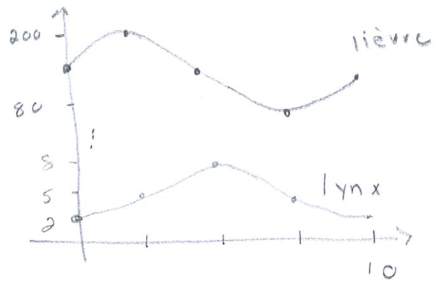
Une étude réalisée sur plusieurs années par des biologistes montre une étroite corrélation entre la population de lièvres d'une région donnée et celle de son principal prédateur, le lynx. La population $P$ de lynx (en nombre d'individus) varie selon la règle $P = {}^-3 \cos \frac{\pi}{5}x + 5$, où $x$ représente le temps écoulé (en années) depuis le début de l'étude. Durant l'étude, les spécialistes ont noté que la population de lièvres variait de 80 à 200 individus et que le graphique de cette population évoluait selon une fonction sinus ayant la même période que celle des lynx.

a) Quelle est la règle de la fonction qui met en relation la population de lièvres selon le temps ?

$P = \frac{2\pi}{\pi/5} = 10$

$A = \frac{200 - 80}{2} = 60$

$k = \frac{80 + 200}{2} = 140$




$L = 60 \sin\left(\frac{\pi}{5}x\right) + 140$

b) Quelle est la population des 2 espèces 8 ans après le début de l'étude ?

Lynx :

$P = -3\cos \frac{\pi \cdot 8}{5} + 5$

$P = 4,08$ donc 4 lynx

Lièvre

$L = 60 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot 8\right) + 140$

$L = 82,93$ donc 82 ou 83 lièvres

c) La deuxième fois, quelle était la population de lièvres alors que celle des lynx atteignait 5 individus ?

Lynx : $x = ?$ si $P = 5$

$5 \overset{-5}{=} -3\cos \frac{\pi}{5}x + 5 \; {}^{-5}$

$0 = -3\cos \frac{\pi}{5}x$

$0 = \cos \frac{\pi}{5}x$

$\frac{\pi}{5}x = \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\frac{\pi}{5}x = \frac{3\pi}{2}$

$x = 2,5$ $\qquad$ $x = 7,5$

$\uparrow$ 2e moment

Lièvre : $L = ?$ si $x = 7,5$

$L = 60 \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot 7,5\right) + 140$

$L = 60 \cdot -1 + 140$

$L = 80$

Donc 80 lièvres

## Les fonctions sécantes, cosécantes et cotangentes

### 1- Fonction sécante :

La sécante d'un nombre réel $t$ est le rapport trigonométrique défini par :

$$\boxed{\sec t = \frac{hyp}{c.a.} \quad \text{donc} \quad \sec t = \frac{1}{\cos t}} \quad \cos t \neq 0 !$$

Exemples :

1) Soit P(t) = $\left(\overset{\cos t}{-\frac{3}{5}}, \overset{\sin t}{\frac{4}{5}}\right)$ un point trigonométrique, calculez la valeur exacte :

a) sec t = $\frac{1}{\cos t}$

$\sec t = \frac{1}{-3/5}$

$= \frac{-5}{3}$

b) $\sec^2$ t = $\left(\frac{-5}{3}\right)^2$

$= \frac{25}{9}$

c) 2 sec t = $2 \cdot \frac{-5}{3}$

$= \frac{-10}{3}$

2) Calculez la valeur exacte si possible :

a) $sec^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6}\right)$

$\sec^2\left(\frac{3\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}\right)$

$\sec^2\left(\frac{8\pi}{6}\right)$

$\sec^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{\cos^2(4\pi/3)}$

$= \frac{1}{(-1/2)^2}$

$= \frac{1}{1/4}$

$= 4$

b) sec (1,2) ce n'est pas un point du cercle

Donc calculatrice en radian !

$\sec(1{,}2) = \frac{1}{\cos 1{,}2}$

$= 2{,}7597$

## 1- Fonction cosécante:

La cosécante d'un nombre réel $t$ est le rapport trigonométrique défini par :

$$\boxed{\text{cosec } t = \frac{hyp}{c.o} \quad \text{donc} \quad \csc t = \frac{1}{\sin t}}$$

{cosec t ou csc t}

Exemples :

1) Soit P(t) = $\left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$ un point trigonométrique, calculez la valeur exacte :

cos t sin t

a) csc t = $\frac{1}{\sin t}$

$= \frac{1}{5/13}$

$= 13/5$

b) 3 csc² t =

$= 3 \cdot \left(\frac{13}{5}\right)^2$

$= 3 \cdot \frac{169}{25}$

$= \frac{507}{25}$

c) $-\frac{csct}{3} = \frac{-\frac{13}{5}}{3}$

$= \frac{-13}{5} \cdot \frac{1}{3}$

$= \frac{-13}{15}$

2) Calculez la valeur exacte si possible :

a) $csc\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin -7\pi/4}$

ou $= \frac{1}{\sin \pi/4}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

b) csc (0) $= \frac{1}{\sin 0}$

$= \frac{1}{0}$ indéterminé

## 1- Fonction cotangente :

La cotangente d'un nombre réel $t$ est le rapport trigonométrique défini par :

$$\boxed{\text{cotan } t = \frac{c.a}{c.o} \quad \text{donc} \quad \text{cotan} t = \frac{1}{\tan t}}$$

donc $\text{cotan} t = \frac{\cos t}{\sin t}$

Exemples :

1) Soit $P(t) = \left(\overset{\cos t}{-\frac{7}{25}}, \overset{\sin t}{-\frac{24}{25}}\right)$ un point trigonométrique, calculez la valeur exacte :

a) cot t = $\frac{\cos t}{\sin t} = \frac{-7/25}{-24/25}$

$= \frac{-7}{25} \cdot \frac{-25}{24}$

$= \frac{7}{24}$

b) 3 cot² t =

$3\left(\frac{7}{24}\right)^2 = 3 \cdot \frac{49}{576}$ 192

$= \frac{49}{192}$

2) Calculez la valeur exacte si possible :

a) $cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos \pi/2}{\sin \pi/2}$

$= \frac{0}{1}$

$= 0$

b) cot (3) $= \frac{\cos 3}{\sin 3}$

$= -7{,}0153$

c) $cot\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ $P\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ ou $P\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

$= \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\cot\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{\sqrt{3}}$

$= \frac{-1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

**En résumé : voici les équivalences des fonctions trigonométriques**

$$\boxed{\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}}$$

$$\boxed{\sec t = \frac{1}{\cos t}}$$

$$\boxed{\text{cotan } t = \frac{\cos t}{\sin t}}$$

$$\boxed{\csc t = \frac{1}{\sin t}}$$

**Exercices : Simplifiez les expressions suivantes à l'aide de ces équivalences :**

a) $\frac{1}{\cos t}$ $= \sec t$

b) $\frac{1}{2\,sec^2 t}$ $= \frac{1}{2} \cdot \cos^2 t = \frac{\cos^2 t}{2}$

c) $tan^2 t \cdot \frac{1}{sec^2 t}$

$\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \cdot \cos^2 t = \sin^2 t$

d) $\sin t \cdot \cos t \cdot sec^2 t$

$\sin t \cdot \cancel{\cos t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}$

$\frac{\sin t}{\cos t} = \tan t$

e) $\frac{sin^2 t \cdot cot^2 t \cdot sec^2 t \cdot csc^2 t}{sec^2 t}$ $= \frac{\cancel{\sin^2 t} \cdot \frac{\cancel{\cos^2 t}}{\cancel{\sin^2 t}} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos^2 t}} \cdot \frac{1}{\sin^2 t}}{\frac{1}{\cos^2 t}}$

$= \frac{1}{\sin^2 t} \div \frac{1}{\cos^2 t}$

$= \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}$

$= \cot^2 t$

f)

$$\frac{\cos^2 t \cdot \tan^2 t \cdot \csc^2 t}{2\sec^2 t} = \frac{\cos^2 t \cdot \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{\sin^2 t}}{\frac{2}{\cos^2 t}}$$

$$= 1 \div \frac{2}{\cos^2 t}$$

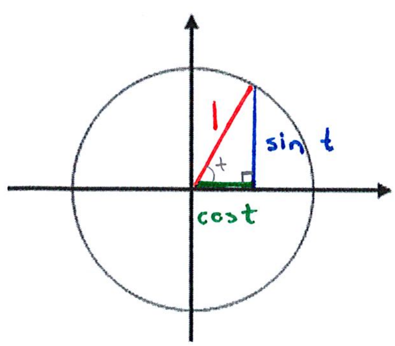
$$= \frac{\cos^2 t}{2}$$

## Les identités trigonométriques

Une identité trigonométrique est une équation trigonométrique qui est toujours vraie quelles que soient les valeurs des variables. Les identités permettent, entre autres, de résoudre des équations trigonométriques, de réduire des expressions trigonométriques et de démontrer d'autres identités.

**Première identité :**

Sachant que le rayon du cercle trigonométrique vaut 1, on a le triangle suivant :




C'est un triangle rectangle, donc par Pythagore on obtient l'identité suivante :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\boxed{1^2 = \sin^2 t + \cos^2 t}$$

**Deuxième identité :**

Partons de la première et divisons chaque membre de l'équation par $\cos^2 t$

$$\frac{1^2}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t}$$

$$\boxed{\sec^2 t = \tan^2 t + 1}$$

**Troisième identité :**

Partons de la première et divisons chaque membre de l'équation par $\sin^2 t$

$$\frac{1^2}{\sin^2 t} = \frac{\sin^2 t}{\sin^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}$$

$$\boxed{\operatorname{cosec}^2 t = 1 + \operatorname{cotan}^2 t}$$

Exercices : Si $\cos x = \frac{1}{2}$, déterminez la valeur exacte de

a) $\sin x =$

$1^2 = \sin^2 x + \cos^2 x$

$1 = \sin^2 x + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$1 - \frac{1}{4} = \sin^2 x$

$\frac{3}{4} = \sin^2 x$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) tan x = $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

c) $sec^2 x = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$= 4$

d) csc x = $\dfrac{1}{\sin x}$

$= \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Utilisez les identités pour **simplifier** les expressions suivantes

a) $(1 - cos^2 x)\ cot^2 x$

$$\sin^2 x \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \cos^2 x$$

b) $tan^2 x\ cosec\ x \cos x$

$$= \frac{\sin^{\cancel{2}} x}{\cos^{\cancel{2}} x} \cdot \frac{1}{\cancel{\sin x}} \cdot \cancel{\cos x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \tan x$$

c) $(sec^2 x - 1) cot^2 x$

$$= \tan^2 x \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= 1$$

d) $(1 + cot^2 x) sinx$

$$= \operatorname{cosec}^2 x \cdot \sin x$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \sin x$$

$$= \frac{1}{\sin x}$$

$$= \operatorname{cosec} x$$

e) $csc^2 x (1 - sin^2 x)$

$$= \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \cos^2 x$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \operatorname{cotan}^2 x$$

f) $\tan x \cos x$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x$$

$$= \sin x$$

* En démonstration, on travaille sur un seul côté de l'égalité !

Démontrez les identités trigonométriques suivantes.

a) $\frac{\sin x \cot^2 x}{\cos x} = \cot x$

$$\frac{\cancel{\sin x} \cdot \frac{\cos^{\cancel{2}} x}{\sin^{\cancel{2}} x}}{\cancel{\cos x}} = \cot x$$

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

$$\cot x = \cot x$$

CQFD!

b) $(1 - \sin x + \cos x)^2 = 2(1 - \sin x)(1 + \cos x)$

$(1 - \sin x + \cos x)$

$$1 - \sin x + \cos x - \sin x + \sin^2 x - \sin x \cos x + \cos x - \cos x \sin x + \cos^2 x =$$

$$1 - 2\sin x + 2\cos x - 2\sin x \cos x + \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} =$$

$$2 - 2\sin x + 2\cos x - 2\sin x \cos x =$$

$$2(1 - \sin x + \cos x - \sin x \cos x) =$$

$$2(1(1 - \sin x) + \cos x(1 - \sin x)) =$$

$$2((1 - \sin x)(1 + \cos x)) = 2(1 - \sin x)(1 + \cos x)$$

CQFD!

c) $\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x} = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\frac{\frac{1}{1} + \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{1} + \frac{\cos x}{\sin x}} =$$

$$\frac{\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}} =$$

$$\frac{\cancel{\cos x + \sin x}}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cancel{\sin x + \cos x}} =$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

CQFD!

d) $(1 + \tan^2 x)(1 - \cos^2 x) = \sec^2 x - 1$

$$\sec^2 x \cdot \sin^2 x =$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sin^2 x =$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$\tan^2 x =$$

$$\sec^2 x - 1 = \sec^2 x - 1$$

CQFD!

**e)** $\dfrac{\sin x + \tan x}{\operatorname{cosec} x + \cot x} = \sin x \tan x$

$$\frac{\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$\frac{\frac{\sin x \cos x + \sin x}{\cos x}}{\frac{1 + \cos x}{\sin x}}$$

$$\frac{\sin x \cos x + \sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$\frac{\sin x\,(\cancel{\cos x + 1})}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cancel{(1 + \cos x)}}$$

$$\sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \tan x = \sin x \tan x$$

CQFD!

**f)** $\dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} \cdot \frac{(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)} =$$

$$\frac{\sin x\,(1 - \cos x)}{(1 - \cos^2 x)} =$$

$$\frac{\cancel{\sin} x\,(1 - \cos x)}{\sin^2 x} =$$

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

**g)** $\dfrac{secx}{sinx} - \dfrac{sinx}{cosx} = \cot x$

$$\frac{\sec x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x}{\sin x \cos x} =$$

$$\frac{\frac{1}{\cos x} \cdot \cos x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} =$$

$$\frac{1 - \sin^2 x}{\sin x \cos x} =$$

$$\frac{\cos^{\cancel{2}} x}{\sin x \,\cancel{\cos x}} =$$

$$\frac{\cos x}{\sin x} =$$

$$\cot x = \cot x$$

CQFD!

**h)** $\dfrac{1}{1-six} + \dfrac{1}{1+sinx} = 2sec^2x$

$$\frac{1 \cdot (1 + \sin x) + 1\,(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} =$$

→ Différence de carré!

$$\frac{1 + \sin x + 1 - \sin x}{(1 - \sin^2 x)} =$$

$$\frac{2}{\cos^2 x} =$$

$$2 \sec^2 x = 2 \sec^2 x$$