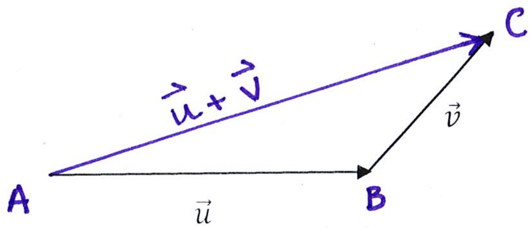
1- Méthode du triangle

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Pour faire la somme des deux vecteurs, il suffit de les placer bout à bout. La résultante est un autre vecteur qui part de l'origine du premier vecteur et rejoint l'extrémité du dernier.

Ex. :



Dans ce triangle, nommons maintenant chacun des sommets par une lettre tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ alors le vecteur résultant $\overrightarrow{u+v} =$ $\overrightarrow{AC}$

Il en résulte que $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$

Cette relation est la **relation de Chasles.** Elle nous permet de décomposer un vecteur résultant en plusieurs vecteurs qui donneront comme somme le vecteur résultant.

Exercices :

$-\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NM}$

#1 a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN}$

$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MP}$

$\overrightarrow{MM} + 2\overrightarrow{MP}$

$\vec{O} + 2\overrightarrow{MP}$

$2\overrightarrow{MP}$

$-\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{ED}$

c) $-\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE}$

$\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EC}$

$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC}$

$\overrightarrow{EC}$

d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FA}$

$-\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FA}$

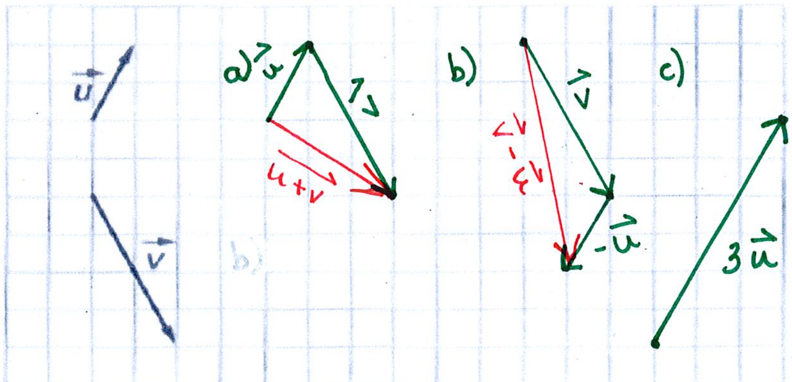
$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FA}$

$\overrightarrow{AA}$

$\vec{O}$

#2 Dispose les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donnés pour représenter les vecteurs suivants.

a) $\vec{u}+\vec{v}$ b) $\vec{v}-\vec{u}$ c) $3\vec{u}$



2-Méthode algébrique

Pour $\vec{u}=(a,b)$ et $\vec{v}=(c,d)$, les relations suivantes permettent de calculer les composantes du vecteur résultant de la somme ou de la différence de ces deux vecteurs.

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{u}+\vec{v}=(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d)\\ \vec{u}-\vec{v}=(a,b)-(c,d)=(a-c,\ b-d)\end{array}}$$

Exercices :

#1 Sachant que $\vec{u}=(-3,1)$, $\vec{v}=(-5,-2)$, $\vec{w}=(3,6)$ et $\vec{z}=(4,-5)$ détermine les composantes du vecteur r.

a) $\vec{r}=\vec{w}+\vec{z}$

$\vec{r}=(3,6)+(4,-5)$

$\vec{r}=(3+4,\ 6-5)$

$\vec{r}=(7,\ 1)$

b) $\vec{r}=3\vec{u}+4\vec{v}$

$\vec{r}=3(-3,1)+4(-5,-2)$

$\vec{r}=(-9,3)+(-20,-8)$

$\vec{r}=(-9-20,\ 3-8)$

$\vec{r}=(-29,\ -5)$

c) $\vec{r} = 0{,}4\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w} + 3\vec{z}$

$\vec{r} = 0{,}4(-3,1) + 2(-5,-2) - (3,6) + 3(4,-5)$

$\vec{r} = (-1{,}2, 0{,}4) + (-10,-4) + (-3,-6) + (12,-15)$

$\vec{r} = (-1{,}2 - 10 - 3 + 12,\ 0{,}4 - 4 - 6 - 15)$

$\vec{r} = (-2{,}2,\ -24{,}6)$

d) $\vec{r} = 4\vec{u} - 5\vec{w}$

$\vec{r} = 4(-3,1) - 5(3,6)$

$\vec{r} = (-12, 4) + (-15, -30)$

$\vec{r} = (-12 - 15,\ 4 - 30)$

$\vec{r} = (-27, -26)$

#2 Voici les caractéristiques de trois vecteurs :

$\|\vec{u}\| = 46$
Orientation de $\vec{u} = 82^o$

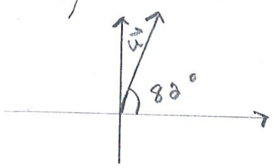
$\|\vec{v}\| = 77$
Orientation de $\vec{w} = 121^o$

$\|\vec{w}\| = 51$
Orientation de $\vec{w} = 263^o$

Dans chaque cas, détermine les composantes du vecteur résultant, sa norme et son orientation

a) $\vec{u} + \vec{v}$

1) Trouve les composantes de $\vec{u}$



a : $\cos 82 = \dfrac{a}{46}$

$a = 46 \cdot \cos 82$

$a = 6{,}4$

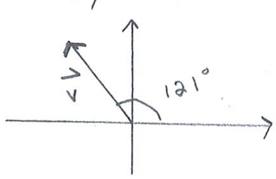
b : $\sin 82 = \dfrac{b}{46}$

$b = 46 \cdot \sin 82$

$b = 45{,}55$

Donc $\vec{u} = (6{,}4,\ 45{,}55)$

2) Trouve les composantes de $\vec{v}$:



$a = 77 \cos 121$

$a = -39{,}66$

$b = 77 \sin 121$

$b = 66$

Donc $\vec{v} = (-39{,}66,\ 66)$

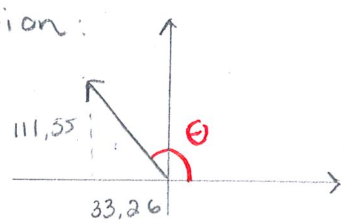
3) Trouve les composantes de $\vec{u} + \vec{v} = (6{,}4,\ 45{,}55) + (-39{,}66,\ 66)$

$\overrightarrow{u+v} = (-33{,}26,\ 111{,}55)$

4) $\|\overrightarrow{u+v}\| = \sqrt{(-33{,}26)^2 + (111{,}55)^2}$

$= 116{,}40$

5) Orientation :

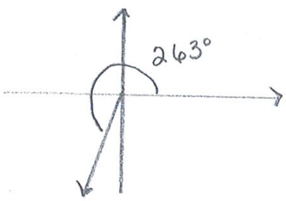


$m\angle\Theta = 180 - \tan^{-1}\left(\dfrac{111{,}55}{33{,}26}\right)$

$m\angle\Theta = 106{,}6^o$

b) $\vec{v} + 2\vec{w}$

1) Trouve les composantes de $\vec{w}$



$a = 51 \cos 263$

$a = -6,22$

$b = 51 \sin 263$

$b = -50,62$

2) Trouve les composantes $\vec{v} + 2\vec{w}$

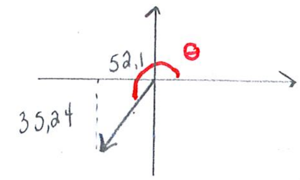
$\vec{v} + 2\vec{w} = (-39,66\ ,\ 66) + 2(-6,22\ ,\ -50,62)$

$= (-52,1\ ,\ -35,24)$

3) $\|\vec{v} + 2\vec{w}\| = \sqrt{(-52,1)^2 + (-35,24)^2}$

$= 62,9°$

4) Orientation :



$m\angle\theta = 180 + \tan^{-1}\left(\dfrac{35,24}{52,1}\right)$

$m\angle\theta = 214,07°$

c) $4\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{w}$

1) Composantes :

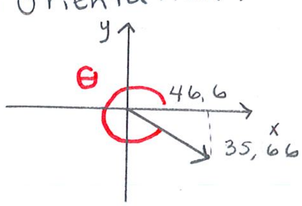
$4\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{w} = 4(6,4\ ,\ 45,55) - (-39,66\ ,\ 66) + 3(-6,22\ ,\ -50,62)$

$= (46,6\ ,\ -35,66)$

2) Norme : $\|4\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{w}\| = \sqrt{(46,6)^2 + (-35,66)^2}$

$= 30$

3) Orientation :



$m\angle\theta = 360 - \tan^{-1}\left(\dfrac{35,66}{46,6}\right)$

$m\angle\theta = 322,58°$

Remarques :

- $\|\vec{u} + v\| \neq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$
- En physique, la somme de deux vecteurs représentant deux forces est le vecteur résultant qui représente la force unique équivalente !

#3 Détermine les composantes du vecteur s : $\vec{s} = (a, b)$

a) $(2,9) + \vec{s} = (7,21)$

$(2,9) + (a, b) = (7, 21)$

$2 + a = 7$ $\quad 9 + b = 21$

$a = 5$ $\quad b = 12$

$\vec{s} = (5, 12)$

b) $(17,6) - \vec{s} = (25,-8)$

$(17, 6) - (a, b) = (25, -8)$

$17 - a = 25$ $\quad 6 - b = -8$

$-a = 8$ $\quad -b = -14$

$a = -8$ $\quad b = 14$

$\vec{s} = (-8, 14)$

c) $(3,11) + (-6,14) + 2\vec{s} = (5,21)$

$3 - 6 + 2a = 5$ $\quad 11 + 14 + 2b = 21$

$2a = 8$ $\quad 2b = -4$

$a = 4$ $\quad b = -2$

$\vec{s} = (4, -2)$

d) $(a,b) + (c,d) + \vec{s} = (e,f)$ $\quad \vec{s} = (x, y)$

$a + c + x = e$ $\quad b + d + y = f$

$x = e - (a+c)$ $\quad y = f - (b+d)$

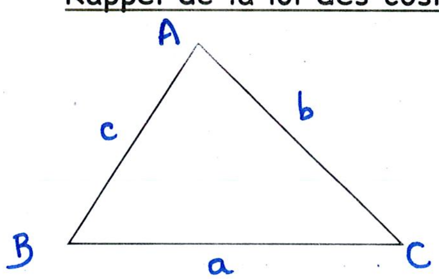
$\vec{s} = (e - (a+c), f - (b+d))$

3- Addition de vecteurs avec la norme

La norme de la somme de deux vecteurs peut être calculée à partir de la loi des cosinus si l'on connaît :

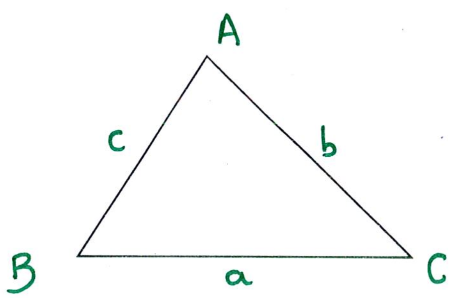
- La norme de chacun des deux vecteurs
- L'angle formé par les deux vecteurs consécutifs (mis bout à bout)

Rappel de la loi des cosinus :



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

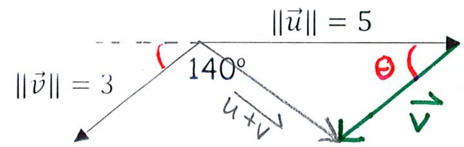
Rappel de la loi des sinus:



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Exercices

#1 Calcul $\|\overrightarrow{u+v}\|$:



$m\angle 1 = 180 - 140$ (angles adjacents supplémentaires)
$= 40°$

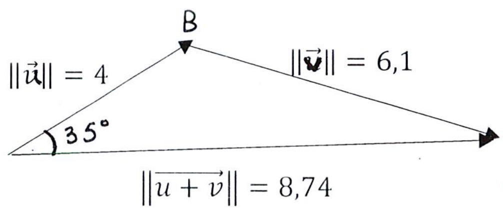
$m\angle 1 = m\angle\theta$ Car les angles correspondants formés par des // sont $\cong$

$$\|\overrightarrow{u+v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$\|\overrightarrow{u+v}\| = \sqrt{5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3\cos 40°}$$

$$= 3,32$$

#2 Détermine la mesure de l'angle B



$$\frac{\|\overrightarrow{u+v}\|}{\sin B} = \frac{\|\vec{v}\|}{\sin 35°}$$

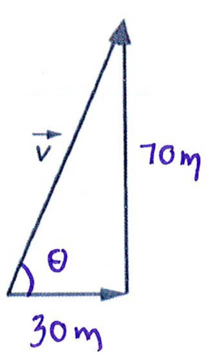
$$m\angle B = 180 - \sin^{-1}\left(\frac{\sin 35 \cdot 8,74}{6,1}\right)$$

* l'angle B est obtus !

$$m\angle B = 124,73°$$

Petits problèmes

#1 Léa se déplace de 30 m vers l'est puis de 70 m vers le nord. Son déplacement correspond donc au vecteur v représenté ci-contre. Décris ce vecteur en précisant sa norme et son orientation.



1) Norme

$\|\vec{v}\| = \sqrt{30^2 + 70^2}$

$\|\vec{v}\| = 76,16$ m

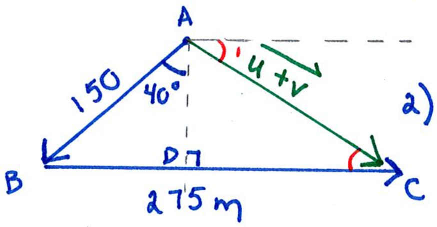
2) Orientation

$m\angle\theta = \tan^{-1}\left(\frac{70}{30}\right)$

$m\angle\theta = 66,8°$

Rép : Le vecteur $\vec{v}$ a donc une norme de 76.16 m et une orientation de 66,8°

#2 Gabriel effectue successivement les deux déplacements suivants : 150 m [S. 40° O.] et 275 m [E.]. Décris son déplacement (la grandeur et l'orientation du vecteur).



1) $m\angle B = 50°$ (la somme des angles int. d'un $\triangle$ vaut $180°$)

2) $\|\overrightarrow{u+v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$

$\|\overrightarrow{u+v}\| = \sqrt{150^2 + 275^2 - 2 \cdot 150 \cdot 275 \cos 50°}$

$\|\overrightarrow{u+v}\| = 212{,}36$

3) $m\angle 1 = m\angle C$ (les angles alternes-internes formés par des // sont $\cong$)

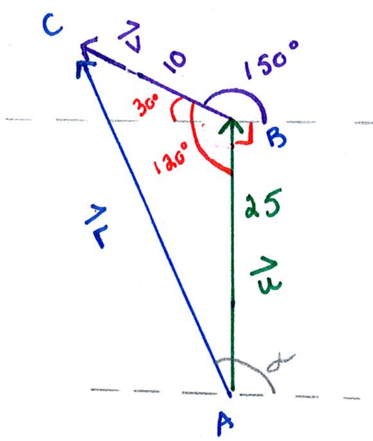
4) $\dfrac{150}{\sin C} = \dfrac{212{,}36}{\sin 50}$ $\quad m\angle C = \sin^{-1}\left(\dfrac{150 \cdot \sin 50}{212{,}36}\right)$

$m\angle C = 32{,}76$

5) orientation $= 360 - 32{,}76$
$= 327{,}24°$

Rép : Norme $= 212{,}36$ m
Orientation $= 327{,}24°$

#3 Un bateau se dirige vers le nord à la vitesse de 25 nœuds. Un courant de 10 nœuds et d'orientation 150° agit sur le bateau. Détermine la vitesse réelle du bateau et son orientation.



1) Norme

$\|\vec{r}\| = \sqrt{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta}$

$\|\vec{r}\| = \sqrt{25^2 + 10^2 - 2 \cdot 25 \cdot 10 \cdot \cos 120°}$

$\|\vec{r}\| = 31{,}22$

2) Orientation : α

$m\angle\alpha = 90 + m\angle A$

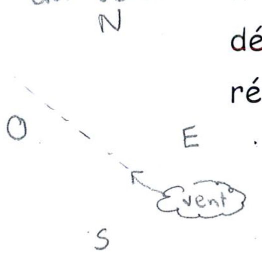
$\dfrac{10}{\sin A} = \dfrac{31{,}22}{\sin 120}$

$m\angle A = \sin^{-1}\left(\dfrac{10 \cdot \sin 120}{31{,}22}\right)$

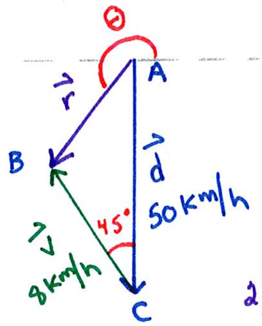
$m\angle A = 16{,}1$

Rép :
Vitesse : 31,22 Noeuds
orientation $= 106{,}1°$

provenance du vent !



#4 Un dirigeable se déplace vers le sud à une vitesse de 50 km/h. Il est dévié par un vent de 8 km/h provenant du sud-est. Quelle est la vitesse réelle du dirigeable et quelle est sa direction ?



1) Norme

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{\|\vec{d}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{d}\|\,\|\vec{v}\|\cos 45°}$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{50^2 + 8^2 - 2\cdot 50 \cdot 8 \cos 45°}$$

$$\|\vec{r}\| \approx 44{,}70 \text{ km/h}$$

2) Trouve $m\angle A$:

$$\frac{44{,}70}{\sin 45°} = \frac{8}{\sin A} \qquad m\angle A = \sin^{-1}\left(\frac{8 \cdot \sin 45}{44{,}70}\right)$$

$$m\angle A = 7{,}27°$$

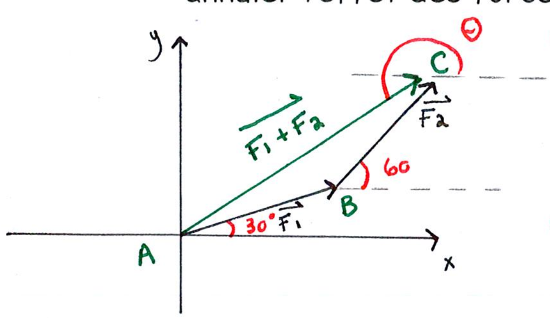
Orientation :

3) $m\angle\theta = 180 + (90 - m\angle A)$

$$m\angle\theta = 180 + (90 - 7{,}27)$$

$$m\angle\theta = 262{,}73°$$

#5 Un objet est soumis à deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$. $\vec{F_1}$ a une intensité de 3 newtons et une orientation de 30°. $\vec{F_2}$ a une intensité de 2 newtons et une orientation de 60°. Trouve la force $\vec{F}$ qu'il faut appliquer à l'objet pour annuler l'effet des forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$.



1) $m\angle B = \underbrace{180 - 60}_{\text{angles adj sup.}} + \underbrace{30}_{\text{angles alternes-internes formés par des // ...}} = 150°$

2) $\|\overrightarrow{F_1 + F_2}\| = \sqrt{\|F_1\|^2 + \|F_2\|^2 - 2\|F_1\|\cdot\|F_2\|\cos B}$

$$= \sqrt{3^2 + 2^2 - 2\cdot 3\cdot 2 \cos 150}$$

$$= 4{,}84 \text{ Newtons}$$

3) Trouve $m\angle A$: $\dfrac{\|\overrightarrow{F_1+F_2}\|}{\sin B} = \dfrac{\|\vec{F_2}\|}{\sin A}$

$$\frac{4{,}84}{\sin 150} = \frac{2}{\sin A}$$

$$m\angle A = \sin^{-1}\left(\frac{2\cdot \sin 150}{4{,}84}\right)$$

$$m\angle A = 11{,}92°$$

4) Orientation :

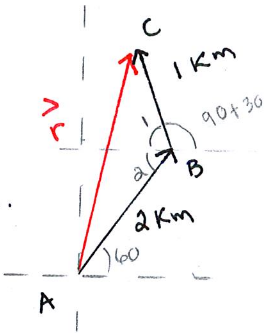
$$\theta = \underbrace{11{,}92 + 30}_{\text{angles alt-int ...}} + 180$$

$$\theta = 221{,}92°$$

#6 Jasmine parcourt à pied 2 km à 30° à l'est du nord puis 1 km à 30° à l'ouest du nord. Détermine la longueur et l'orientation du déplacement résultant.

$m\angle 1 = 60$
adj supp.

$m\angle 2 = 60°$
angles alt-internes...



1) $m\angle B = m\angle 1 + m\angle 2$

$m\angle B = 120°$

2) $\|\vec{r}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \cos 120}$

$\|\vec{r}\| = 2{,}65 \text{ km}$

3) $m\angle A$:

$\frac{1}{\sin A} = \frac{2{,}65}{\sin 120}$

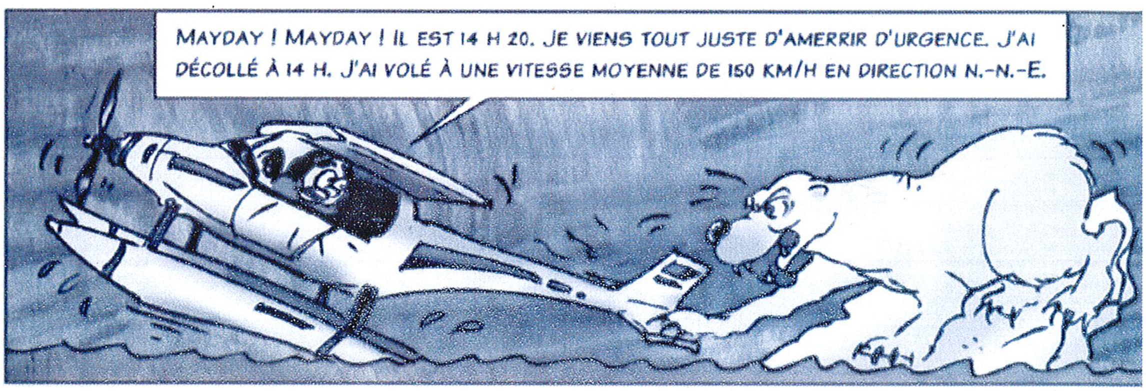
$m\angle A = 19{,}07$

4) Orientation

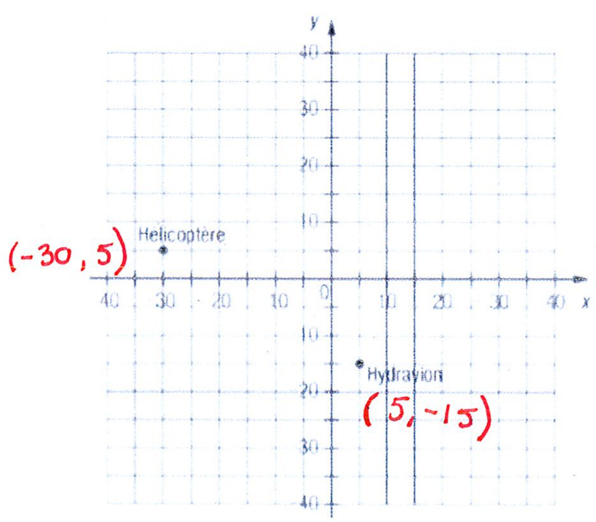
$m\angle \theta = 60 + 19{,}07$

$= 79{,}07°$

#7 Après s'être posé d'urgence en pleine mer, le pilote d'un hydravion lance le message suivant :



Un hélicoptère de secours décolle à 14h25 du poste de commandement des garde-côtes pour se rendre directement à l'endroit où l'hydravion s'est posé à 14h20. Les lieux de décollage de l'hydravion et de l'hélicoptère sont représentés ci-dessous. Les graduations du plan cartésien sont en kilomètres.



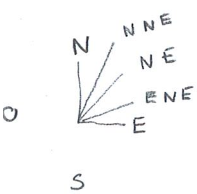
Donnez au pilote de l'hélicoptère des indications précises qui lui permettront de rejoindre l'hydravion au plus tard à 14h40.

1) Trouve les composantes du vecteur de l'hydravion

a) Norme :

Vol = 20 minutes ou $1/3$ heure vitesse = 150 km/h

donc $\frac{150 \text{ km}}{1 \text{h}} = \frac{\text{dist.}}{1/3 \text{ heure}}$ distance = 50 km



b) Orientation : N-N-E donc 67,5°

c) composante :

a : $\cos 67{,}5 = \frac{a}{50}$ b : $\sin 67{,}5 = \frac{b}{50}$

$a = 19{,}13$ $b = 46{,}19$

2) Lieu du crash :

Départ : (5, −15)

Crash : $(5 + 19{,}13 \;,\; -15 + 46{,}19) = (24{,}13 \;,\; 31{,}16)$

3) Composante pour l'hélicoptère :

$(24{,}13 - -30 \;,\; 31{,}16 - 5) = (54{,}13 \;,\; 26{,}16)$

4) Norme pour l'hélicoptère :

$\|\vec{H}\| = \sqrt{54{,}13^2 + 26{,}16^2}$

$\|\vec{H}\| = 60{,}12$ km

5) Orientation de l'hélicoptère

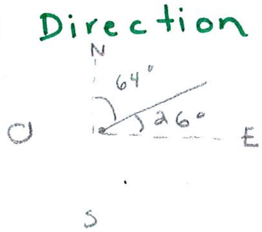
$m\angle\theta = \tan^{-1}\left(\frac{26{,}16}{54{,}13}\right)$

$m\angle\theta = 25{,}79° \approx 26°$

6) Trouver la bonne vitesse sachant que les secours ont 15min!

$V = \frac{d}{t}$ $V = \frac{60{,}12 \text{ km}}{1/4 \text{ h}}$ $V = 240{,}48$ km/h

7) Direction : N 64° E



Rép : Il doit voler à 240,48 km/h en direction N 64° E.

Produit d'un vecteur par un scalaire

Multiplier un vecteur par un scalaire revient à multiplier chacune des composantes de ce vecteur par ce scalaire.

$$\boxed{\text{Si } \vec{u} = (a,b), \text{alors } k\vec{u} = k(a,b) = (ka,\ kb)}$$

Exercice soit $\vec{u} = (4,6)$ et $\vec{v} = (5,7)$ calcule,

a) $5\vec{v}$

$5(5,7)$

$(5\cdot 5,\ 5\cdot 7)$

$(25,\ 35)$

b) $-\vec{v} + 3\vec{u}$

$-1(5,7) + 3(4,6)$

$(-5,-7) + (12,18)$

$(-5+12,\ -7+18)$

$(7,\ 11)$

Produit scalaire de deux vecteurs (le travail)

Le produit scalaire est une opération qui fait intervenir deux vecteurs et dont le résultat est un nombre. Le produit scalaire des vecteurs u et v se note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et se lit « $\vec{u}$ produit scalaire $\vec{v}$ »

À partir des composantes :

Soit $\vec{u} = (a,b) et\ \vec{v} = (c,d)$ le produit scalaire est : $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd}$

Exercice soit $\vec{u} = (4,9)$ et $\vec{v} = (2,7)$ calcule,

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$(4,9)\cdot(2,7) = (4\cdot 2 + 9\cdot 7)$

$= 71$

b) $2\vec{v} \cdot 3\vec{u}$

$= 2(2,7) \cdot 3(4,9)$

$= (4,14)\cdot(12,27)$

$= 4\cdot 12 + 14\cdot 27$

$= 426$