Établissez la règle de chacune des fonctions trigonométriques suivantes.

a)

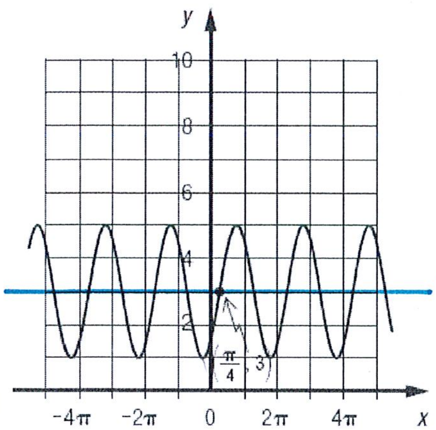
$A = \frac{5-1}{2} = 2$

$p = 2\pi$

$|b| = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

$(h, k) = \left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$

a +




$f(x) = 2 \sin\left(x - \pi/4\right) + 3$

ou

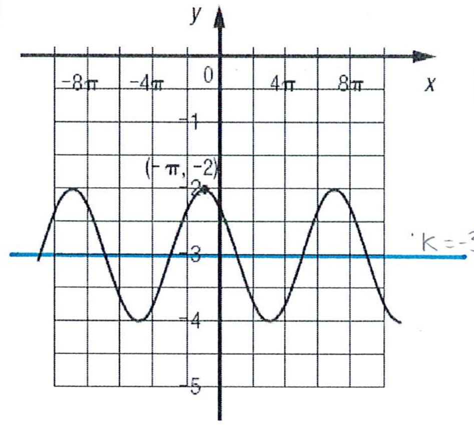
$\leftarrow f(x) = -2 \cos\left(x + \pi/4\right) + 3$

pt de départ $(-\pi/4, 1)$

alors $h = -\pi/4$ $k = \frac{1+5}{2} = 3$

sin

b)




$A = 1$

$b = \frac{2\pi}{8\pi} = 1/4$

pt de départ $(-\pi, -2) \Rightarrow$ pt max a +

$h = -\pi$ $k = \frac{-4 + -2}{2}$

$k = -3$

$f(x) = \cos\left(1/4\left(x + \pi\right)\right) - 3$

ou

$f(x) = -\sin\left(\frac{1}{4}\left(x - \pi\right)\right) - 3$

d)

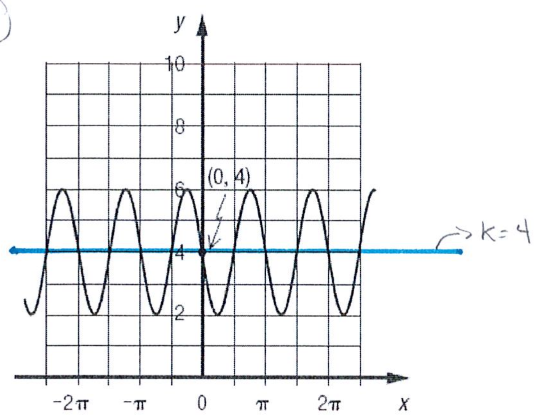
$A = 2$

$p = \pi$

$b = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

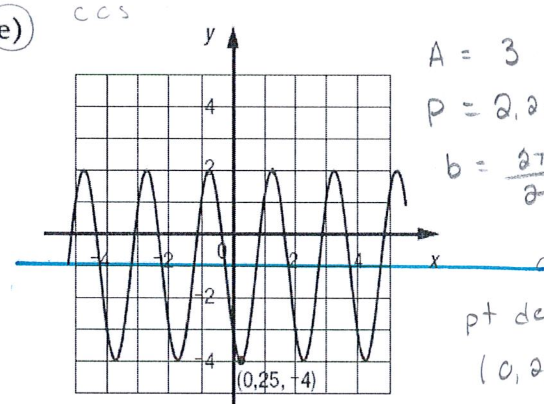
$(h, k) = (0, 4)$

a −




$f(x) = -2 \sin(2x) + 4$

e) cos




$A = 3$

$p = 2{,}25 - 0{,}25 = 2$

$b = \frac{2\pi}{2} = \pi$

pt de départ $\Rightarrow$ min

$(0{,}25, -4)$ alors a −

$h = 0{,}25$

$k = -1$

$f(x) = -3 \cos\left(\pi\left(x - 0{,}25\right)\right) - 1$

ou

$f(x) = 3 \cos\left(\pi\left(x + 0{,}75\right)\right) - 1$

ou

$f(x) = -3 \sin\left(\pi\left(x + 0{,}25\right)\right) - 1$

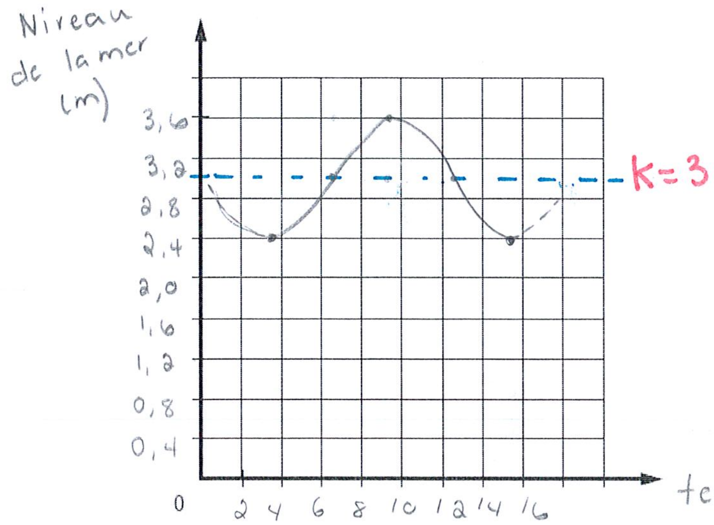
Problèmes écrits :

# 1

Les pêcheurs d'un fjord du Canada ont remarqué que le niveau de la mer varie de façon cyclique au cours d'une journée. Voici les renseignements qu'ils ont relevés.

- Le niveau maximal est de 3,6 m.
- Le niveau minimal est de 2,4 m.
- Le temps entre deux maximums consécutifs est de 12 h.
- Le premier minimum est mesuré à 3 h 30.

a) Tracez le graphique qui représente cette situation.




$A = \frac{3,6 - 2,4}{2} = 0,6$

$p = 12$

$b = \frac{2\pi}{12} = \pi/6$

pt de départ

$(3,5\ ,\ 2,4) \Rightarrow$ min

donc

$h = 3,5 \quad k = 3$

a-

b) Quelle est la règle de la fonction sinusoïdale qui représente cette situation ?

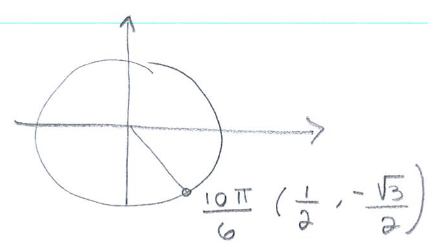
$f(x) = -0,6 \cos\left(\frac{\pi}{6}(x - 3,5)\right) + 3$

c) Quel est le niveau de la mer à 13 h 30 ?

Le niveau de la mer est de 2,7 m à 13h30.

$f(13,5) = -0,6 \cos\left(\frac{\pi}{6}(13,5 - 3,5)\right) + 3$

$f(13,5) = -0,6 \cos\left(\frac{10\pi}{6}\right) + 3$




sans calculatrice !! :)

$f(13,5) = -0,6\left(\cos \frac{5\pi}{3}\right) + 3$

$f(13,5) = -0,6 \cdot \frac{1}{2} + 3$

$f(13,5) = 2,7$

#2

En étudiant les mouvements d'une bouée sur le fleuve St-Laurent, un observateur a déduit de ses expériences que la hauteur de la bouée en cm était donnée par $h(t) = -75 \sin\left(\frac{\pi}{4} t\right)$ où t représente le temps en secondes.

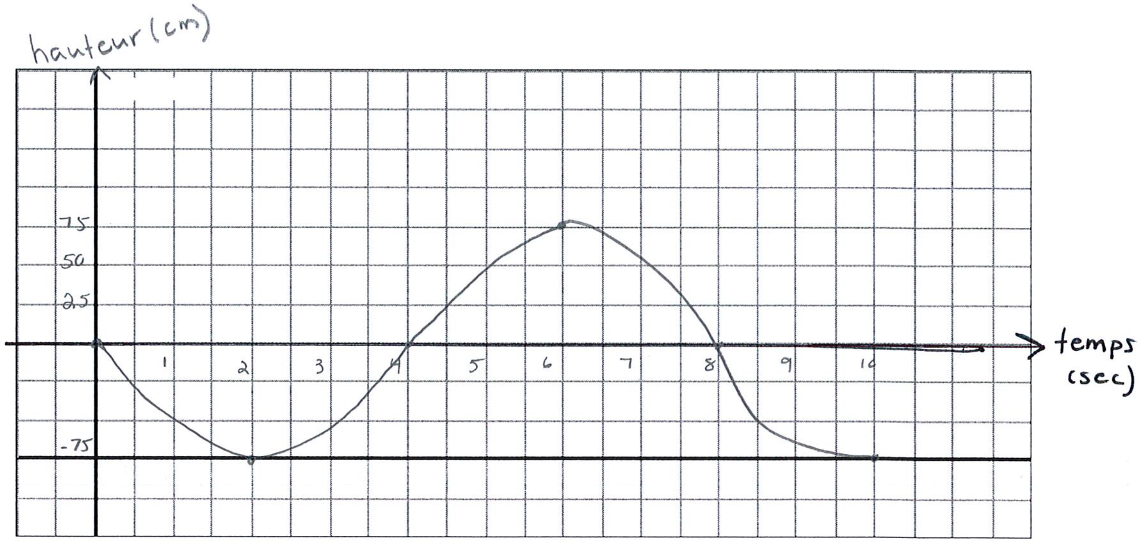
a) fais le graphique pour les 10 premières secondes

Forme recherchée : $h(t) = -75 \sin \frac{\pi}{4}(t)$

$A = 75$

$P = \frac{2\pi}{\pi/4} = 8$

$(h, k) = (0, 0)$




b) Quelle est la hauteur de la bouée à la 5$^{e}$ seconde ?

$h(5) = -75 \sin \frac{\pi}{4} \cdot 5$

$h(5) = -75 \cdot -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$h(5) \approx 53{,}03$ cm

c) À quel moment la fonction est-elle croissante (toujours pour les 10 premières secondes) ?

$[2, 6]$ sec

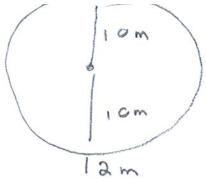
d) Dans combien de temps la bouée atteindra-t-elle sa hauteur maximale pour une troisième fois ?

6 + 2 périodes

donc $6 + 16 = 24$

Rép Dans 24 sec.

#3

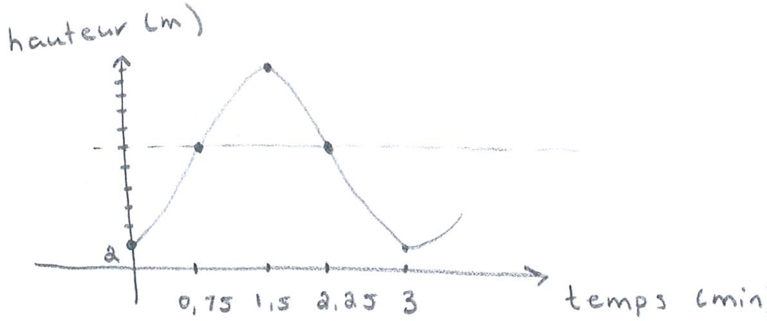



Les cabines d'une grande roue sont attachées à 10 m de son centre. Gabriel monte à bord d'une cabine alors que celle-ci est au bas de la grande roue. La distance entre le point d'attache de la cabine de Gabriel et le sol est alors de 2 m. Ensuite, la grande tourne sur elle-même à une vitesse constante. Elle fait un tour complet en 3 minutes. La distance entre le point d'attache de la cabine de Gabriel et le sol selon le temps écoulé depuis l'embarquement est représentée par une fonction sinusoïdale.

→ pt départ (0, 2)

Quelle est la distance entre le point d'attache de la cabine de Gabriel et le sol, 7 minutes après l'embarquement ?

1) Trouve l'équation :




$A = 10$

$P = 3$

donc $b = \frac{2\pi}{3}$

$(h, k) = (0, 12)$

Donc $f(x) = -10 \cos \frac{2\pi}{3}(x) + 12$

2) Trouve $f(7)$

$f(7) = -10 \cos\left(\frac{2\pi \cdot 7}{3}\right) + 12$

$f(7) = -10 \cos\left(\frac{14\pi}{3}\right) + 12$

$f(7) = -10 \cdot \frac{-1}{2} + 12$

$f(7) = 17$

$P\left(\frac{14\pi}{3}\right) = \frac{12\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$

$= P(2\pi/3)$

Donc $\cos \frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2}$

ou utilise ta calculatrice en radian !

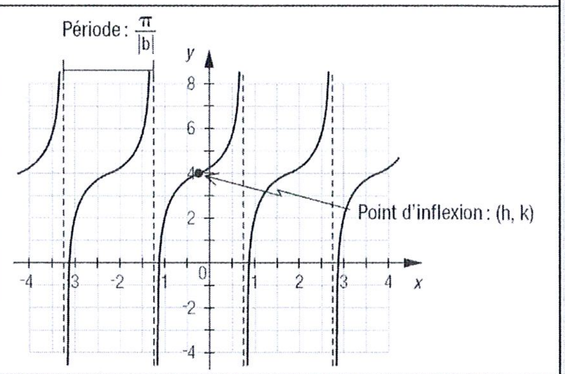
## FONCTION TANGENTE

La **fonction tangente** est une fonction périodique dont la règle peut s'écrire sous la forme $f(x) = a\tan b(x - h) + k$, où $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Dans la représentation graphique d'une fonction tangente :

- toutes les asymptotes verticales sont situées à égale distance les unes des autres ;
- la distance entre deux asymptotes verticales consécutives correspond à la période $p$ de la fonction et est déterminée par $\frac{\pi}{|b|}$;
- (h, k) sont les coordonnées d'un point d'inflexion de la courbe.

si a + b +
a - b -

si a + b -
a - b +

| Règle | Table de valeurs | Représentation graphique |
|---|---|---|
| $f(x) = 0{,}7\tan\frac{\pi}{2}(x + 0{,}25) + 4$<br>k = 4 ligne médiane<br>$b = \pi/2$<br>$p = \frac{\pi}{\pi/2} = 2$<br>h = −0,25<br>asymptotes :<br>$x_1 = h + p/2 = 0{,}75$<br>$x_2 = h - p/2 = -1{,}25$ | x : -1, 0, 1, 2, 3<br>y : 0,5, -1, 0,5, 2, 0,5 |  |

**En résumé :**

1. Trouve la période

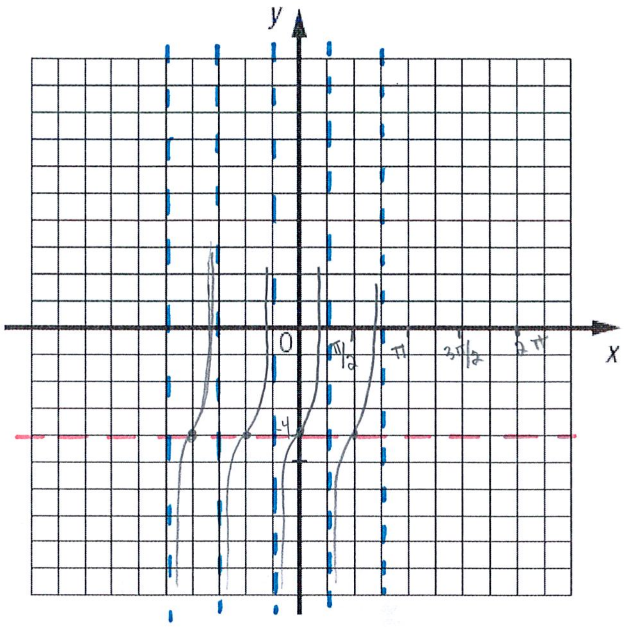
2. **(h, k) est toujours un point d'inflexion.** Si a et b sont de mêmes signes, il précède une montée!

3. **h** est toujours au milieu des asymptotes

Il n'y a pas d'amplitude ni de min et de max dans une fonction tangente !! Il y a également plusieurs réponses possibles pour la fonction tangente !

Tracez le graphique de chacune des fonctions trigonométriques suivantes.

$h(x) = 3 \tan 2(x + \pi) - 4$




$(h, k) = (-\pi, -4)$

$p = \pi/2$

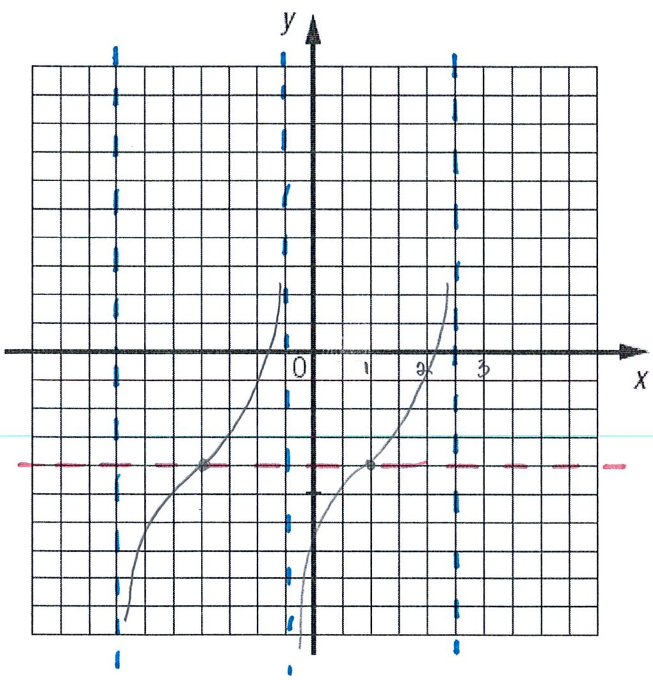
asymptote $= h + p/2$

$-\pi + \dfrac{\pi}{4} = -3\pi/4$

$-\pi - \pi/4 = -5\pi/4$

a + b + ~

$k(x) = \tan \frac{\pi}{3}(x - 1) - 4$




$(h, k) = (1, -4)$

$p = \dfrac{\pi}{\pi/3} = 3$

asympt: $h + p/2$

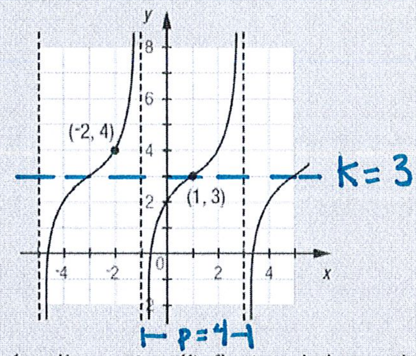
$1 + 3/2 = 2,5$

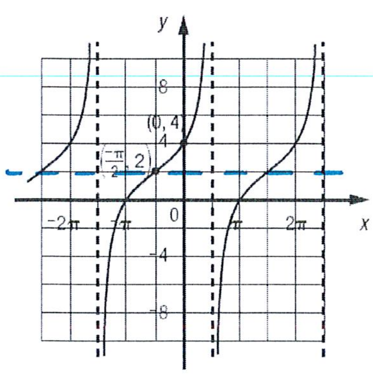
$1 - 3/2 = -0,5$

a · b + ~

## RECHERCHE DE LA RÈGLE D'UNE FONCTION TANGENTE

Il est possible de déterminer la règle d'une fonction tangente, dont la règle s'écrit $f(x) = a\tan b(x - h) + k$, de la façon suivante.

| | |
|---|---|
| 1. Trouver les coordonnées d'un point d'inflexion et d'un autre point de la courbe. | Ex. :   Les coordonnées d'un point d'inflexion de la courbe sont (1, 3) et la courbe passe par le point (-2, 4). |
| 2. À l'aide du graphique, déduire la valeur du paramètre b. $b = \frac{\pi}{p}$ | Puisque la période de cette fonction est 4, on a : $p = \frac{\pi}{\|b\|} \Rightarrow 4 = \frac{\pi}{\|b\|} \Rightarrow b = \pm\frac{\pi}{4}$ D'après l'allure de la courbe, on déduit que $b = \frac{\pi}{4}$. |
| 3. Substituer les coordonnées du point d'inflexion à h et à k, les coordonnées de l'autre point de la courbe à $x$ et à $f(x)$, ainsi que la valeur du paramètre b dans la règle $f(x) = a\tan b(x - h) + k$. | $4 = a\tan\frac{\pi}{4}(-2 - 1) + 3$ |
| 4. Résoudre l'équation obtenue afin de déterminer la valeur du paramètre a. | $4 = a\tan\frac{\pi}{4}(-2 - 1) + 3$<br>$1 = a\tan\frac{-3\pi}{4}$<br>$1 = a \times 1$<br>$a = 1$ |
| 5. Écrire la règle de la fonction obtenue. | $f(x) = \tan\frac{\pi}{4}(x - 1) + 3$ |




$p = 2\pi$

$b = \frac{\pi}{2\pi}$ $\quad b = 1/2$

$(h, k) = \left(\frac{-\pi}{2}, 2\right)$ $\quad$ Pt $(0, 4)$

$f(x) = a\tan(b(x-h)) + k$

$f(x) = a\tan\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) + 2$

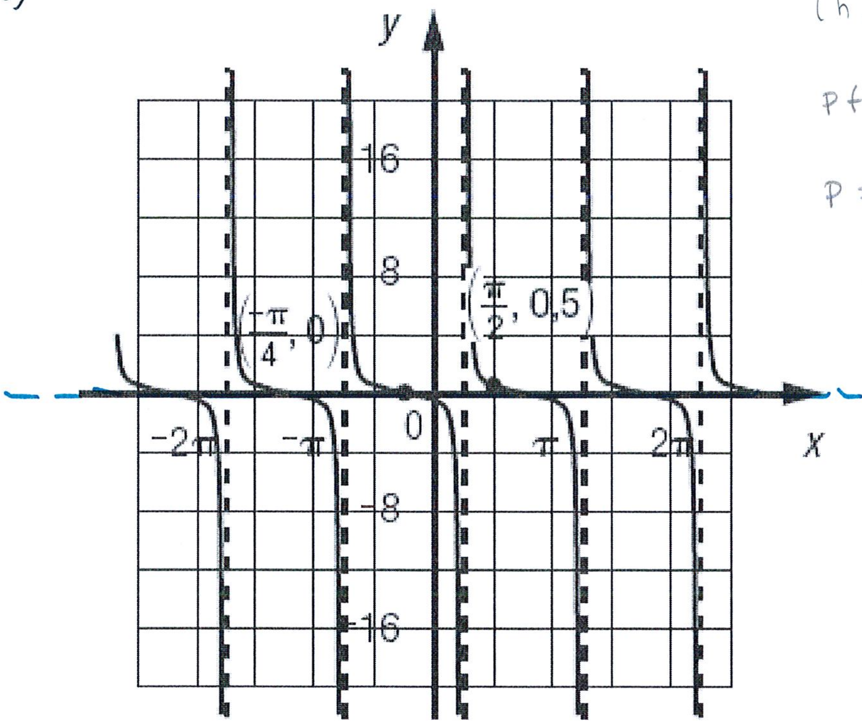
$4 - 2 = a\tan\left(\frac{1}{2}\left(0 + \frac{\pi}{2}\right)\right) + 2 - 2$

$2 = a\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{2}{1} = \frac{a \cdot 1}{1}$ $\quad a = 2$

Donc $f(x) = 2\tan\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) + 2$

b)




$(h, k) = (-\pi/4, 0)$

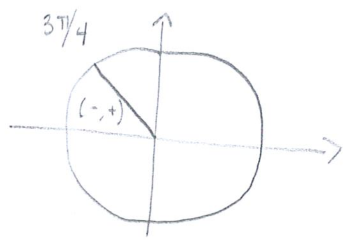
pt : $\left(\frac{\pi}{2}, 0{,}5\right)$

$P = \pi$

$b = \frac{\pi}{P}$ $\quad b = \frac{\pi}{\pi} = 1$

alors a − b +
ou
a + b −

$f(x) = a\tan(b(x-h)) + k$




$f(x) = a\tan\left(1\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$0{,}5 = a\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

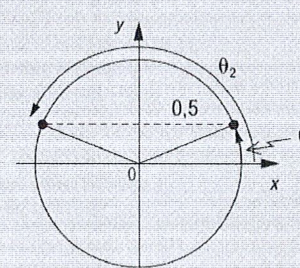
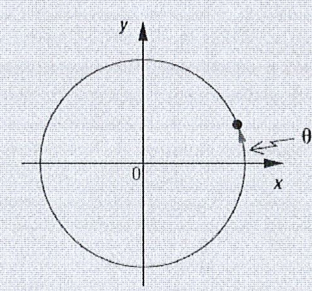
$0{,}5 = a\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$\frac{0{,}5}{-1} = \frac{a \cdot -1}{-1}$ $\quad a = -0{,}5$

donc $f(x) = -\frac{1}{2}\tan(x + \pi/4)$

# RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION TRIGONOMÉTRIQUE À UNE VARIABLE

Il est possible de résoudre une équation trigonométrique à une variable, c'est-à-dire une équation sinus, une équation cosinus ou une équation tangente, de la façon suivante.

| | | |
|---|---|---|
| | Ex. : 1) Résoudre : $2\sin 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 5 = 6$ | 2) Déterminer les zéros de la fonction : $f(x) = \sqrt{3}\tan \pi x - 1$ |
| 1. | Obtenir une équation dans laquelle l'argument du sinus, du cosinus ou de la tangente est isolé. | |
| Ex. : | 1) $2\sin 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 5 = 6$<br>$2\sin 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$<br>$\sin 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$<br>$3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \text{arc sin}\frac{1}{2}$ | 2) $\sqrt{3}\tan \pi x - 1 = 0$<br>$\sqrt{3}\tan \pi x = 1$<br>$\tan \pi x = \frac{1}{\sqrt{3}}$<br>$\pi x = \text{arc tan}\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| 2. | Pour une équation sinusoïdale, déterminer la ou les deux valeurs de $\theta$ sur $[0, 2\pi[$ qui vérifient l'équation. | Pour une équation tangente, déterminer la valeur de $\theta$ sur $[0, \pi]$ qui vérifie l'équation. |
| Ex. : | 1) <br>$\theta_1 = \frac{\pi}{6}$<br>$\theta_2 = \pi - \theta_1 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ | 2) <br>$\theta = \frac{\pi}{6}$ |
| 3. | Former deux équations à partir des valeurs trouvées. | Former une équation à partir de la valeur trouvée. |

ex1)

$3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}$ ou $3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{6}$

$+\pi/4$

$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{4}$

$x = \frac{2\pi}{36} + \frac{9\pi}{36}$

$x = \frac{11\pi}{36}$

$x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{18}$

$x = \frac{5\pi}{18} + \frac{\pi}{4}$

$x = \frac{10\pi}{36} + \frac{9\pi}{36}$

$x = \frac{19\pi}{36}$

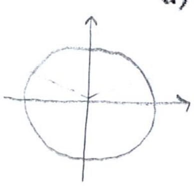
Rép. $x \in \left\{\frac{11\pi}{36}, \frac{19\pi}{36}\right\}$

ex 2) $\pi x = \frac{\pi}{6}$

$x = \frac{1}{6}$

| | | |
|---|---|---|
| 4. | Écrire l'ensemble solution en tenant compte de la périodicité et de l'intervalle demandé. Pour tenir compte de la périodicité ajoute $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}$ | |
| | $p = 2\pi/3$ | $p = 1$ |
| Ex : | 1) $x_1 = \frac{11\pi}{36} + \frac{2n\pi}{3}$ où $n \in \mathbb{Z}$ <br> $x_2 = \frac{19\pi}{36} + \frac{2n\pi}{3}$ <br> Donc : <br> $\left\{\ldots -\frac{13\pi}{36}, -\frac{5\pi}{36}, \frac{11\pi}{36}, \frac{19\pi}{36}, \frac{35\pi}{36}, \frac{43\pi}{36}, \ldots\right\}$ | 2) $x = \frac{1}{6} + n, \; n \in \mathbb{Z}$ <br> Donc $\left\{\ldots -\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \ldots\right\}$ |

Résolvez les équations qui suivent dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.



a) $\sin x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{5\pi}{6}$

b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = 3\pi/4$

$x = 5\pi/4$

c) $\tan x = 1$

$x = \pi/4$

et

$x = 5\pi/4$

d) $\cos x = -1$

$x = \pi$

e) $\tan x = 0$

$x = 0, \; x = \pi$

f) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \pi/4$ et $x = 3\pi/4$

Tableau blanc

g) $\cos x = \sqrt{3}/2$

$x = \pi/6$

$x = 11\pi/6$

h) $\tan x = \sqrt{3}/3$

$x = \pi/6$

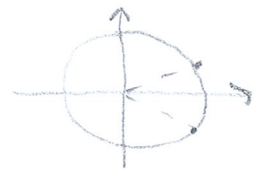
$x = 7\pi/6$

i) $\sin x = -1/2$

$x = 7\pi/6$

$x = 11\pi/6$

Isolez le rapport trigonométrique et son argument dans chacune des équations trigonométriques ci-dessous.



a) $4 \sin 6(x - 11) + 2 = \frac{1}{2}$ $-2$ $-2$

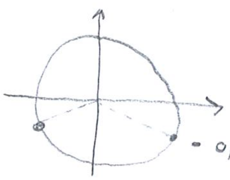
$\frac{4 \sin 6(x-11)}{4} = \frac{-\frac{3}{2}}{4}$

$\sin 6(x-11) = -\frac{3}{8}$ (pas une valeur remarquable)

$6(x-11) = \sin^{-1}(-3/8)$

$6(x-11) = -0{,}3844$

ou



$-0{,}3844$

$6(x-11) = \pi - \theta$ (Les sinus d'angles supplémentaires sont égaux !)

$= \pi - -0{,}3844$

$= 3{,}526$

b) $9 \cos \pi(x + 14) - 5 = -1$ $+5$ $+5$

$9 \cos \pi(x+14) = 4$

$\cos \pi(x+14) = \frac{4}{9}$

$\pi(x+14) = \cos^{-1}\left(\frac{4}{9}\right)$

$\pi(x+14) = 1{,}11$ ou $\pi(x+14) = -1{,}11$

ou

$\pi(x+14) = 2\pi - 1{,}11$

c) $7 \cos \frac{\pi}{2}(x + 6) + 7 = 0$ $-7$ $-7$

$\frac{7 \cos \frac{\pi}{2}(x+6)}{7} = \frac{-7}{7}$

$\cos \frac{\pi}{2}(x+6) = -1$

donc

$\frac{\pi}{2}(x+6) = \pi$

d) $-4 \tan \frac{\pi}{5}(x + 8) - 7 = -5$ $+7$ $+7$

$\frac{-4 \tan \frac{\pi}{5}(x+8)}{-4} = \frac{2}{-4}$

$\tan \frac{\pi}{5}(x+8) = \frac{-1}{2}$

$\frac{\pi}{5}(x+8) = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$

$\frac{\pi}{5}(x+8) = -0{,}4636$