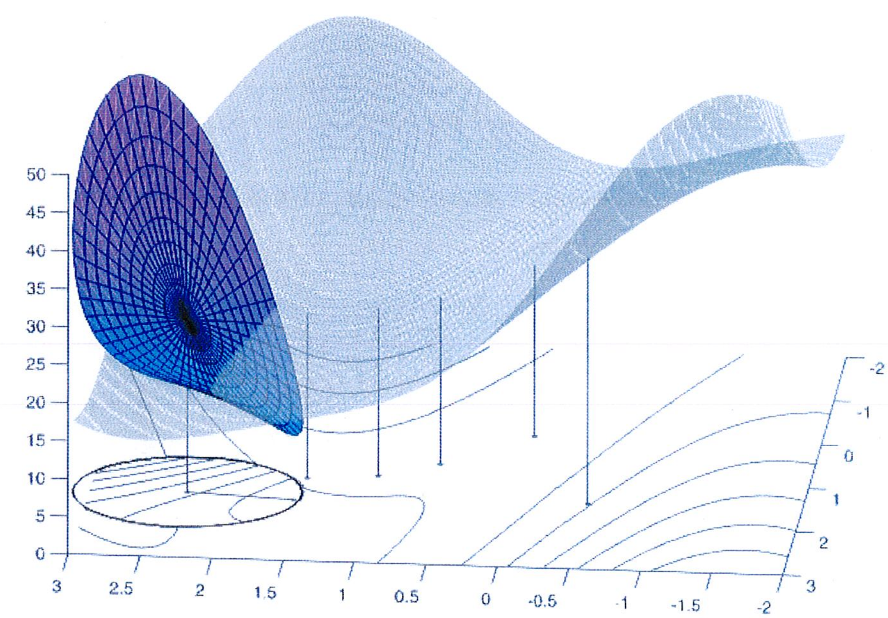
L'optimisation



ATHÉMATIQUE SN5

Nom : ____________________ Groupe : __________

L'optimisation

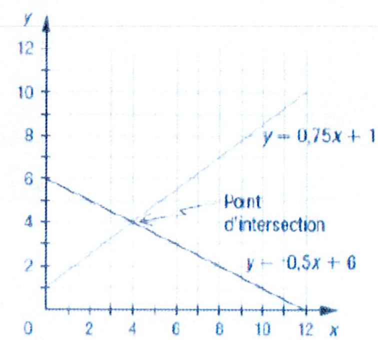
L'optimisation est une méthode mathématique qui sert par exemple à augmenter l'efficacité d'une entreprise, ou augmenter ses revenus, ou diminuer ses dépenses, bref qui tient compte de plusieurs contraintes et qui tentent de les maximiser (ou de les minimiser). Ces contraintes sont traduites par des inéquations puis tracées dans un plan cartésien. Pour résoudre des problèmes d'optimisation, nous aurons besoin également de résoudre des systèmes d'équations.

Systèmes d'équations (rappel)

Un système d'équations est un ensemble de deux ou plusieurs équations. Résoudre un système d'équations consiste à trouver le point de rencontre des droites. Pour ce faire, il existe différentes méthodes :

1) Méthode graphique :

Ex. : $y = -0{,}5x + 6$
$y = 0{,}75x + 1$



La solution est (4, 4).

2) Méthodes algébriques : Comparaison, substitution ou réduction.

Ces méthodes algébriques ont été vues en quatrième secondaire et révisées cette année. Nous les utiliserons dans la résolution de problèmes d'optimisation. Avant de résoudre, il faut savoir traduire !!

Traduction d'une situation par une inéquation

Afin de résoudre un problème d'optimisation, il faut d'abord traduire les conditions du problème appelées contraintes. Pour ce faire, il faut mathématiser à l'aide d'expressions algébriques.

Expressions algébriques :

a) x est inférieur ou plus petit à y : $x < y$

b) x est supérieur ou plus grand à y : $x > y$

c) x est inférieur ou égal à y : $x \leq y$

d) x est supérieur ou égal à y : $x \geq y$

e) x est au minimum égal à y : $x \geq y$ (au min $\Rightarrow$ y ou +)

f) x est au maximum égal à y : $x \leq y$ (au max $\Rightarrow$ y ou −)

g) x est au moins égal à y : $x \geq y$

h) x est au plus égal à y : $x \leq y$

Exercices

#1 Si x représente l'âge de Paul :

a) Paul a 15 ans ou plus : $x \geq 15$

b) Paul a au moins 15 ans : $x \geq 15$

c) Au minimum, Paul a 15 ans : $x \geq 15$

d) L'âge de Paul n'est pas inférieur à 15 ans : $x \geq 15$

#2 L'âge de Patricia est au moins 3 fois plus élevée que celui de Paul.

1) Identifie les variables :

x: âge de Patricia

y: âge de Paul

2) Traduis l'inéquation :

$x \geq 3y$

#3 Le nombre de garçons au spectacle est au moins 5 de plus que le nombre de filles.

x : nb de garsons

y : nb de filles

$x \geq y + 5$

#4 Le nombre de planches à neige qu'il doit vendre sera au moins égal au tiers du nombre de skis.

x : nb de planches à neige

y : nb de skis

$x \geq \frac{y}{3}$ ou $3x \geq y$

#5 Soit x l'avoir de Pépé

a) s'il avait deux fois plus d'argent, il aurait au plus 28 $ $2x \leq 28$

b) Même avec 5$ de moins, il possède plus de 8$ $x - 5 > 8$

c) Il lui manque moins de 3$ pour acheter un disque de 16$ $x + 3 > 16$ ou $16 - x < 3$

d) Si je lui donne 15$, son avoir aura au moins doublé $x + 15 \geq 2x$

Résolution d'une inéquation : Demi-plan

Étapes :

1-Représenter la droite **frontière** en utilisant l'équation associée à l'inéquation.

Ex : $y \leq x + 2$ devient $y = x + 2$

2-Choix du trait :

- Trait plein si le symbole d'inéquation est : $\geq$ ou $\leq$. Cela signifie que les points de la droite font partie de l'ensemble-solution.
- Trait pointillé si le symbole d'inéquation est : $>$ ou $<$. Cela signifie que les points de la droite ne font pas partie de l'ensemble-solution.

3- Déterminer la zone à hachurer :

1. Choisir un point témoin, c'est-à-dire un point qui n'appartient pas à la droite.
2. Dans l'inéquation remplacer la valeur de x et de y par le point témoin. Si l'inéquation est vraie, alors le point appartient à la zone à hachurer. Si l'inéquation est fausse, alors le point n'appartient pas à la zone.

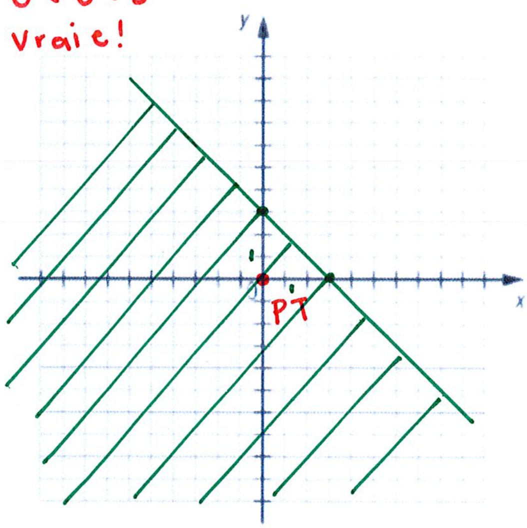
Exercice

#1 Représente graphiquement l'ensemble-solution de chacune des inéquations suivantes :

a) $y \leq x + 3$ trait plein!

$0 \leq 0 + 3$

Vraie!



1) Droite : $y = x + 3$

2) Trace → utilise "b" et la pente

ou

→ table de valeur

ou

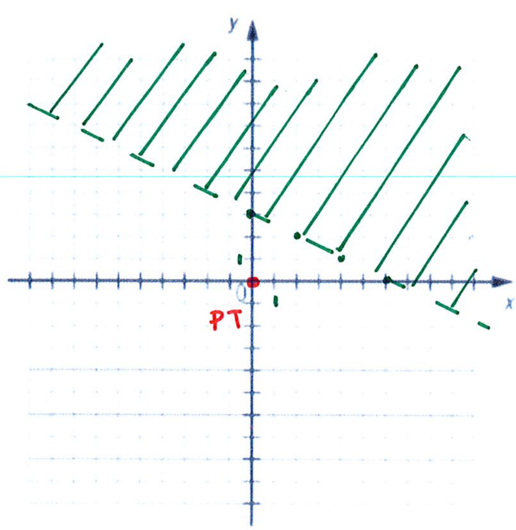
→ abscisse et ordonnée à l'origine truc si $y = ax + b$

b : ordonnée à l'origine

$-b/a$: abscisse à l'origine

3) Point témoin : $(0,0)$

b) $x + 2y - 6 > 0$ trait pointillé



1) Droite :

$$\frac{2y}{2} = \frac{-x}{2} + \frac{6}{2}$$

$$y = \frac{-x}{2} + 3$$

2) Trace

3) Pt témoin : $(0,0)$

$0 + 2 \cdot 0 - 6 > 0$

$-6 > 0$

Fausse!

Système d'inéquations

Un système d'inéquations est un ensemble composé d'au moins deux inéquations. L'ensemble-solution d'un tel système :

- Comprend tous les couples qui vérifient simultanément toutes les inéquations du système
- Correspond graphiquement à la région du plan commune aux ensembles-solutions de toutes les inéquations formant le système.

Exercices :

#1 Dans chaque cas, représentez le système d'inéquations dans un plan cartésien.

a) $4x + 3y < 8$ ①
$x + y \geq 2$ ②

① $4x + 3y = 8$

$\frac{3y}{3} = \frac{-4x}{3} + \frac{8}{3}$

$y = \frac{-4x}{3} + \frac{8}{3}$

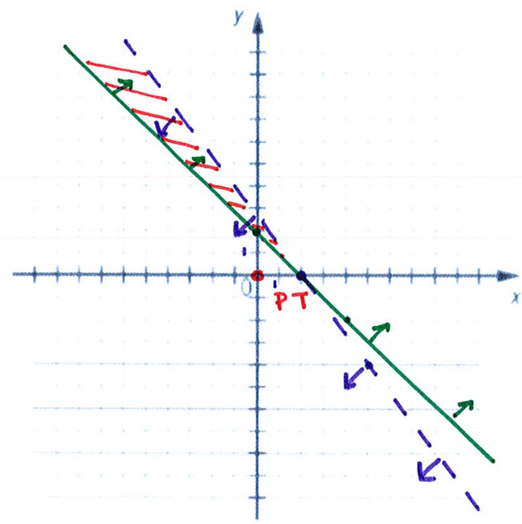
table (calculatrice!)

x	y
2	0
5	-4

Zone:
$4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 < 8$
$0 < 8$
Vraie

② $y = -x + 2$

Zone
$0 + 0 \geq 2$
Fausse!



b) $3x - 5y - 25 > 0$ ①
$5x + 2y + 16 \leq 0$ ②

① $5y = 3x - 25$

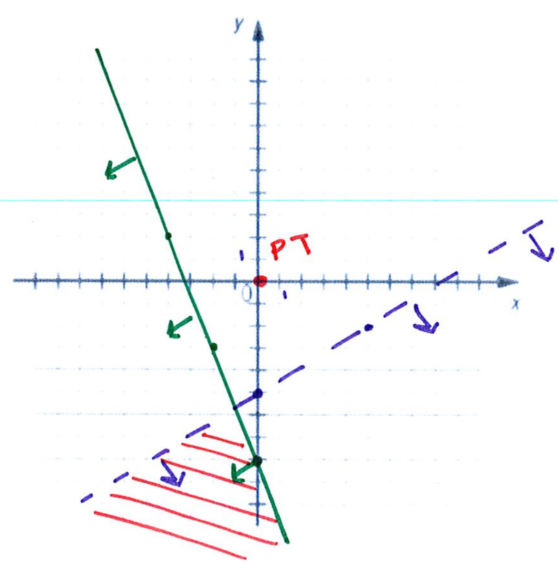
$y = \frac{3x}{5} - 5$

zone:
$3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 - 25 > 0$
$-25 > 0$
Fausse

② $2y = -5x - 16$

$y = \frac{-5x}{2} - 8$

zone:
$5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 16 \leq 0$
$16 \leq 0$
Fausse



#2 Vérifie si les couples donnés sont des solutions du système d'inéquations

$$\text{①}\ y > 2x + 5 \quad et \quad \text{②}\ y < -5x + 37$$

a) (2, 13)

① $13 > 2\cdot 2 + 5$ ② $13 < -5\cdot 2 + 37$ Rép: oui il fait partie de l'ens-sol.

$13 > 9$ $13 < 27$

oui oui

b) (9, 24)

① $24 > 2\cdot 9 + 5$ ② $24 < -5\cdot 2 + 37$ Rép: Non...

$24 > 23$ $24 < 27$

oui NON

c) (6, 18)

① $18 > 2\cdot 6 + 5$ ② $18 < -5\cdot 6 + 37$ Rép: NON...

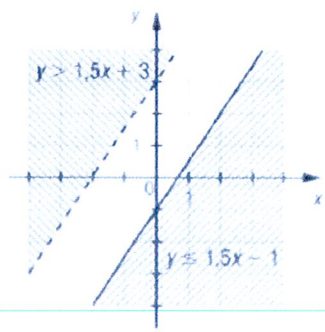
$18 > 17$ $18 < 7$

oui NON

Systèmes d'inéquations particuliers

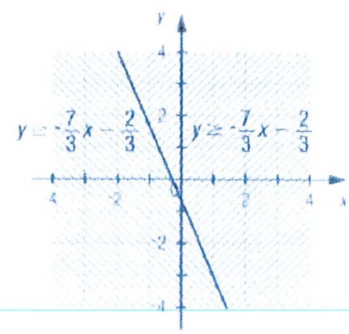
Lorsque les droites frontières associées à un système d'inéquations du premier degré à deux variables sont parallèles, cela donne lieu à certains cas particuliers.

Il y a aucune solution.

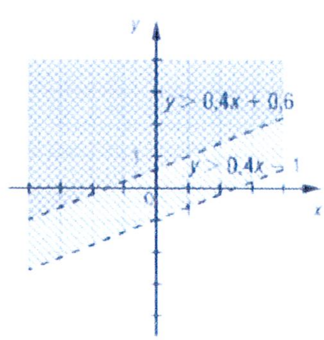


L'ensemble-solution est constitué des couples qui vérifient l'équation $y = \frac{7}{3}x - \frac{2}{3}$.

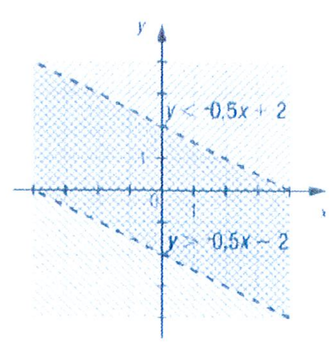
Donc les points sur la droite frontière.



L'ensemble-solution est constitué des couples qui vérifient l'inéquation $y > 0{,}4x + 0{,}6$.



L'ensemble-solution est constitué des couples associés aux points de la région comprise entre les deux droites frontières.



Polygone de contraintes :

Lorsqu'un système d'inéquations du premier degré à deux variables traduit un ensemble de contraintes, la représentation graphique de l'ensemble-solution forme un polygone convexe ouvert ou fermé appelé **polygone de contraintes**.

Exercice :

Trace dans un plan cartésien le polygone de contraintes correspondants à l'ensemble-solution de chacun des systèmes d'inéquations données et indique les coordonnées de ses sommets.

a) $y \leq -2x + 16$ ① $x \geq 0$

$-16x + 4y > -32$ ② $y \geq 0$

$6x - 2y + 24 \geq 0$ ③

1) Trace

① $y_1 = -2x + 16$

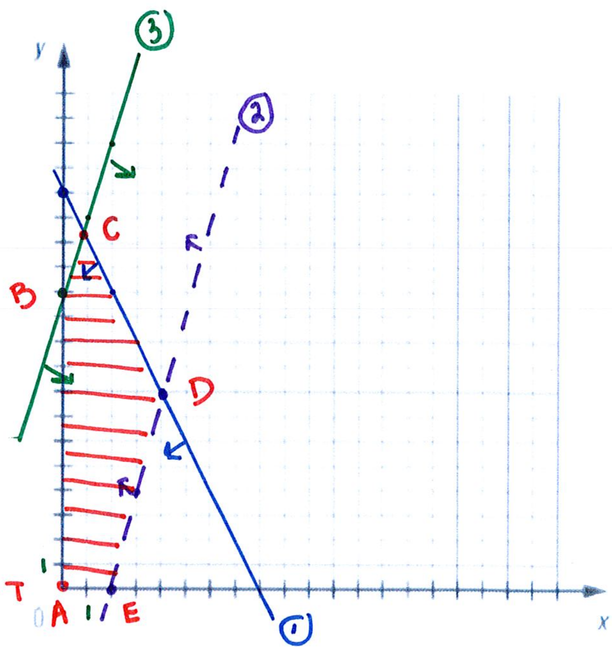
② $4y = 16x - 32$

$y_2 = 4x - 8$

abs : $\frac{-b}{a} = \frac{8}{4} = 2$

③ $2y = 6x + 24$

$y = 3x + 12$



2) Trouve les sommets :

1) Sommet C : $y_3 = y_1$

$3x + 12 = -2x + 16$ (+2x, −12)

$5x = 4$

$x = 4/5$

$y_1 = -2 \cdot \frac{4}{5} + \frac{16}{1} = 72/5$

Donc $\left(\frac{4}{5}, \frac{72}{5}\right)$

2) Sommet D : $y_1 = y_2$

$-2x + 16 = 4x - 8$ (+2x, +8)

$\frac{24}{6} = \frac{6x}{6}$

$x = 4$

$y_1 = -2 \cdot 4 + 16$

$y_1 = 8$

Donc $(4, 8)$

Sommets : $A(0, 0)$, $B(0, 12)$, $C\left(\frac{4}{5}, \frac{72}{5}\right)$

$D(4, 8)$ et $E(2, 0)$

Il faut toujours voir le polygone !

1) Trace

b) $x - 2y + 16 \geq 0$ ①
$9x - 4y - 108 < 0$ ②
$2x + 3y - 24 \geq 0$

① $2y = x + 16$

$y_1 = \frac{x}{2} + 8$

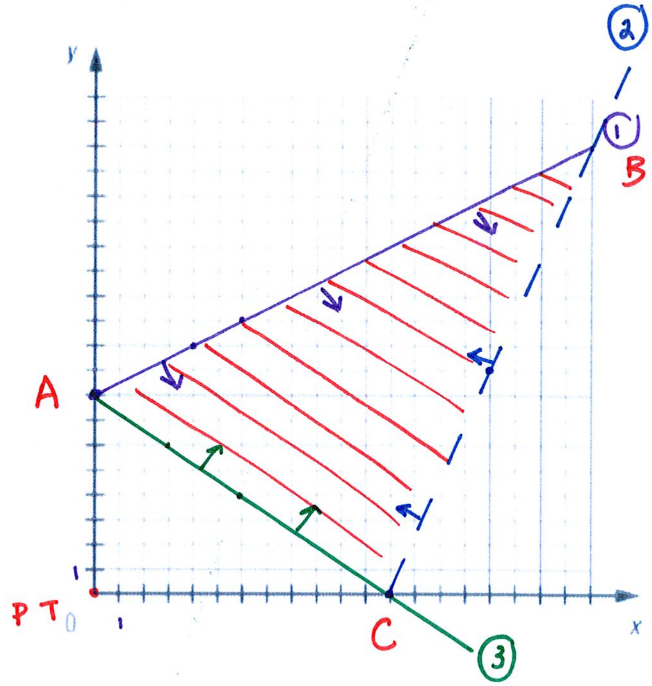
③ $3y = -2x + 24$

$y_3 = \frac{-2x}{3} + 8$

② $\frac{4y}{4} = \frac{9x}{4} - \frac{108}{4}$

$y_2 = \frac{9x}{4} - 27$

$abs = \frac{-b}{a} = \frac{+27}{9/4} = 12$



2) Trouve les sommets :

Sommet B :

$y_1 = y_2$

$\frac{x}{2} \cdot 4 + 8 \cdot 4 = \frac{9x}{4} \cdot 4 - 27 \cdot 4$

$2x + 32 = 9x - 108$ $\quad -2x \quad -2x \quad +108 \quad +108$

$\frac{140}{7} = \frac{7x}{7}$

$20 = x$

$y_1 = \frac{20}{2} + 8 = 18$

Donc $(20, 18)$

Sommet C : tu connais $(12, 0)$

vérifie-le dans ③

$y_3 = \frac{-2 \cdot 12}{3} + 8$

$y_3 = 0$ Donc $(12, 0)$

Rép: Les sommets sont

A $(0, 8)$ B $(20, 18)$

et C $(12, 0)$

Résolution de problème d'optimisation

Dans un problème d'optimisation l'objectif visé est de maximiser ou de minimiser une certaine quantité (souvent de nature économique)!

Voici les étapes pour résoudre un problème d'optimisation :

1. Identifier les variables
2. Traduire les contraintes (les inéquations)
3. Tracer le polygone de contraintes
4. Calculer les coordonnées des sommets du polygone de contrainte à l'aide de la résolution de systèmes d'équations. Si plusieurs sommets voir droite baladeuse
5. Déterminer la fonction économique ou objectif
6. Évaluer à l'aide de la fonction économique les sommets qui maximisent ou minimisent la situation à l'aide d'un tableau
7. Donner l'ensemble-solution et interpréter la réponse

Fonction économique ou objectif :

La fonction économique ou objectif, notée Z, est une fonction qui permet de calculer par exemple, un profit ou un coût (tout dépend de l'objectif du problème d'optimisation). Elle est souvent associée à de l'argent!

Forme de l'équation économique ou objectif : $\boxed{Z = ax + by + C}$

* Pas souvent de C

Ex : a) Évalue la fonction à optimiser aux sommets données :

Sommets	Z = 8x - 5y
(11, 18)	$Z = 8 \cdot 11 - 5 \cdot 18 = -2$
(12, 4)	$Z = 8 \cdot 12 - 5 \cdot 4 = 76$
(6, 2)	$Z = 8 \cdot 6 - 5 \cdot 2 = 38$
(3, 12)	$Z = 8 \cdot 3 - 5 \cdot 12 = -36$
(1, 1)	$Z = 8 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = 3$

b) Détermine le sommet qui engendre :

1) un minimum : (3, 12)

2) un maximum : (12, 4)