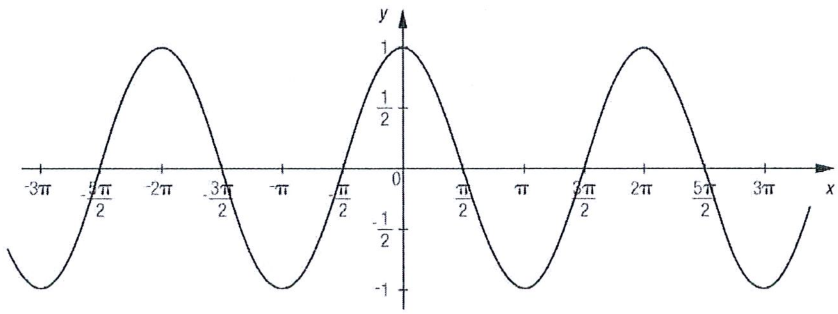
Pour tracer le graphique de la fonction cosinus, il suffit de prendre des valeurs du cercle trigonométrique :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$
y	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0

etc

Voici le graphique de la fonction cosinus



Propriétés de la fonction cosinus :

Domaine : $\mathbb{R}$ Image : $[-1, 1]$

Les zéros de la fonction dans l'intervalle $[0,2\pi]$: $x = \pi/2$, $x = 3\pi/2$

Le signe dans l'intervalle $[0,2\pi]$: $f(x) \geq 0 \quad x \in [0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi]$

$f(x) \leq 0 \quad x \in [\pi/2, 3\pi/2]$

Les extrémums : max : 1

min : -1

La variation dans l'intervalle $[0,2\pi]$:

croissance : $x \in [\pi, 2\pi]$

décroissance : $x \in [0, \pi]$

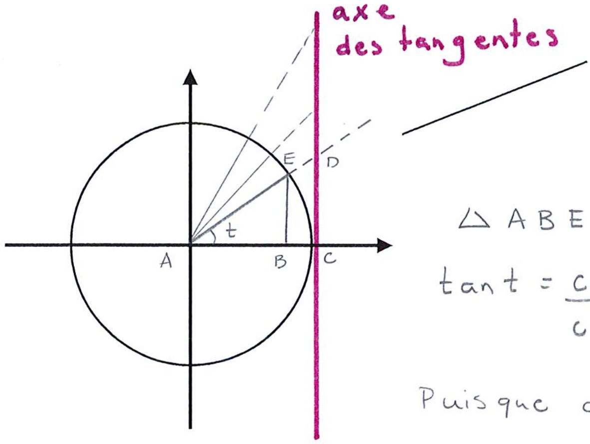
La période : 2π **(la longueur du cycle)**

L'amplitude : 1 **(« la hauteur de la bosse » donnée par valeur max – valeur min)**

Fonction tangente

Rappel : tan t = $\dfrac{\text{mesure du côté opposé à } \angle t}{\text{mesure du côté adjacent à } \angle t}$ donc $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin t}{\cos t}$

Soit un point trigonométrique de coordonnées $(x, y) \Leftrightarrow (\cos t, \sin t)$ alors tan t = $\dfrac{\sin t}{\cos t}$



La valeur de la tangente correspond à la mesure du segment limité par l'axe des x et le prolongement du rayon !

$\triangle ABE \sim \triangle ACD$ (Par AA)

$\tan t = \dfrac{c.o}{c.a} = \dfrac{c.o_p}{c.a_p} = \dfrac{c.o_g}{c.a_g}$

Puisque dans le grand $\triangle$ ($\triangle ADC$) la m c a = 1

alors $\tan t = \dfrac{c.o_g}{1}$ donc $\tan t = m\overline{DC}$

#1 Déterminez la valeur exacte des tangentes suivantes :

a) $\tan(0) = \dfrac{0}{1} = 0$

$P(0) = (1, 0)$

b) $tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$P\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

c) $tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

$P\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

d) $tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2}{1} = \sqrt{3}$

$P\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

e) $tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{0}$ = indéterminée → Donc asymptote

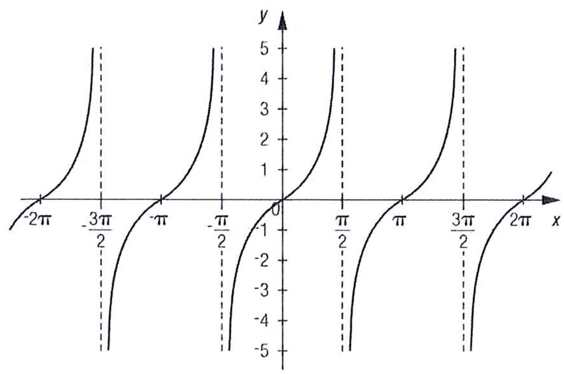
$P\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$

Nous avons donc

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
y	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	ind	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

etc

Voici le graphique de la fonction tangente



Propriétés de la fonction tangente :

Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ Image : $\mathbb{R}$

Les zéros de la fonction dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: $x = 0$

Le signe dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: $f(x) \geq [0, \pi/2[$

$f(x) \leq]-\pi/2, 0]$

Les extrémums : aucun.

La variation dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: croissante $\forall x \in$ dom

La période : π **(la longueur du cycle)**

L'amplitude : — **(« la hauteur de la bosse » donnée par valeur max – valeur min)**

Les asymptotes dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: $x = -\pi/2$ et $x = \pi/2$

Opérations sur les fonctions :

On peut faire des opérations sur les fonctions trigonométriques. Soit le point $P\left(\frac{\pi}{6}\right)$, calcule :

$P(\pi/6) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

a) $cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

c) $sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - cos\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

d) $sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2\,cos\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{4} - \frac{4\sqrt{3}}{4} = \frac{1-4\sqrt{3}}{4}$

Les réciproques :

La réciproque de la fonction sinus noté : arcsin ou sin^{-1}

Permet de déterminer la valeur de l'angle si l'on connaît la valeur des ordonnées des points.

Ex : arcsin 1 = $\frac{\pi}{2}$ car $P\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$

La réciproque de la fonction cosinus noté : arc cos ou cos^{-1}

Permet de déterminer la valeur de l'angle si l'on connaît la valeur des abscisses des points.

Ex : arccos $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4}$ car $P\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $P\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

La réciproque de la fonction tangente noté : arctan ou $\tan^{-1}$

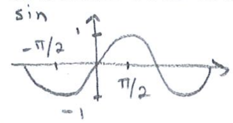
Permet de déterminer la valeur de l'angle si l'on connaît la valeur du rapport des ordonnées et des abscisses des points.

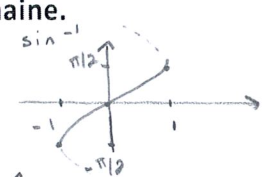
Ex. $\arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{7\pi}{6}$ car $P\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $P\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2}\right)$

Attention, la réciproque des fonctions sinus, cosinus et tangentes ne sont pas toujours des fonctions. Pour qu'elles le soient, nous devons limiter le domaine et le codomaine.

cadran 1 et 4

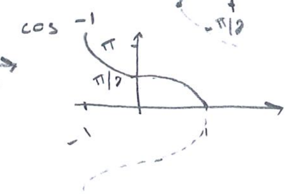
Fonction sinus : restrictions : $x \in [-1, 1]$ et $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$





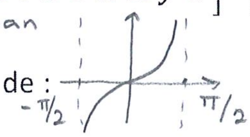
cadran 1 et 2

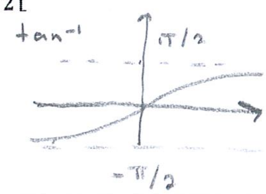
Fonction cosinus : restrictions : $x \in [-1, 1]$ et $y \in [0, \pi]$



cadran 1 et 4

Fonction tangente : restrictions : $x \in R$ et $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$





#1 Déterminez la valeur exacte de :

a) $\tan(arc\ sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$=

1) Evalue

$arc\ sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

(Restriction)

2) $\tan \pi/3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$

Rép : $\sqrt{3}$

b) $\sin(\arctan(-1) + arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right))$=

1) $arc\tan -1 = \frac{-\pi}{4}$

2) $arc\cos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$

3) $\sin\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right)$

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$

Rép : 1

#2 Résous l'équation $\cos(\arctan x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

1) $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$t = \pi/6$ ou $t = 11\pi/6$

(ou $\frac{-\pi}{6}$)

*On prendra $-\pi/6$ à cause de la restriction pour arctan !

2) $arc\tan x = \pi/6$ ou $arc\tan x = -\pi/6$

$x = \frac{1}{2} \div \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$

$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$x = -\sqrt{3}/3$

Rép : $x = \frac{\pm\sqrt{3}}{3}$

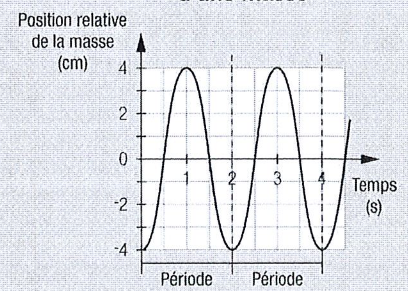
FONCTION PÉRIODIQUE

- Une fonction est dite périodique lorsque sa représentation graphique est constituée d'un « motif » qui se répète.
- L'écart entre les abscisses situées aux extrémités de ce « motif » correspond à la période de la fonction. P = durée d'un cycle
- Les fonctions sinus, cosinus et tangente sont des fonctions périodiques.

Ex. : Le comportement d'une masse suspendue à un ressort qui oscille verticalement sans friction peut être modélisé par une fonction périodique.

D'après ce graphique, on déduit que la masse revient à sa position initiale toutes les 2 s. La période de la fonction est donc de 2 s.

Oscillation d'une masse

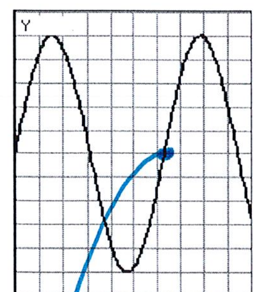


FONCTION SINUSOÏDALE

Une **fonction sinusoïdale** est une fonction périodique dont la règle peut s'écrire sous la forme $f(x) = a\sin b(x - h) + k$ ou $f(x) = a\cos b(x - h) + k$, où $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Pour une fonction sinusoïdale :

- l'amplitude A est déterminée par $\frac{\max f - \min f}{2}$ et correspond à la valeur absolue du paramètre a ;
- la période p est déterminée par $\frac{2\pi}{|b|}$;
- un cycle correspond graphiquement à la plus petite portion de la courbe associée au motif qui est répété.

Lorsque la courbe d'une fonction est continue, le point qui fait la transition entre une partie de la courbe qui monte (descend) de plus en plus rapidement et une autre partie de la courbe qui monte (descend) de moins en moins rapidement, ou vice versa, correspond à un **point d'inflexion.**



pt d'inflexion

$|a|$ = Amplitude

$b = \frac{2\pi}{P}$

h : déplacement horizontal

k : déplacement vertical

En vous basant sur les règles des fonctions trigonométriques suivantes, déterminez, dans chaque cas :

1) l'amplitude de la fonction ;
2) la période de la fonction ;
3) le minimum et le maximum de la fonction.

a) $f(x) = 3\sin 2(x - \pi) + 4$

1) $A = 3$

2) $P = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$(h = \pi, k = 4)$

3) $\max = 4 + 3 = 7$

$\min = 4 - 3 = 1$

b) $g(x) = -2\cos \frac{\pi}{3}(x + 5) + 1$

1) $A = |-2| = 2$

2) $p = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$

$(h, k) = (-5, 1)$

3) $\max = 1 + 2 = 3$

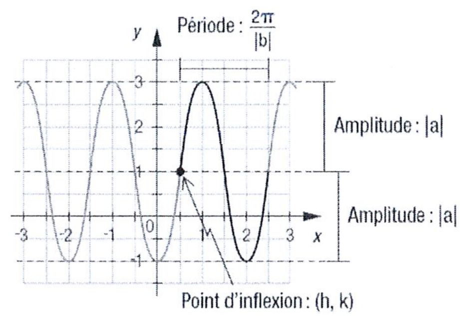
$\min = 1 - 2 = -1$

Dans la représentation graphique d'une fonctions sinus dont la règle s'écrit

$f(x) = \mathrm{a} \sin b\,(x - h) + k$, *(h , k)* **sont les coordonnées d'un point d'inflexion de la courbe**

* a est positif si le pt d'inflexion choisit précède une montée.

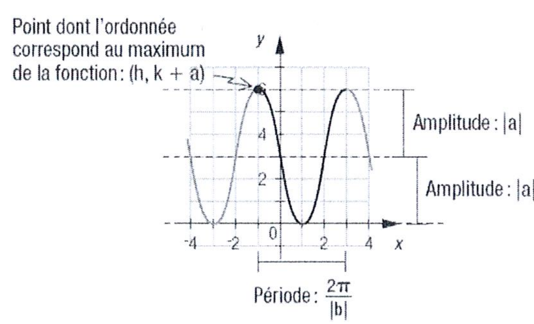
Ex. :

Règle	Table de valeurs	Représentation graphique
$f(x) = 2\sin\pi\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1$ A = 2 $P = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ (h, k) = $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ↳ pt de départ max = k+A = 3 min = k-A = -1	x: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 y: 3, -1, 3, -1, 3, -1, 3	 La portion de courbe tracée en rouge correspond à un cycle de la fonction.

x	y
-3	3
-2	-1
-1	3
0	-1
1	3
2	-1
3	3

Dans la représentation graphique d'une fonction cosinus dont la règle s'écrit $f(x) = \mathrm{a}\cos \mathrm{b}(x - \mathrm{h}) + \mathrm{k}$, (h, k $\pm$ a) sont les coordonnées d'un point associé à un extremum de la fonction.

Ex. :

Règle	Table de valeurs	Représentation graphique
$f(x) = 3\cos\frac{\pi}{2}(x + 1) + 3$ A = 3 $P = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4$ (h, k) = (-1, 3) max = 6 min = 0	x: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 y: 3, -1, 3, -1, 3, -1, 3	 La portion de courbe tracée en rouge correspond à un cycle de la fonction.

x	y
-3	3
-2	-1
-1	3
0	-1
1	3
2	-1
3	3

→ Fct cos ! Donc le (h, k) est vis-à-vis soit un max ou un min !

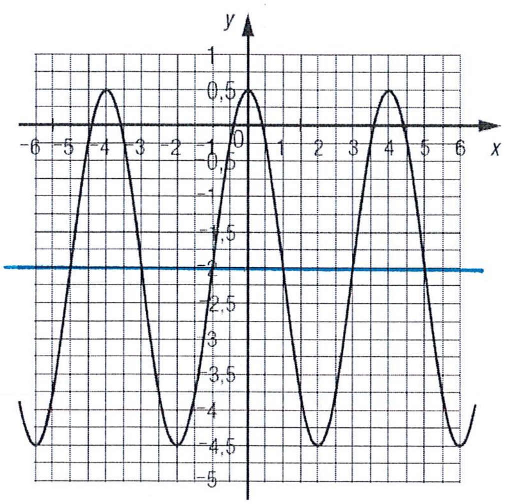
si a > 0 → max

a < 0 → min

Répondez aux questions suivantes en fonction de chacun des graphiques ci-dessous.

1) Quelle est la période (p) de cette fonction ?
2) À l'aide de l'égalité $p = \frac{2\pi}{|b|}$, déterminez la valeur du paramètre b.
3) Quelle est l'amplitude (A) de cette fonction ?
4) À l'aide de l'égalité $A = |a|$, déterminez la valeur du paramètre a.
5) Quelles sont les coordonnées d'un point (h, k) ?
6) Quelle est la règle de cette fonction ? Voir p. 17

a)



1) $p = 4$

2) $|b| = \frac{2\pi}{p}$ $\quad |b| = \frac{2\pi}{4}$ $\quad b = \pi/2$

3) $A = \frac{max - min}{2}$ $\quad A = \frac{0,5 - -4,5}{2} = 2,5$

4) $A = |a|$ donc $a = 2,5$

5) $(h, k) = (-1, -2)$

6) $f(x) = 2,5 \sin\left(\pi/2\,(x+1)\right) - 2$

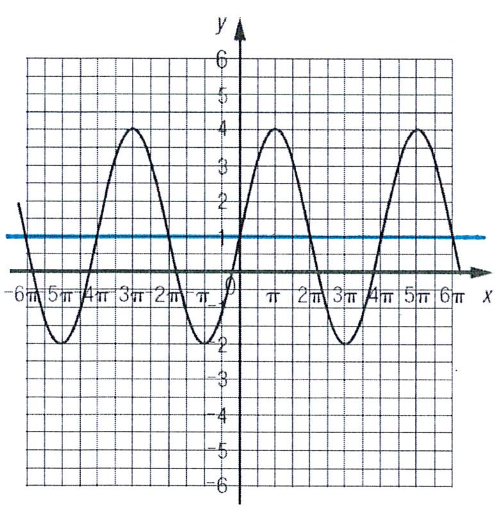
ou $f(x) = -2,5 \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) - 2$ ou $f(x) = 2,5 \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) - 2$

pt de départ (0, 0,5) max alors a+

h = 0

k = −2

b)



1) $p = 4\pi$

2) $|b| = 2\pi/4\pi$ $\quad b = 1/2$

3) $A = \frac{4 - -2}{2} = 3$

4) $a = 3$

5) $(h, k) = (0, 1)$

6) $f(x) = 3 \sin\left(\frac{1}{2} x\right) + 1$

ou

$f(x) = 3 \cos\left(\frac{1}{2}(x - \pi)\right) + 1$ pt de départ $(\pi, 4)$

ou

$f(x) = -3 \cos\left(\frac{1}{2}(x + \pi)\right) + 1$ pt de départ $(-\pi, -2)$

c'est un min alors a −

En vous basant sur les fonctions trigonométriques suivantes, déterminez, dans chaque cas :

1) l'amplitude de la fonction ;
2) la période de la fonction ;
3) le minimum et le maximum de la fonction.

a) $f(x) = {}^{-}6 \sin 3(x - 7) + 9$

1) A = 6

2) p = 2π/|b| p = 2π/3

3) min = 9 - 6 = 3

max = 9+6 = 15

b) $g(x) = {}^{-}\cos 4\pi(x - 1) + 5$

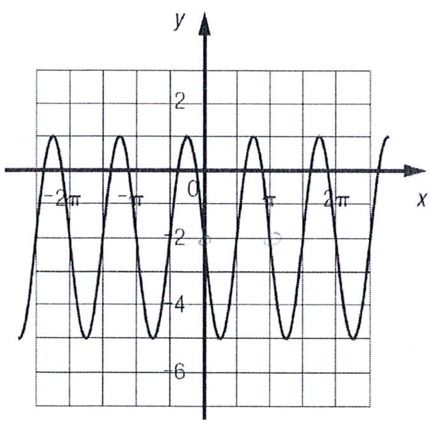
1) A = 1

2) P = 1/2

3) min = 5 - 1 = 4

max = 5 + 1 = 6

e)



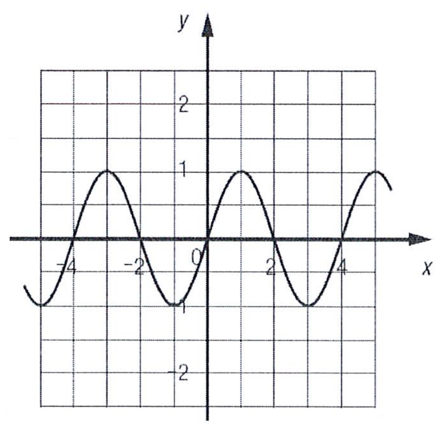
1) A = 3

2) p = π

3) min = -5

max = 1

f)



1) A = 1

2) p = 4

3) min = -1

max = 1

Tracez le graphique de chacune des fonctions trigonométriques suivantes.

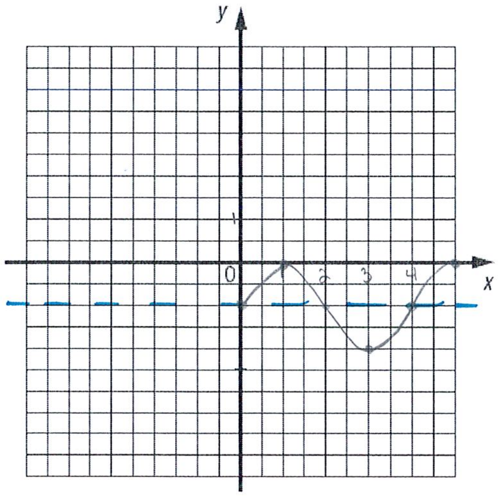
a) $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}(x - 4) - 1$

$A = 1$

$P = \dfrac{2\pi}{\pi/2} = 4$

$h = 4$

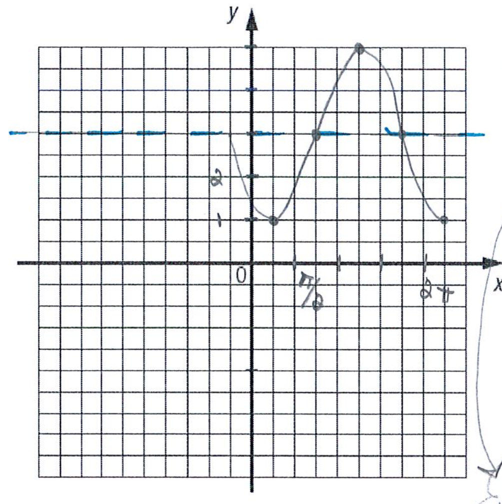
$k = -1$



fct sin avec a +

cycle : 0, max, 0, min

b) $g(x) = -2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$



$A = 2$

$P = 2\pi$

$(h, k) = \left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$

pt de départ

$\left(\frac{\pi}{4}, 3 + -2\right)$

$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

ou Fct cos donc le (h, k) est vis à vis un max ou un min !

fct cos avec a −

cycle : min, 0, max, 0, min

a ⊖ donc un min !

d) $i(x) = 5 \cos \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$

$A = 5$

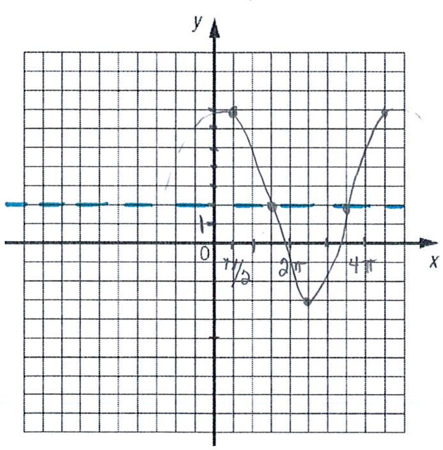
$P = 4\pi$

$(h, k) = \left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$

pt de départ

$\left(\frac{\pi}{2}, 7\right)$

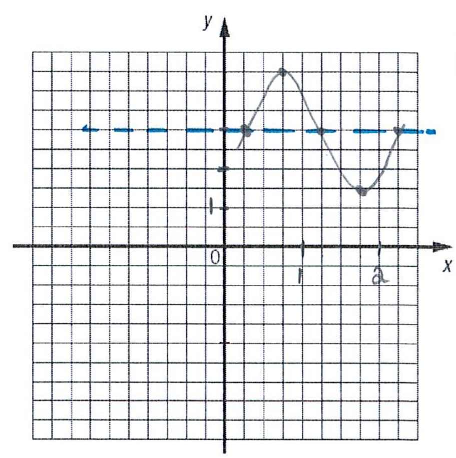
Fct cos ! Donc h, k est vis à vis un max ou un min ! a > 0 donc un max



fct cos avec a +

cycle : max, 0, min, 0, max

e) $j(x) = 1{,}5 \sin \pi(x - 0{,}25) + 3$



$A = 1{,}5$

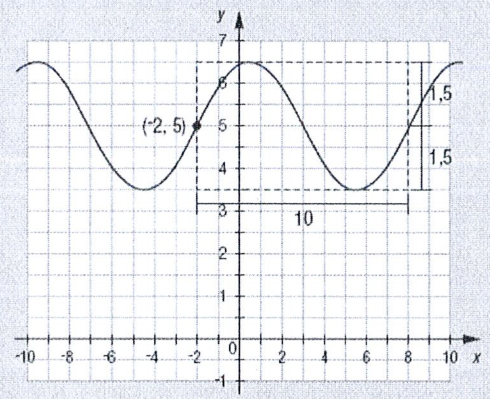
$P = 2$

(h, k)

$(0{,}25, 3)$

RECHERCHE DE LA RÈGLE D'UNE FONCTION SINUSOÏDALE

Il est possible de déterminer la règle d'une fonction sinusoïdale, dont la règle s'écrit $f(x) = a\sin b(x - h) + k$ ou $f(x) = a\cos b(x - h) + k$, de la façon suivante.

1. Identifier un cycle de la fonction dont le point de départ est associé aux paramètres h et k, et délimiter ce cycle à l'aide d'un rectangle dont la base correspond à la période p et la hauteur, au double de l'amplitude A.	Ex. :  En considérant que la règle recherchée est celle d'une fonction sinus, les coordonnées du point de départ du cycle identifié sont (-2, 5), la période est 10 et l'amplitude est 1,5.	
2. Déduire la valeur des paramètres a et b selon le cycle identifié. Fct sin : a > 0 si le (h, k) choisit précède une montée.	$A = 1{,}5$ $\lvert a\rvert = 1{,}5$ $a = \pm 1{,}5$ D'après le cycle identifié, on déduit que $a = 1{,}5$.	$p = \frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$ $10 = \frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$ $b = \pm\frac{\pi}{5}$ D'après le cycle identifié, on déduit que $b = \frac{\pi}{5}$.
3. Déterminer la valeur des paramètres h et k.	Puisque les coordonnées du point de départ du cycle identifié sont (-2, 5) la valeur de h est -2 et celle de k est 5.	
4. Écrire la règle de la fonction obtenue.	$f(x) = 1{,}5\sin\frac{\pi}{5}(x + 2) + 5$ On note que la règle de cette fonction pourrait aussi s'écrire $f(x) = 1{,}5\cos\frac{\pi}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right) + 5$.	

Fct cos : a > 0 si le (h, k) choisit est vis-à-vis un maximum.

En résumé :

1. Trouve l'amplitude et la période

2. **k** est sur la ligne au milieu des bosses

3. **h** est sur la courbe pour une **fonction sinus**. S'il précède une montée alors a +

   h est vis-à-vis un max ou un min pour la **fonction cosinus** . S'il est vis-à-vis un max alors a +

   Il y a plusieurs réponses possibles, car la fonction dépend du (h, k) choisit !!