frac{mesure\ de\ la\ cathète\ opposé\ à\ l'angle\ A}{mesure\ de\ l'hypoténuse}$$

$$\cos A = \frac{mesure\ de\ la\ cathète\ adjacente\ à\ l'angle\ A}{mesure\ de\ l'hypoténuse}$$

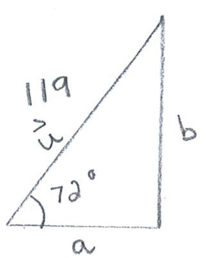
$$\tan A = \frac{mesure\ de\ la\ cathète\ opposé\ à\ l'angle\ A}{mesure\ de\ la\ cathète\ adjacente\ à\ l'angle\ A}$$

* Calculatrice en degré!

Exercices

#1 Dans chaque cas, détermine les composantes du vecteur décrit :

a) $\|\vec{u}\| = 119\ et\ orientation\ de\ \vec{u} = 72^o$



a : $\cos 72° = \frac{a}{119}$

$a = 119 \cdot \cos 72$

$a = 39{,}77$

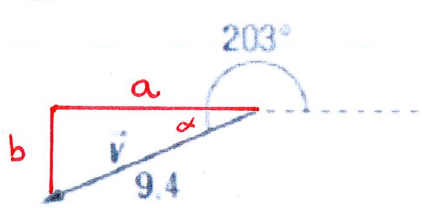
b : $\sin 72° = \frac{b}{119}$

$b = 119 \cdot \sin 72$

$b = 113{,}18$

Donc $\vec{u} = (39{,}77,\ 113{,}18)$

b)



$\alpha = 203 - 180$

$\alpha = 23°$

a : $\cos 23° = \frac{a}{9{,}4}$

$a = 9{,}4 \cos 23$

$a = -8{,}65$

b : $\sin 23° = \frac{b}{9{,}4}$

$b = 9{,}4 \cdot \sin 23°$

$b = -3{,}67$

Donc $\vec{v} = (-8{,}65,\ -3{,}67)$

ou directement

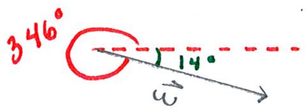
$a = 9{,}4 \cos 203$

$a = -8{,}65$

$b = 9{,}4 \sin 203$

$b = -3{,}67$

c) $\|\vec{w}\| = 67$ *et orientation de* $\vec{w} = 346^o$



$a : \cos 346 = \dfrac{a}{67}$

$a = 67 \cdot \cos 346°$

$a = 65{,}01$

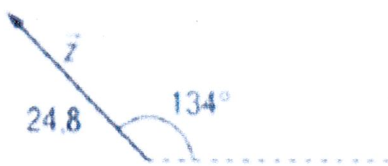
$b : \sin 346 = \dfrac{b}{67}$

$b = 67 \cdot \sin 346°$

$b = -16{,}21$

Donc $\vec{w} = (65{,}01 , -16{,}21)$

d)



$a : \cos 134° = \dfrac{a}{24{,}8}$

$a = 24{,}8 \cdot \cos 134°$

$a = -17{,}23$

$b : \sin 134° = \dfrac{b}{24{,}8}$

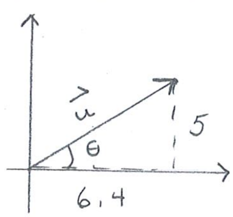
$b = 24{,}8 \cdot \sin 134°$

$b = 17{,}84$

Donc $\vec{z} = (-17{,}23 , 17{,}84)$

#2 Détermine l'orientation de chacun des vecteurs suivants.

a) $\vec{u} = (6{,}4 , 5)$

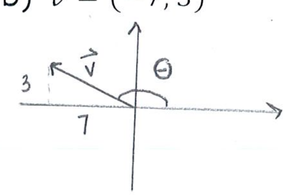


$\theta : \tan \theta = \dfrac{5}{6{,}4}$

$m\angle\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{5}{6{,}4}\right)$

$m\angle\theta = 38°$

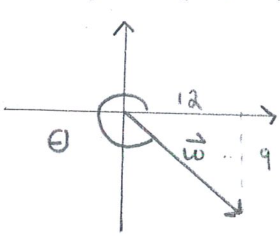
b) $\vec{v} = (-7, 3)$



$\theta = 180 - \tan^{-1}\left(\dfrac{3}{7}\right)$

$\theta = 156{,}8°$

c) $\vec{w} = (12, -9)$



$\theta = 360 - \tan^{-1}\left(\dfrac{9}{12}\right)$

$\theta = 323{,}13°$

#3 Représentez les vecteurs suivants dans le plan cartésien.

a) $\|\vec{u}\| = 6$; orientation de $\vec{u}$: 270°.

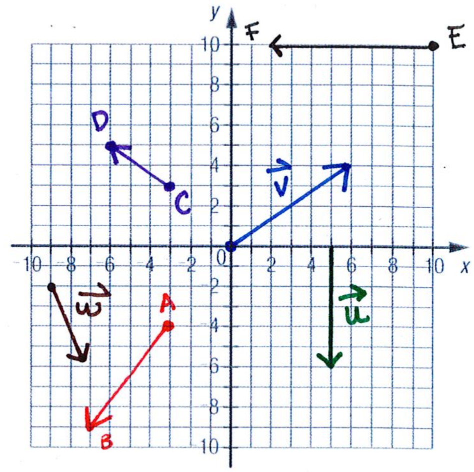
b) $\overrightarrow{AB} = (^-4,\ ^-5)$

c) $\|\vec{v}\| = 7$; orientation de $\vec{v}$: 35°.

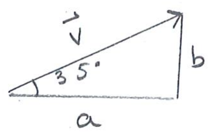
d) $\overrightarrow{CD} = (^-3,\ 2)$

e) $\|\vec{w}\| = 4$; orientation de $\vec{w}$: 290°.

f) $\overrightarrow{EF} = (^-8,\ 0)$



c) Trouve les composantes de $\vec{v}$



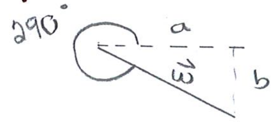
$a = 7\cos 35°$

$a = 5{,}73$

$b = 7\sin 35°$

$b = 4{,}01$

e) Trouve les composantes de $\vec{w}$



$a = 4\cos 290°$

$a = 1{,}37$

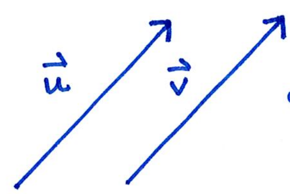
$b = 4\sin 290$

$b = -3{,}76$

Types de vecteurs

1) Vecteurs équipollents :

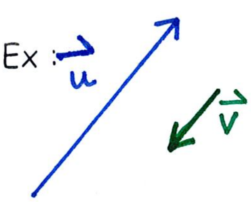
- Même sens
- Même norme (longueur)
- Même direction

Ex : 

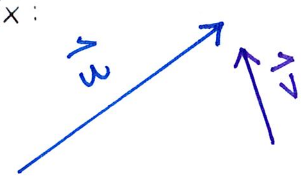
alors $\vec{u} = \vec{v}$

2) Vecteurs colinéaires ou linéairement dépendants :

- Même direction (donc parallèles)
- Pas nécessairement le même sens
- Pas nécessairement la même longueur

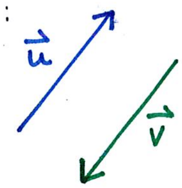
Ex : 

3) Vecteurs linéairement indépendants : Vecteurs n'ayant pas la même direction. Ex :



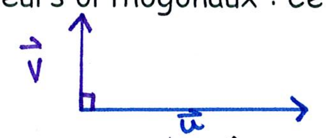
4) Vecteurs opposés :

- Même direction
- Même norme
- Sens contraire

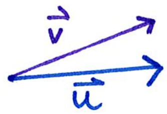
Ex : 

alors $\vec{u} = -\vec{v}$

5) Vecteurs orthogonaux : Ce sont des vecteurs perpendiculaires

Ex : 

6) Vecteurs ayant la même origine : ils ont la même origine !

Ex : 

7) Vecteur nul : noté : $\vec{O}$

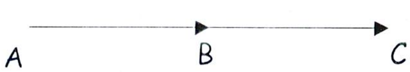
- Norme = 0
- Aucun sens
- Aucune direction

attention ce n'est pas la même chose que O.

8) Vecteur unitaire : vecteur dont la norme = 1

Exercice : Compare les deux vecteurs représentés et attribue-leur tous les qualificatifs qui conviennent.

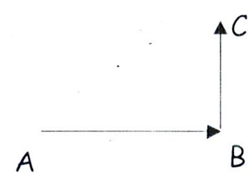
a) $\overline{AB} \cong \overline{BC}$



-> vecteurs équipollents

-> vecteurs colinéaires

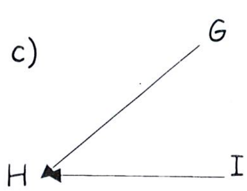
b)



-> vecteurs orthogonaux

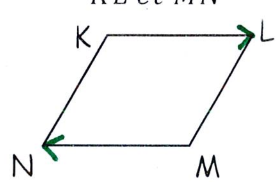
-> vecteurs linéairement indépendants

c)



-> vecteurs linéairement indépendants

d) Sachant que KLMN est un parallélogramme. Qualifie les $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{MN}$

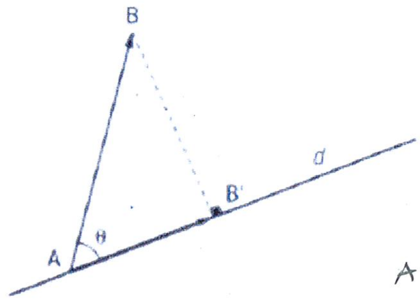


-> vecteurs opposés

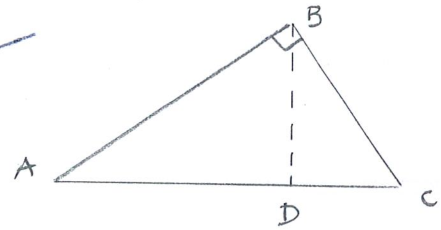
-> vecteurs colinéaires.

Projection d'un vecteur

La projection d'un vecteur AB sur une droite *d* passant par A est le vecteur AB', où B' est le projeté orthogonal de B sur la droite *d*. On dit que $\overline{AB'}$ correspondant à la projection orthogonale de $\overline{AB}$ sur la droite *d*.



Pensez aux relations métriques dans le Δ rectangle!



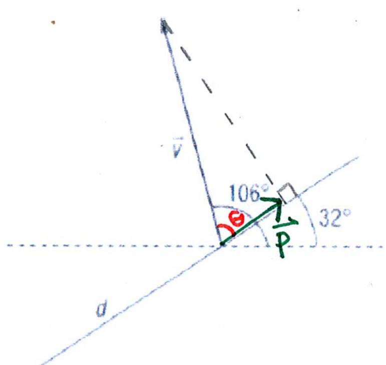
$\overline{AD}$ est la projection de $\overline{AB}$

Exercice :

#1 Dans chaque cas, représente la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur la droite *d* et calcule la norme de la projection.

a) $\|\vec{v}\| = 21$

1)



$m\angle\theta = 106° - 32°$

$m\angle\theta = 74°$

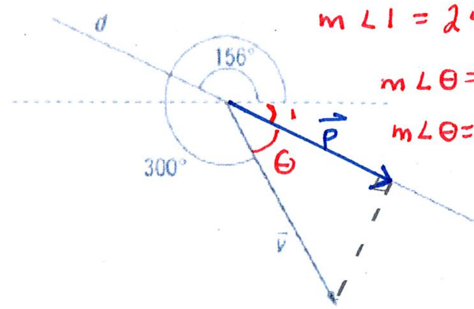
$\|\vec{p}\|$: $\cos 74° = \dfrac{\|\vec{p}\|}{21}$

$\|\vec{p}\| = 21 \cdot \cos 74°$

$\|\vec{p}\| = 5,79$

b) $\|\vec{v}\| = 83$

1)



$m\angle 1 = 180 - 156°$

$m\angle 1 = 24°$

$m\angle\theta = 360 - 300 - 24$

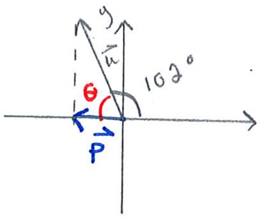
$m\angle\theta = 36°$

$\|\vec{p}\| = 83 \cos 36°$

$= 67.15$

#2 Dans chaque cas, déterminez la norme de la projection orthogonale sur l'axe des abscisses.

a) $\|\vec{u}\| = 8{,}1$ *et orientation de* $\vec{u}$: 102^o



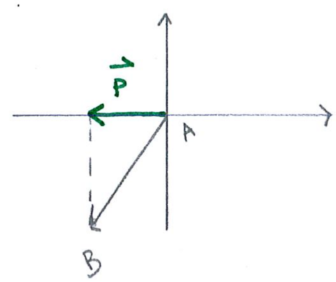
$m\angle\Theta = 180 - 102$

$= 78°$

$\|\vec{p}\| = 8{,}1 \cos 78°$

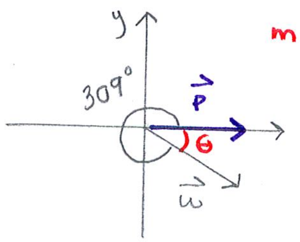
$\|\vec{p}\| = 1{,}68$

b) $\overrightarrow{AB} = (-4, -8)$



$\|\vec{p}\| = 4$

c) $\|\vec{w}\| = 13$ *et orientation de* $\vec{w}$: 309^o



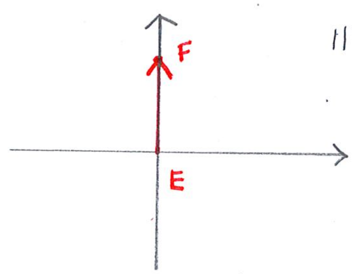
$m\angle\Theta = 360 - 309$

$= 51°$

$\|\vec{p}\| = 13 \cos 51°$

$\|\vec{p}\| = 8{,}18$

c) $\overrightarrow{EF} = (0, 9)$



$\|\vec{p}\| = 0$

Opérations sur les vecteurs

Addition et soustraction de vecteurs

Il est possible d'additionner et de soustraire des vecteurs entre eux. Il en résulte un nouveau vecteur (vecteur résultant). Soustraire un vecteur revient à additionner le vecteur opposé (ex. $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés). Voyons maintenant différentes méthodes.