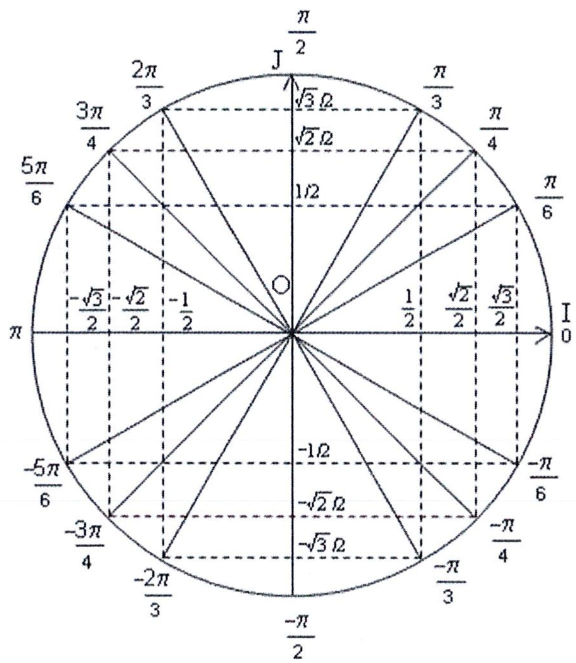
Les Sciences Naturelles V | Document principal

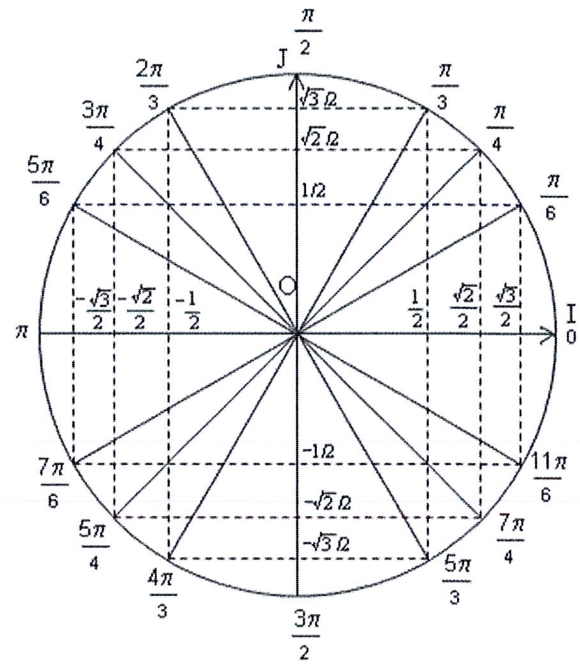
Les fonctions trigonométriques

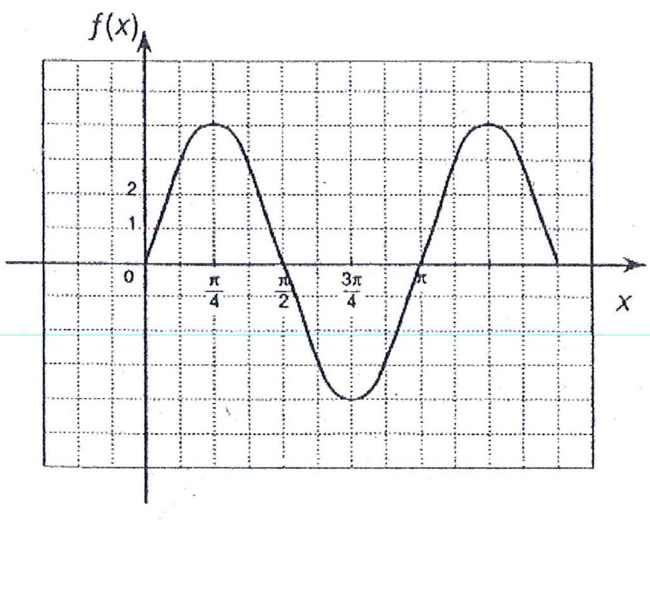
Nom Catherine

$[-\pi; \pi]$



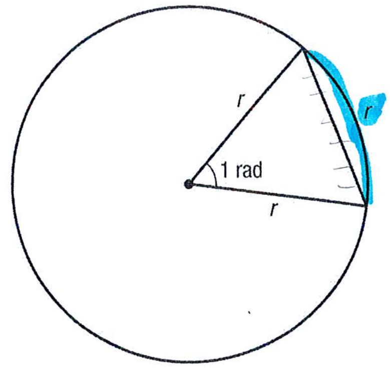
$[0;2\pi]$





RADIAN

Tout comme le degré, le **radian**, noté rad, est une unité de mesure d'angle. Dans un cercle, un radian est la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc dont la longueur correspond au rayon du cercle.



Lorsque l'unité de mesure d'un angle n'est pas mentionnée, on considère qu'elle est donnée en radians. Un angle plein mesure 2π rad, soit ≈ 6,28 rad.

Il est possible de passer d'une mesure d'angle, en radians, à une mesure d'angle, en degrés, et vice versa, à l'aide de l'équivalence suivante.

$$\boxed{\frac{n^\circ}{360} = \frac{\theta \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} \quad \text{ou} \quad \frac{n^\circ}{180^\circ} = \frac{\theta \text{ rad}}{\pi \text{ rad}}}$$

Ex. : 1) La mesure, en degrés, d'un angle de 5 rad est :

$$\frac{n^\circ}{360^\circ} = \frac{5 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} \Rightarrow n = \frac{5 \times 360}{2\pi} = \frac{1800}{2\pi} = \left(\frac{900}{\pi}\right)^\circ, \text{ soit} \approx 286{,}48^\circ.$$

2) La mesure, en radians, d'un angle de 40° est :

$$\frac{40^\circ}{360^\circ} = \frac{\theta \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} \Rightarrow \theta = \frac{40 \times 2\pi}{360} = \frac{80\pi}{360} = \frac{2\pi}{9} \text{ rad, soit} \approx 0{,}7 \text{ rad.}$$

#1 Trouvez l'équivalence, en degrés ou en radians, selon le cas, de chacun des angles suivants.

a) 120°

$$\frac{120^\circ}{180^\circ} = \frac{\theta}{\pi}$$

$$\theta = \frac{120\pi}{180}$$

$$\theta = 2\pi/3 \text{ rad}$$

b) 2π rad

$$n = 360^\circ$$

c) 45°

$$\frac{45^\circ}{180^\circ} = \frac{\theta \text{ rad}}{\pi}$$

$$\theta = \frac{45\pi}{180}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

d) $\frac{3\pi}{2}$ rad

$$\frac{n^\circ}{180^\circ} = \frac{3\pi/2}{\pi}$$

$$n^\circ = \frac{\frac{3\pi}{2} \cdot 180}{\pi}$$

$$n^\circ = 270^\circ$$

e) 30°

$$\frac{30}{180^\circ} = \frac{\theta}{\pi \text{ rad}}$$

$$\theta = \frac{30\pi}{180}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

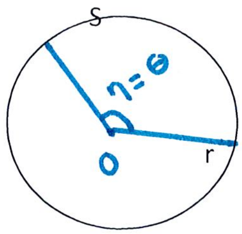
f) $\frac{7\pi}{6}$ rad

$$\frac{n^\circ}{180^\circ} = \frac{7\pi/6}{\pi}$$

$$n^\circ = \frac{\frac{7\pi}{6} \cdot 180}{\pi}$$

$$n^\circ = 210^\circ$$

Longueur d'un arc en unités de longueur



S : longueur de l'arc

r : rayon

n : angle en radian (θ)

On a vu en géométrie la formule suivante pour trouver la longueur d'un arc : $\frac{S}{circ} = \frac{\text{angle au centre}}{360°}$

$$\frac{S}{2\pi r} = \frac{\alpha}{360°}$$

Remplaçons α par n ou θ radians et 360º par 2π

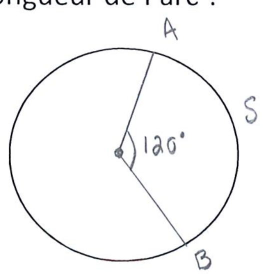
Et voici la relation qui permettra de trouver la longueur d'un arc si l'angle au centre est en radians :

$$\boxed{S = \overset{\theta}{n} \cdot r}$$

n → en radians

Exemple :

Un angle au centre de 120 ° intercepte un arc dans un cercle de 24 cm de rayon. Quelle est la longueur de l'arc ?



1) Trouve θ

$$\frac{120°}{360} = \frac{\theta}{2\pi}$$

$$\theta = \frac{120 \cdot 2\pi}{360}$$

$$\theta = 2\pi/3$$

2) Trouve S

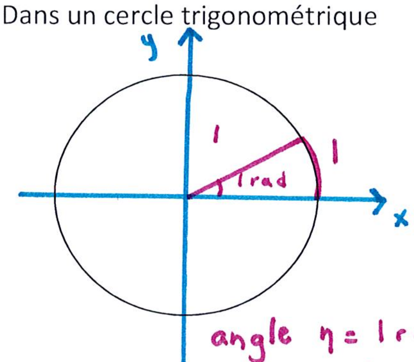
$$S = \theta \cdot r$$

$$S = \frac{2\pi}{3} \cdot 24$$

$S = 16\pi$ cm ou 50,27 cm

En résumé, un radian est la mesure d'un angle **au centre qui intercepte un arc qui vaut la même mesure que le** rayon

1. Dans un cercle trigonométrique

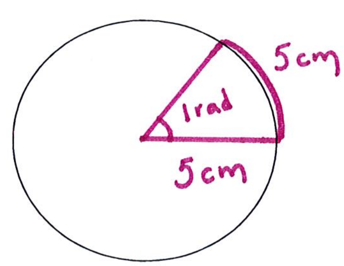


angle n = 1 rad

rayon = 1 unité

$S = n \cdot r$ = 1 unité

2. Hors du cercle trigonométrique



angle n = 1 rad

rayon = 5 cm

$S = n \cdot r$

S = 5 cm

#2 Déterminez la longueur de l'arc intercepté par chacun des angles au centre suivants, en tenant compte de la mesure du rayon indiquée.

a) $\theta = \frac{11\pi}{6}$ rad

$r = 3$ cm

b) $\theta = \pi$ rad

$r = 21$ dm

c) $\eta = 75°$

$r = 5{,}2$ mm

$S = \theta \cdot r$

$S = \frac{11\pi}{6} \cdot 3$

$S = \frac{22\pi}{3}$ cm

ou 17,28 cm

$S = \theta \cdot r$

$S = \pi \cdot 21$

$S = 21\pi$ dm

ou

65,97 dm

1) Trouve θ :

$\frac{75°}{180} = \frac{\theta}{\pi}$

$\theta = \frac{75\pi}{180}$

$\theta = \frac{5\pi}{12}$

2) $S = \theta \cdot r$

$S = \frac{5\pi}{12} \cdot 5{,}2$

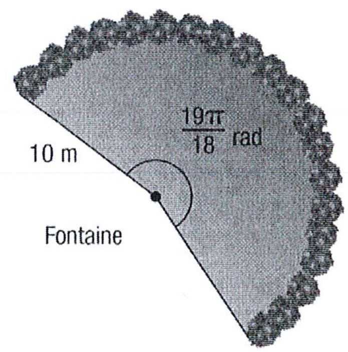
$S = 6{,}81$ mm

#3

L'aménagement paysager illustré ci-contre est tel que chaque cèdre qui compose la haie est situé à égale distance de la fontaine.

a) Quelle est la longueur de cette haie?

b) Combien coûte l'aménagement de cette haie si un cèdre coûte 4,50 $ et qu'on plante un cèdre tous les 30 cm? ⇒ 0,3 m



a) $S = \theta \cdot r$

$S = \frac{19\pi}{18} \cdot 10$

$S = \frac{190\pi}{18} = 33{,}16$ m

La haie mesure 33,16 m

b) Trouve le nb de cèdres : x

$\frac{1 \text{ cèdre}}{0{,}3 \text{ m}} = \frac{x}{33{,}16}$

$x = 110{,}5\overline{3}$ donc 110 cèdres

Coût :

$110 \cdot 4{,}50 = 495$ $

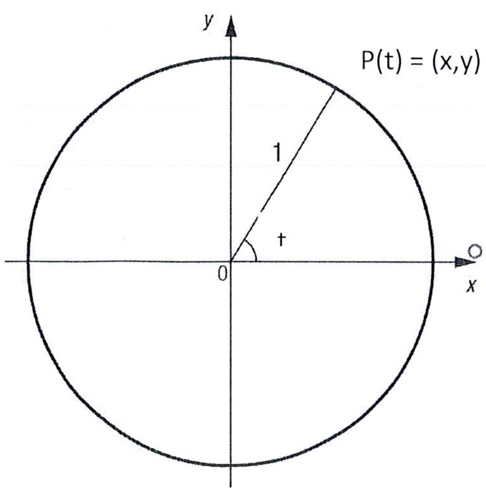
pour la haie.

CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

Le **cercle trigonométrique** est un cercle centré à l'origine du plan cartésien dont le rayon est de 1 unité. Son équation est : $\boxed{x^2 + y^2 = 1}$

Dans le cercle trigonométrique :

- lorsqu'on applique une rotation autour de l'origine de la partie positive de l'axe des abscisses, l'angle de rotation(t) correspond à un angle trigonométrique. L'angle de rotation (t) est exprimé en radian. T est le mesure de l'angle au centre.
- un angle trigonométrique peut être positif (sens de rotation antihoraire) ou négatif (sens de rotation horaire) ;
- Le point P(t) =(x, y) est un point trigonométrique, car il est sur le cercle. On peut vérifier qu'un point quelconque est un point trigonométrique en vérifiant l'équation du cercle.



Un tour complet vaut 360° ou 2π

Un demi-tour vaut 180° ou π

Un quart de tour vaut 90° ou $\pi/2$

#1 Vérifier si les points suivants sont des points trigonométriques ?

a) $\left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$

$x^2 + y^2 = 1$

$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{-12}{13}\right)^2 \stackrel{?}{=} 1$

$\frac{169}{169} = 1$ Donc oui !

b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \stackrel{?}{=} 1$

$\frac{2}{4} \neq 1$ NON !

#2 Sachant que le point suivant $\left(\frac{1}{3}, y\right)$ est un point trigonométrique trouve la valeur de y.

$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = 1$

$y^2 = 1 - \frac{1}{9}$

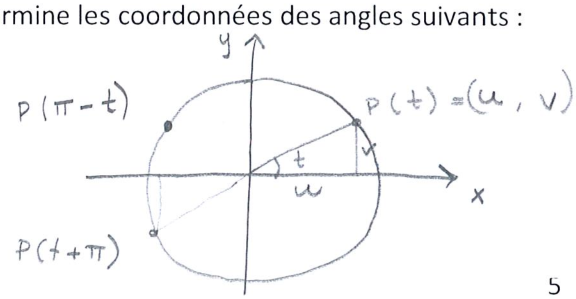
$y^2 = \frac{8}{9}$

$y = \frac{\pm\sqrt{8}}{3}$

$y = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

#3 Sachant que P(t) = (u, v) est un point trigonométrique. Détermine les coordonnées des angles suivants :

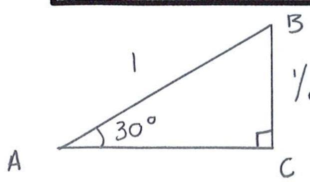
a) $P(t + 2\pi) = (u, v)$
b) $P(t + 4\pi) = (u, v)$
c) $P(t + \pi) = (-u, -v)$
d) $P(\pi - t) = (-u, v)$



Coordonnées des points trigonométriques :

Avant de déterminer les points dits remarquables du cercle trigonométrique, regardons ces deux rappels :

Dans tout triangle rectangle, le côté opposé à l'angle de 30° vaut la moitié de l'hypoténuse.



$m\,\overline{AB} = 1$ donc $m\,\overline{BC} = 1/2$

1) Trouve $m\,\overline{AC}$:

$m\,\overline{AB}^2 = m\,\overline{BC}^2 + m\,\overline{AC}^2$

$1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + m\,\overline{AC}^2$

$1 - \frac{1}{4} = m\,\overline{AC}^2$

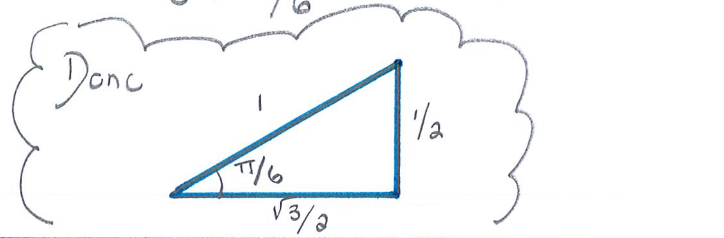
$\frac{3}{4} = m\,\overline{AC}^2$

$m\,\overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

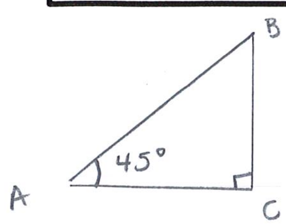
2) Convertir 30° en rad : $\left(\frac{1}{3} \text{ de } 90° \text{ donc } \frac{1}{3} \text{ de } \frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{30°}{180°} = \frac{\theta}{\pi}$

$\theta = \pi/6$



Tout triangle rectangle ayant un angle de 45° est un triangle isocèle.



$m\,\overline{AB} = 1 \quad m\,\overline{BC} = m\,\overline{AC}$

1) Trouve $m\,\overline{AC}$ et $m\,\overline{BC}$

$m\,\overline{AB}^2 = m\,\overline{BC}^2 + m\,\overline{AC}^2$

$1^2 = x^2 + x^2$

$\frac{1}{2} = \frac{2x^2}{2}$

$x = \sqrt{\frac{1}{2}}$

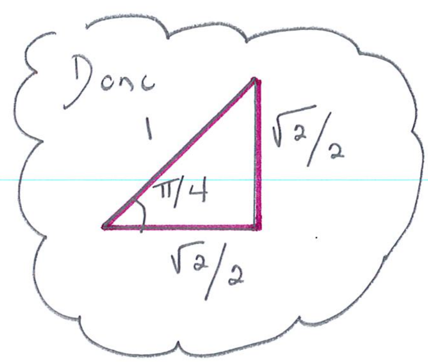
Donc $m\,\overline{AC}$ et $m\,\overline{BC}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

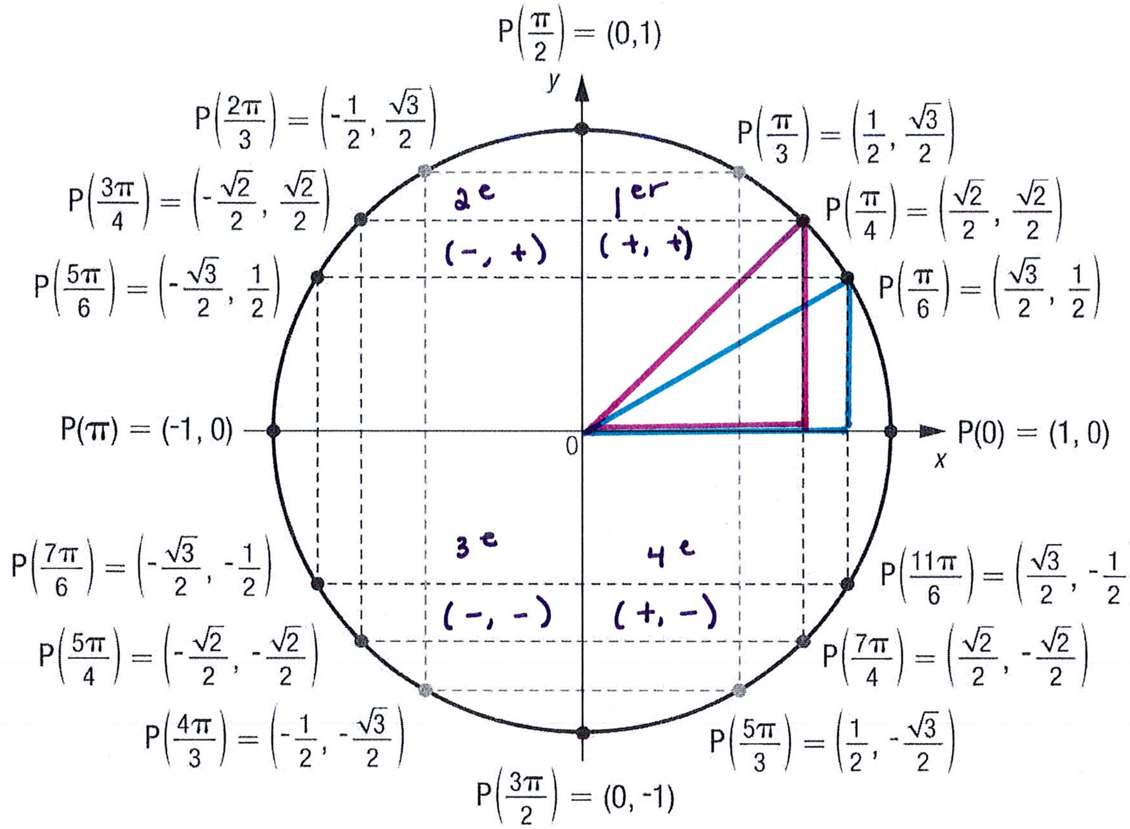
2) Convertir 45° en radian

= la moitié de 90°

donc $\pi/4$!



Il est possible de représenter dans un même cercle trigonométrique les principaux points trigonométriques ainsi que leurs coordonnées.



1. Indiquez le quadrant où se trouve chacun des points trigonométriques suivants :

a) $P\left(\frac{\pi}{6}\right)$: 1er

c) $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$: 2e

b) $P\left(\frac{\pi}{2}\right)$

entre le 1er
et le 2e

d) $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: 4e

2. Déterminez les coordonnées exactes des points trigonométriques suivants :

a) $P\left(\frac{11\pi}{6}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

b) $P\left(\frac{\pi}{4}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $P\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$(0, 1)$

d) $P\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

e) $P\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
$\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

f) $P\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = P\left(\frac{5\pi}{4}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

g) $P\left(\frac{13\pi}{6}\right) = P\left(\frac{\pi}{6}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

h) $P\left(\frac{11\pi}{4}\right) = P\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

i) $P\left(\frac{-9\pi}{4}\right) = P\left(\frac{7\pi}{4}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3. Déterminez la mesure de l'angle au centre qui passe par les points suivants :

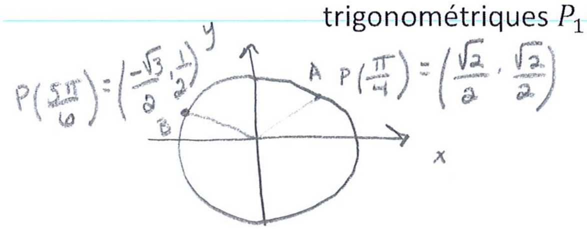
a) $P(t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $0 < t < 2\pi$
$t = \frac{\pi}{3}$

b) $P(t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $0 < t < 4\pi$
$t \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right\}$

c) $P(t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $-2\pi < t < 0$
$t = -\frac{5\pi}{3}$

d) $P(t) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et $-2\pi < t < 0$
$t = -\frac{5\pi}{6}$

4. Un plan cartésien est superposé à l'écran radar d'une contrôleuse aérienne où l'origine du plan correspond à la tour de contrôle. La contrôleuse aperçoit à l'écran deux avions situés sur des points respectivement associés aux points trigonométriques $P_1\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ et $P_2\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Quelle distance sépare les deux avions ?



$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$d(A,B) = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$d(A,B) = 1,5867$ Km

Donc environ 1,59 Km de distance entre les deux avions.

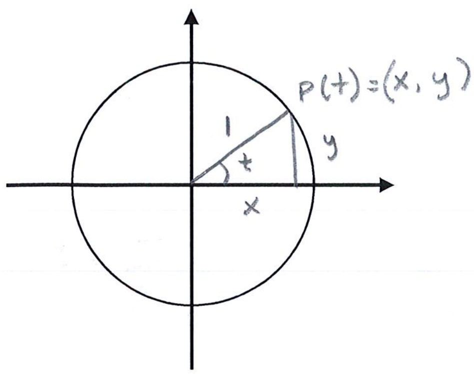
Les fonctions sinus, cosinus et tangente :

Fonction sinus :

Rappel : sin t = $\dfrac{\text{mesure du côté opposé à l'angle } t}{\text{mesure de l'hypoténuse}}$

Dans un cercle trigonométrique, comme l'hypoténuse vaut toujours 1, le sinus de l'angle vaut la mesure du côté opposé à l'angle t **donc la coordonnée en y du point trigonométrique !!**

P(t) = P(x, y) ⇒ y = sin t et $-1 \leq \sin t \leq 1$



#1 Déterminez la valeur exacte des sinus suivants :

a) $sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad P\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) $sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $\qquad P\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$

c) $sin\left(\frac{26\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \frac{26\pi}{3} = \frac{27\pi}{3} - \frac{\pi}{3}$

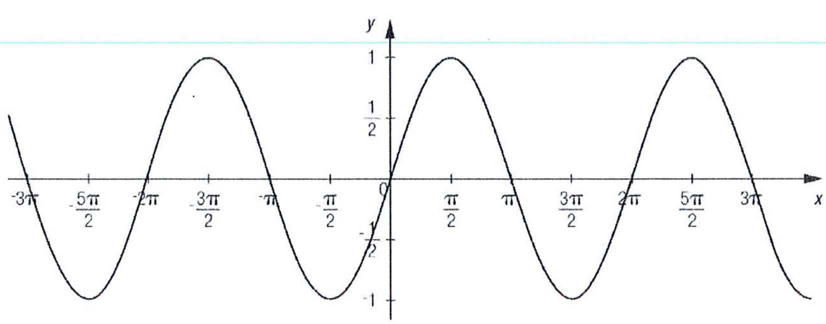
donc $9\pi - \frac{\pi}{3}$

$P\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\qquad P\left(\frac{26\pi}{3}\right) = P\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Pour tracer le graphique de la fonction sinus, il suffit de prendre des valeurs du cercle trigonométrique :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	etc...
y	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	

Voici le graphique de la fonction sinus



Propriétés de la fonction sinus :

Domaine : $\mathbb{R}$ Image : $[-1, 1]$

Les zéros de la fonction dans l'intervalle $[0,2\pi]$: $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$

Le signe dans l'intervalle $[0,2\pi]$: $f(x) \geq 0 \quad x \in [0, \pi]$

$f(x) \leq 0 \quad x \in [\pi, 2\pi]$

Les extrémums : max : 1

min : -1

La variation dans l'intervalle $[0,2\pi]$:

croissance : $x \in [0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi]$

décroissance : $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$

La période : 2π **(la longueur du cycle)**

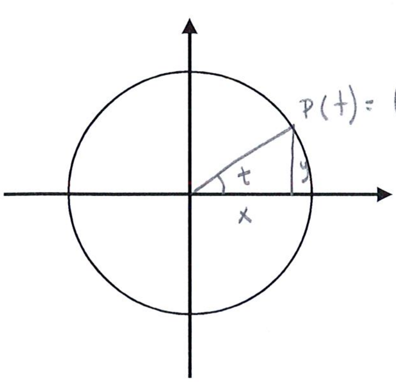
L'amplitude : 1 **(« la hauteur de la bosse » donnée par valeur max – valeur min)**

Fonction cosinus :

Rappel : cos t = $\dfrac{\text{mesure du côté adjacent à } \angle t}{\text{mesure de l'hypoténuse}}$

Dans un cercle trigonométrique, comme l'hypoténuse vaut toujours 1, le cosinus de l'angle vaut la mesure du côté adjacent à l'angle t **donc la coordonnée en x du point trigonométrique !!**

P(t) = P(x, y) ⇨ x = cos t et $-1 \leq \cos t \leq 1$



#1 Déterminez la valeur exacte des cosinus suivants :

a) $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$P\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$P\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

c) $\cos\left(\frac{10\pi}{4}\right) = 0$

$\frac{8\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$

$P\left(\frac{10\pi}{4}\right) = P\left(\frac{\pi}{2}\right)$