Préalables aux vecteurs

Trigonométrie

Rapports trigonométriques, Loi des sinus, loi des cosinus et formule de Héron

SN-5

RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

La **trigonométrie** est l'étude des relations entre les angles et les côtés d'un triangle.

Un **rapport trigonométrique** est un nombre qui exprime un rapport de mesures des longueurs.

Dans un triangle rectangle, les trois principaux rapports trigonométriques sont :

$$\sin A = \frac{\text{mesure de la cathète opposée à } \angle A}{\text{mesure de l'hypoténuse}}$$

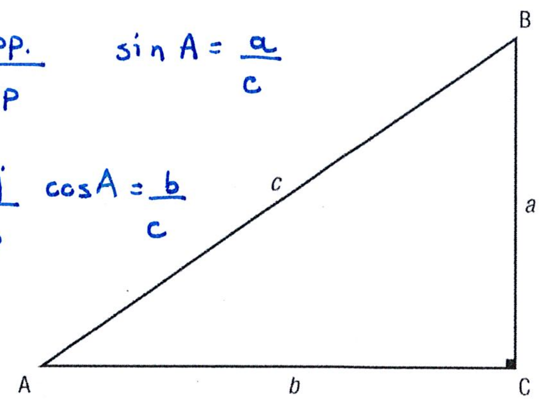
$\sin A = \frac{opp.}{hyp}$ $\sin A = \frac{a}{c}$

$$\cos A = \frac{\text{mesure de la cathète adjacente à } \angle A}{\text{mesure de l'hypoténuse}}$$

$\cos A = \frac{adj}{hyp}$ $\cos A = \frac{b}{c}$

$$\tan A = \frac{\text{mesure de la cathète opposée à } \angle A}{\text{mesure de la cathète adjacente à } \angle A}$$

$\tan A = \frac{opp}{adj}$ $\tan A = \frac{a}{b}$



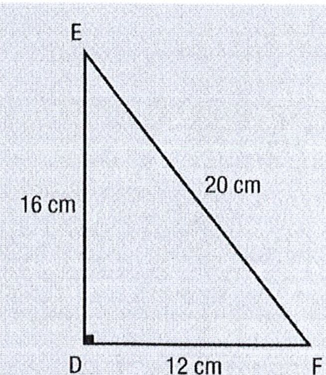
« Sin », « cos » et « tan » signifient respectivement sinus, cosinus et tangente.

Ex. : Dans le triangle DEF ci-contre :

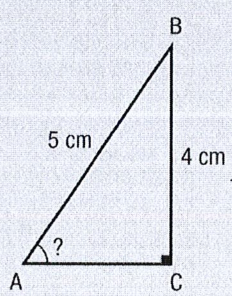
$\sin E = \frac{12}{20} = 0,6$ $\sin F = \frac{16}{20} = 0,8$

$\cos E = \frac{16}{20} = 0,8$ $\cos F = \frac{12}{20} = 0,6$

$\tan E = \frac{12}{16} = 0,75$ $\tan F = \frac{16}{12} = 1,\overline{3}$



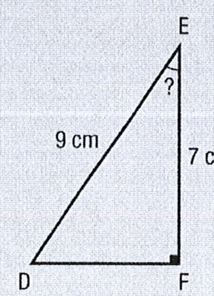
Ex. : Dans les triangles rectangles ci-dessous :



on a :

$\sin A = \frac{4}{5}$ et arc $\sin\frac{4}{5} \approx 53,13°$.

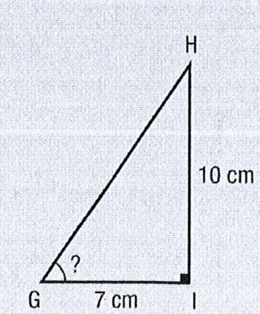
Donc, $m\angle A \approx 53,13°$.



on a :

$\cos E = \frac{7}{9}$ et arc $\cos\frac{7}{9} \approx 38,94°$.

Donc, $m\angle E \approx 38,94°$.



on a :

$\tan G = \frac{10}{7}$ et arc $\tan\frac{10}{7} \approx 55,01°$.

Donc, $m\angle G \approx 55,01°$.

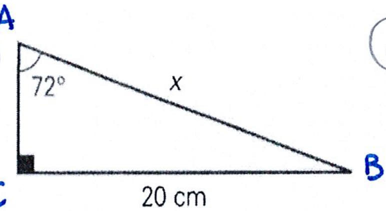
* Calculatrice en degré !

Exercice :

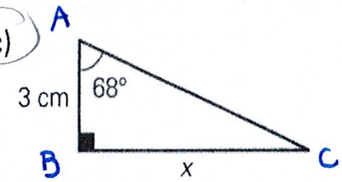
* « Nomme » tes triangles en ajoutant des lettres majuscules aux sommet

#1 Calcule la valeur demandée :

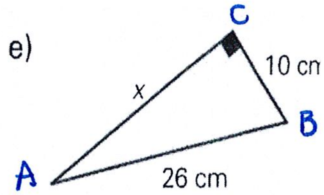
a)



c)



e)



a)

1) Je connais : m∠A et le côté opposé à ∠A

2) Je cherche : hypoténuse

3) Formule : $\sin A = \frac{opp}{hyp}$

$\sin 72° = \frac{20}{x}$

$x = \frac{20}{\sin 72°}$ $\qquad x = 21{,}03$ cm

c) $\tan A = \frac{opp}{adj}$

$\tan 68 = \frac{x}{3}$

$x = 3 \cdot \tan 68$

$x = 7{,}43$ cm

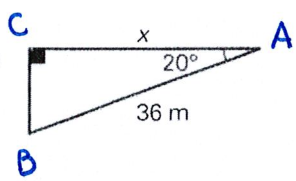
e) $c^2 = a^2 + b^2$

$26^2 = 10^2 + b^2$

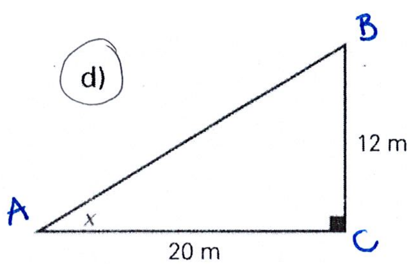
$\sqrt{576} = \sqrt{b^2}$

$24_{cm} = b$

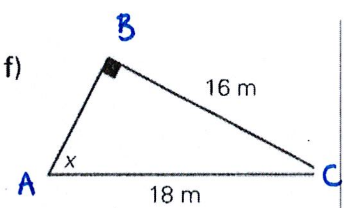
b)



d)



f)



b) 1) Je connais m∠A et l'hypoténuse

2) Je cherche : côté adjacent à ∠A

3) Formule : $\cos A = \frac{adj}{hyp}$

$\cos 20° = \frac{x}{36}$

$x = 36 \cdot \cos 20$

$x = 33{,}83$ m

d) $\tan A = \frac{opp}{adj}$

$\tan A = \frac{12}{20}$

$m\angle A = \tan^{-1}\left(\frac{12}{20}\right)$

$m\angle A = 30{,}96°$

f) $\sin A = \frac{opp}{hyp}$

$\sin A = \frac{16}{18}$

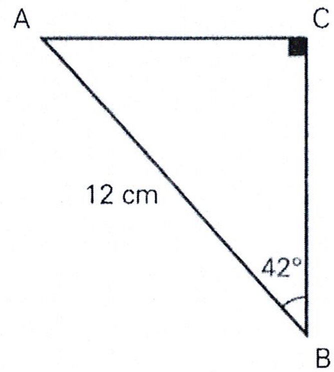
$m\angle A = \sin^{-1}\left(\frac{16}{18}\right)$

$m\angle A = 62{,}73°$

#2

Soit le triangle **ABC** rectangle en **C.**

Trouve les mesures manquantes des côtés et des angles de ce triangle.



1) Trouve $m\angle A$

$m\angle A = 180 - 42 - 90$

$m\angle A = 48°$

2) Trouve $m\overline{AC}$

$\sin B = \dfrac{opp}{hyp}$

$\sin 42° = \dfrac{m\overline{AC}}{12}$

$m\overline{AC} = 12 \cdot \sin 42°$

$m\overline{AC} = 8{,}03$ cm

3) Trouve $m\overline{BC}$

$\cos B = \dfrac{adj}{hyp}$

$\cos 42° = \dfrac{m\overline{BC}}{12}$

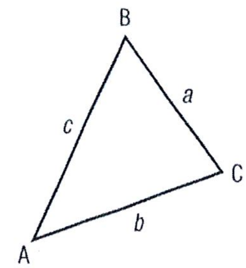
$m\overline{BC} = 12 \cdot \cos 42$

$m\overline{BC} = 8{,}92$ cm

RELATIONS DANS UN TRIANGLE QUELCONQUE

Loi des sinus

Il est possible de résoudre un triangle quelconque si l'on connaît les mesures d'un angle, de son côté opposé et d'un autre côté ou d'un autre angle de ce triangle.



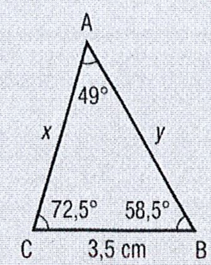
Les mesures des côtés d'un triangle sont proportionnelles au sinus des angles opposés à ces côtés. Dans le triangle ci-contre, on a :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Ex. : Dans le triangle ci-contre :

$$\frac{x}{\sin 58{,}5°} = \frac{3{,}5}{\sin 49°} = \frac{y}{\sin 72{,}5°}$$

- On a : $x = \frac{\sin 58{,}5° \times 3{,}5}{\sin 49°}$, soit $x \approx 3{,}95$ cm.
- On a : $y = \frac{\sin 72{,}5° \times 3{,}5}{\sin 49°}$, soit $y \approx 4{,}42$ cm.



Pratique

Résolvez le triangle ABC si :

b = 12,43 cm, c =25 cm et l'angle B mesure 22°

1) Trouve $m\angle C$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{25}{\sin C} = \frac{12,43}{\sin 22}$$

$$m\angle C = \sin^{-1}\left(\frac{25 \cdot \sin 22}{12,43}\right)$$

$m\angle C = 48,89$

2) $m\angle A = 180 - 48,89 - 22$

$m\angle A = 109,11$

3) trouve a :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

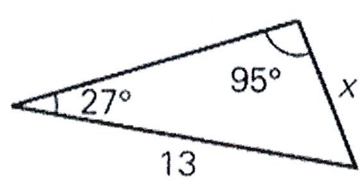
$$\frac{a}{\sin 109,11} = \frac{12,43}{\sin 22}$$

$$a = \frac{12,43 \cdot \sin 109,11}{\sin 22}$$

$a = 31,35$ cm

Calcule la valeur du x dans chacun des triangles suivant.

a)

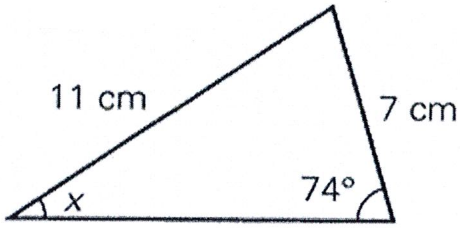


$$\frac{x}{\sin 27} = \frac{13}{\sin 95}$$

$$x = \frac{13 \cdot \sin 27}{\sin 95}$$

$x = 5,92$

b)



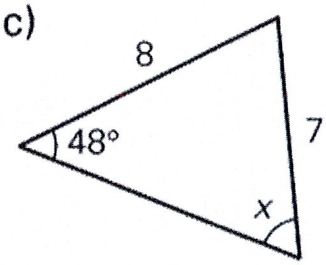
$$\frac{7}{\sin x} = \frac{11}{\sin 74}$$

$$\sin x = \frac{7 \cdot \sin 74}{11}$$

$$m\angle X = \sin^{-1}\left(\frac{7 \cdot \sin 74}{11}\right)$$

$$m\angle X = 37.71^\circ$$

c)

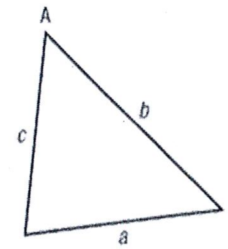


$$\frac{8}{\sin x} = \frac{7}{\sin 48}$$

$$m\angle X = \sin^{-1}\left(\frac{8 \cdot \sin 48}{7}\right)$$

$$m\angle X = 58,14^\circ$$

Loi des cosinus



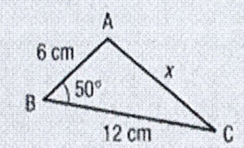
Il est possible de résoudre un triangle quelconque si l'on connaît les mesures de deux côtés et celle de l'angle compris entre ces côtés, ou si l'on connaît les mesures des trois côtés de ce triangle. Dans le triangle ci-contre, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Ex. : Dans le triangle ci-contre :

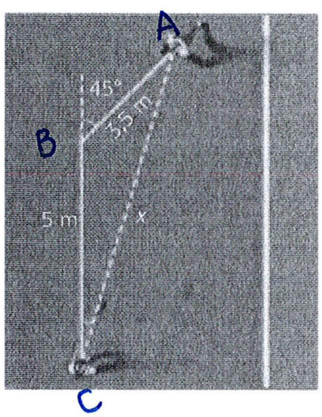
$x^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \times 12 \times 6\cos 50°$

$x \approx 9{,}35$ cm



Trouve la valeur de x :

a)



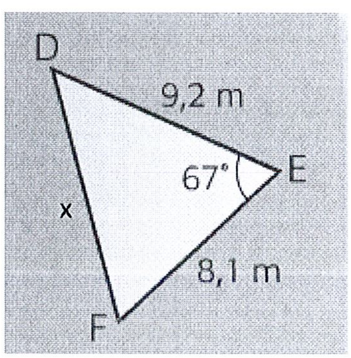
1) $m\angle ABC = 180 - 45$
$= 135°$

2) $x^2 = 3{,}5^2 + 5^2 - 2 \cdot 3{,}5 \cdot 5 \cdot \cos 135$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{61{,}9987}$

$x \approx 7{,}87$ m

b)



$x^2 = 9{,}2^2 + 8{,}1^2 - 2 \cdot 9{,}2 \cdot 8{,}1 \cdot \cos 67$

$x^2 = 92{,}015$

$x \approx 9{,}59$m

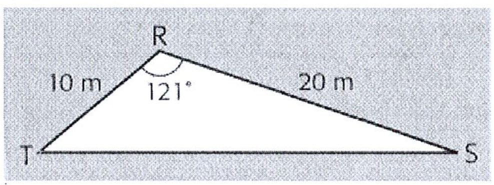
La formule de Héron

Voici une façon de calculer l'aire d'un triangle qui est très efficace lorsque nous connaissons les 3 mesures des côtés d'un triangle :

Aire du triangle = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Où p représente le demi-périmètre du triangle et a, b, c sont les mesures des trois côtés du triangle.

Trouve l'aire du triangle suivant :



1) Trouve $m\overline{TS}$

$m\overline{TS}^2 = 10^2 + 20^2 - 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \cos 121$

$m\overline{TS} = 26,57$ m

2) Trouve l'aire

a) $p = \dfrac{10 + 20 + 26,57}{2} = 28,29$

b) $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$A = \sqrt{28,29(28,29 - 26,57)(28,29 - 20)(28,29 - 10)}$

$A = 85,89$ m^2