Droite baladeuse

Lorsque ton polygone de contraintes a plusieurs sommets, la droite baladeuse est une méthode qui te permet de ne pas nécessairement tous les trouver sachant que l'on recherche ceux qui optimisent la situation, c'est-à-dire le sommet qui engendre le maximum et ou celui qui engendre le minimum.

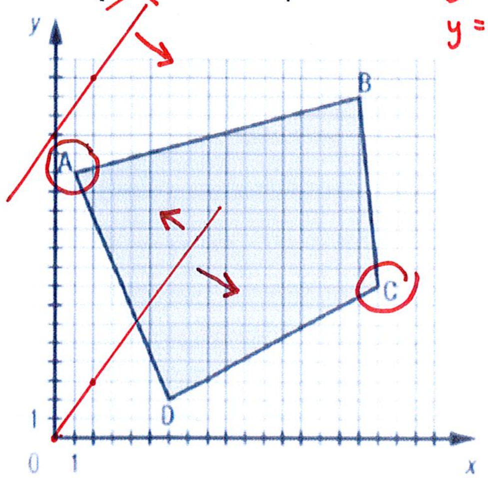
Étapes :

1. Écris la fonction objective sous la forme y = ax + b.
2. Trace une droite, à l'extérieure du polygone de contraintes si possible, qui a le même taux de variation que la fonction objective.
3. Si ta droite tracée est à l'extérieur du polygone, déplace-la de façon parallèle afin de traverser le polygone au complet. Le premier et le dernier sommets rencontrés seront ceux qui optimisent! Si ta droite tracée est à l'intérieur du polygone, déplace-la de façon parallèle vers le haut et le bas de façon à balayer l'ensemble du polygone. Les sommets aux extrémités seront ceux qui optimisent.

Exemple : à l'aide de la droite baladeuse, détermine les sommets qui optimisent la situation

a) $\cancel{Z} = 12x - 8y$ Donc $8y = 12x$

$y = \frac{12}{8}x = \frac{3x}{2}$



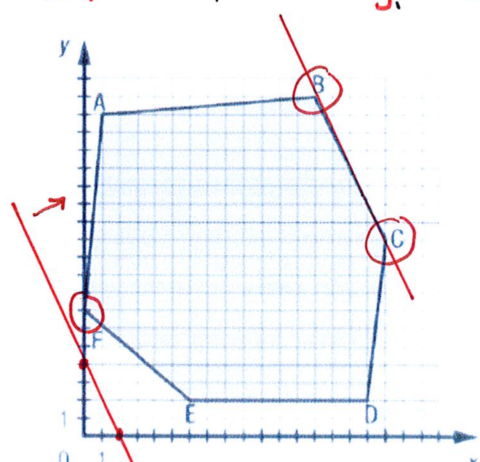
Sommets	$Z = 12x - 8y$
A (1, 14)	$Z = 12 \cdot 1 - 8 \cdot 14 = -100$
C (17, 8)	$Z = 12 \cdot 17 - 8 \cdot 8 = 140$

Donc minimum à A

maximum à B

b) $\cancel{Z} = 8x + 4y$ $4y = -8x$

$y = -2x$



Note : Comme $\overline{BC}$ // y, alors tous les points de $\overline{BC}$ seront des min ou des max !

Sommets	$Z = 8x + 4y$
F (0, 7)	$Z = 8 \cdot 0 + 4 \cdot 7 = 28$
B (13, 19)	$Z = 8 \cdot 13 + 4 \cdot 19 = 180$
C (17, 11)	$Z = 8 \cdot 17 + 4 \cdot 11 = 180$

Donc minimum à F

maximum : tous les points de $\overline{BC}$

Exercices

#1 Dans une école, lors d'une sortie éducative, la direction exige qu'il y ait au moins 1 adulte pour 15 élèves. Le nombre de participants n'est pas inférieur à 128. Le nombre d'élèves est au moins 80 de plus que le nombre d'adultes. L'administration de l'école défraie une partie des coûts en allouant 2$ par élève et 5$ par adulte. Quelle est le montant minimal que l'administration devra débourser ?

1) x : nb d'élèves inscrits

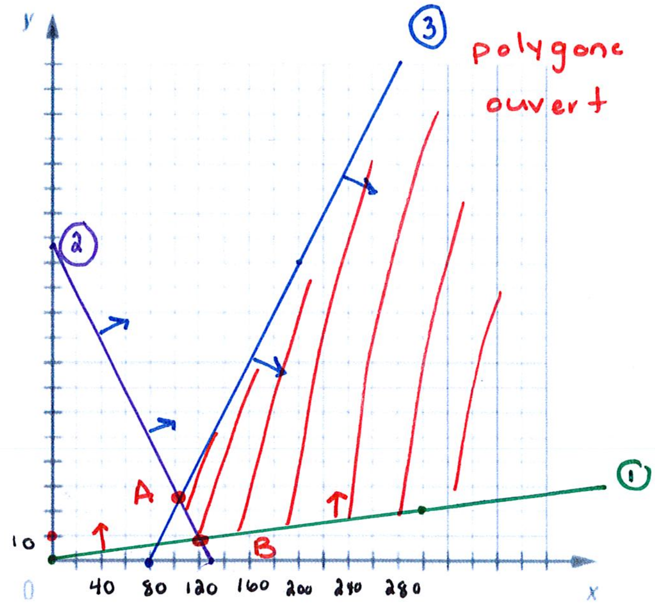
y : nb d'adultes inscrits

2) $x \geq 0$, $y \geq 0$ * Attention ne les oublie pas !

$x \leq 15y$ ①

$x + y \geq 128$ ②

$x \geq y + 80$ ③



3) Trace

$y_1 = \frac{x}{15}$

x	y
0	0
300	20

$y_2 = -x + 128$

x	y
128	0
0	128

$y_3 = x - 80$

x	y
80	0
200	120

4) Zone :

① (0, 10)
$0 \leq 15 \cdot 10$
oui

② (0, 0)
$0 + 0 \geq 128$
NON

③ (0, 0)
$0 \geq 0 + 80$
NON

5) Sommets :

Sommet A : $y_2 = y_3$

$-x + 128 = x - 80$

$\frac{208}{2} = \frac{2x}{2}$

$104 = x$

$y = -104 + 128$

$y = 24$

$(104, 24)$

Sommet B : $y_1 = y_2$

$\frac{x}{15} = -x + 128$

$x = -15x + 1920$

$16x = 1920$

$x = 120$

$y = \frac{120}{15} = 8$

$(120, 8)$

6) Tableau

Sommets	$Z = 2x + 5y$
(104, 24)	$Z = 2 \cdot 104 + 5 \cdot 24$ $Z = 328$ \$
(120, 8)	$Z = 2 \cdot 120 + 5 \cdot 8$ $Z = 280$ \$

Rép : L'administration devra débourser 280 \$

#2 Un constructeur d'automobiles qui produit des voitures compactes et des minifourgonnettes désire maximiser son profit hebdomadaire. Les profits générés sont de 4k$ pour chaque voiture compacte et de 10 k$ pour chaque minifourgonnette. Sa capacité de production hebdomadaire est au plus de 2100 véhicules, et il doit produire chaque semaine au moins 1000 voitures compactes et au moins 200 minifourgonnettes. Le nombre de voitures compactes produites doit être au moins 2 fois plus grand que le nombre de minifourgonnettes.

1) x : Nombre de voitures compactes

y : Nb. de minifourgonnettes

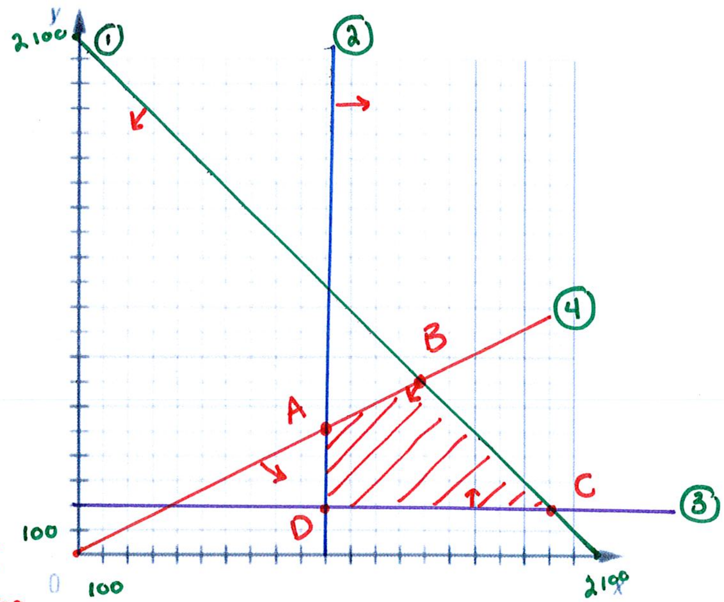
2) $x \geq 0, \quad y \geq 0$ — zone

$x + y \leq 2100$ ① — $0 + 0 \leq 2100$ oui

$x \geq 1000$ ② — $0 \geq 100$ NON

$y \geq 200$ ③ — $0 \geq 200$ NON

$x \geq 2y$ ④ Pt(0, 100) — $0 \geq 200$ NON



3) Trace

① $y_1 = -x + 2100$

② $x = 1000$

③ $y = 200$

④ $y = \frac{x}{2}$

x	y
0	0
1000	500

4) Sommets :

Sommet B : $y_1 = y_4$

$-x + 2100 = \frac{x}{2}$

$2100 = \frac{3x}{2}$

$x = \frac{2100 \cdot 2}{3} = 1400$

$y = \frac{1400}{2} = 700$

(1400, 700)

Sommet C : x = ? si y = 200

$y_1 = -x + 2100$

$200 = -x + 2100$
$-2100 \qquad -2100$

$-1900 = -x$

$x = 1900$

(1900, 200)

Rép : Le constructeur devrait faire 1400 voitures compactes et 700 minifourgonnettes pour un profit maximal de 12 600 000 $.

5) Tableau :

Sommets :	$Z = 4000x + 10\,000y$
A (1000, 500)	$Z = 4000 \cdot 1000 + 10\,000 \cdot 500 = 9\,000\,000$ $
B (1400, 700)	12 600 000 $
C (1900, 200)	9 600 000 $
D (1000, 200)	6 000 000

#3 Un club vidéo loue des jeux vidéo 3,75$ par jour et des DVD 4,50$ par jour. Le gérant sait qu'il loue au moins 4 fois plus de DVD que de jeux. En une soirée, le total des locations n'excède pas 215 et est au moins de 95. Quel est le revenu de location maximal et minimal qui peut être atteint par le club vidéo ?

1) x : Nb de jeux vidéo

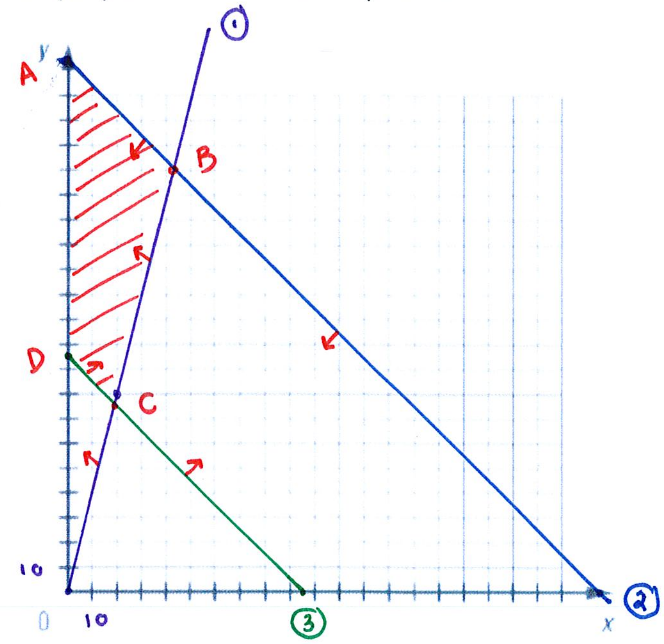
y : Nb de DVD

2) $x \geq 0$, $y \geq 0$ Zone:

$y \geq 4x$ ① (0,10) $10 \geq 0$ V

$x + y \leq 215$ ② $0 + 0 \leq 215$ V

$x + y \geq 95$ ③ $0 + 0 \geq 95$ F



3) Trace

$y_1 = 4x$ $y_2 = -x + 215$ $y_3 = -x + 95$

4) Sommets

B : $y_1 = y_2$

$4x = -x + 215$

$5x = 215$

$x = 43$

$y = -43 + 215$

$y = 172$

(43, 172)

C : $y_1 = y_3$

$4x = -x + 95$

$5x = 95$

$x = 19$

$y = -19 + 95$

$y = 76$

(19, 76)

5) Tableau :

Sommets	$Z = 3.75x + 4.50y$
A(0, 215)	$Z = 3.75 \cdot 0 + 4.5 \cdot 215 = 967.50\$$
B(43, 172)	$Z = 3,75 \cdot 43 + 4,5 \cdot 172 = 935.25$
C(19, 76)	$Z = 413,25\$$
D(0, 95)	$Z = 427.50\$$

Rép : Au minimum le revenu sera de 427.50$ avec 95 locations de DVD seulement.

Au maximum le revenu sera de 967.50$ avec 215 DVD seulement.

#4 Les finissants d'une école secondaire font imprimer un gilet-souvenir dont la vente financera les activités de fin d'année. Il y a au maximum 204 finissants qui achèteront soit un gilet à manches courtes, soit un gilet à manches longues. Selon un sondage, il y a au moins 3 fois plus d'élèves qui désirent un gilet à manches courtes plutôt qu'un gilet à manches longues. Un gilet à manches courtes rapporte 8$ de profit et un à manches longues rapporte 6$. Combien de gilets de chaque sorte doivent-ils vendre pour maximiser leur profit ?

1) x : Nb de gilets à manches-courtes

y : Nb de gilets à manches-longues

2) $x \geq 0$, $y \geq 0$ zone

$x + y \leq 204$ ① $0 + 0 \leq 204$ V

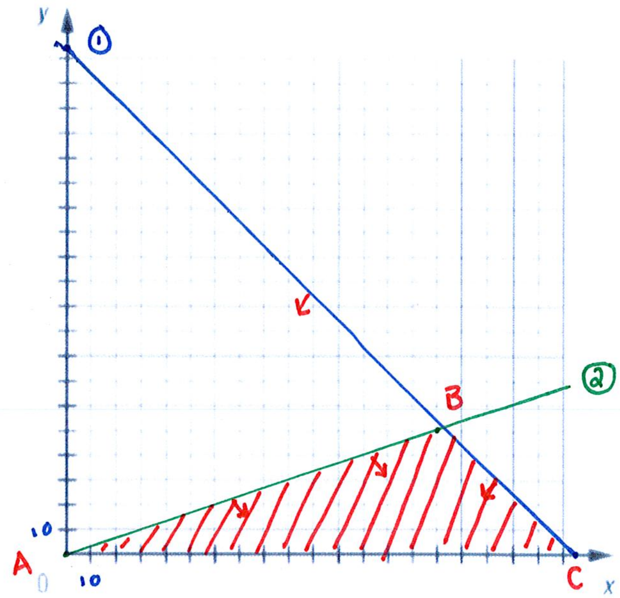
$x \geq 3y$ ② $(0, 10)$ $0 \geq 30$ F

3) Trace :

$y_1 = -x + 204$

$y_2 = \dfrac{x}{3}$

x	y
0	0
150	50



4) Sommet :

B : $y_1 = y_2$

$-x \cdot 3 + 204 \cdot 3 = \dfrac{x}{3} \cdot 3$

$-3x + 612 = x$ ($+3x$)

$612 = 4x$

$153 = x$

$y = \dfrac{153}{3} = 51$

$(153, 51)$

5) Tableau :

sommets	$Z = 8x + 6y$
A(0,0)	0
B(153, 51)	$Z = 8 \cdot 153 + 6 \cdot 51 = 1530$ \$
C(204, 0)	$Z = 8 \cdot 204 = 1632$ \$

Rép : Ils devraient vendre 204 gilets à manches-courtes et aucun à manches-longues.

#5 Un relieur dispose de 12 000 feuilles lignées, de 162 séparateurs et de 60 feuilles de plastique. L'assemblage d'un cahier A nécessite 500 feuilles, 4 séparateurs et 2 feuilles de plastique. L'assemblage d'un cahier B nécessite 300 feuilles, 6 séparateurs et 2 feuilles de plastique. Le relieur vend le cahier A 3,75 $ et le cahier B 2,75 $. Combien de cahiers de chaque modèle devra-t-il assembler pour obtenir un revenu maximal à partir du matériel dont il dispose ?

1) x : Nb de cahiers A

y : Nb de cahiers B

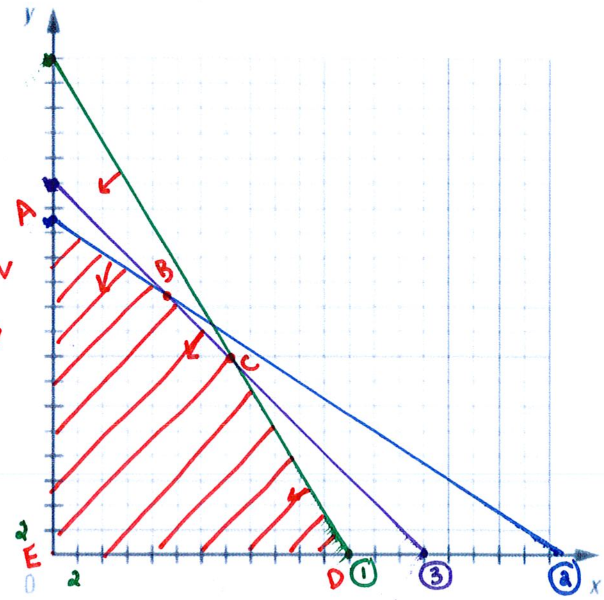
2) $x \geq 0$, $y \geq 0$

zone

$500x + 300y \leq 12\,000$ ① $\quad$ $0 + 0 \leq 12\,000$ V

$4x + 6y \leq 162$ ② $\quad$ $0 + 0 \leq 162$ V

$2x + 2y \leq 60$ ③ $\quad$ $0 + 0 \leq 60$ V



3) Trace

① $y_1 = \frac{-500x}{300} + \frac{12\,000}{300}$

$y_1 = -\frac{5x}{3} + 40$

ord : (0, 40)

abs : (24, 0)

$\frac{-b}{a}$

② $y_2 = \frac{-4x + 162}{6}$

$y_2 = \frac{-2}{3}x + 27$

ord : (0, 27)

abs : (40,5, 0)

③ $y_3 = \frac{-2x + 60}{2}$

$y_3 = -x + 30$

(0, 30)

(30, 0)

4) Sommets

B : $y_2 = y_3$

$-\frac{2x}{3} \cdot 3 + 27 \cdot 3 = -x \cdot 3 + 30 \cdot 3$

$-2x + 81 = -3x + 90$

$x = 9 \qquad y = -9 + 30 = 21$

(9, 21)

C : $y_1 = y_3$

$-\frac{5x}{3} \cdot 3 + 40 \cdot 3 = -x \cdot 3 + 30 \cdot 3$

$-5x + 120 = -3x + 90$

$30 = 2x$

$x = 15 \qquad y = -15 + 30$

$y = 15$

(15, 15)

5) Tableau :

Sommets	$Z = 3{,}75x + 2{,}75y$
A (0, 27)	$Z = 3{,}75 \cdot 0 + 2{,}75 \cdot 27 = 74{,}25$ \$
B (9, 21)	91,25 \$
C (15, 15)	97,50 \$
D (24, 0)	90 \$
E (0, 0)	0 \$

Rép : Il devra assembler 15 cahiers de chaque modèle pour un revenu maximal de 97,50 $.

#6 Une tirelire contient uniquement des pièces de 5¢ et de 10¢. On sait qu'il y a au moins une pièce de chaque sorte dans la tirelire et que la somme des pièces est inférieure à 0,50$. Compte tenu de ces renseignements, combien de combinaisons de pièces de 5¢ et de 10¢ sont possibles ?

$0{,}50\,\$ = 50\,¢$

1) x : Nb de pièces de 5 ¢

y : Nb de pièces de 10 ¢

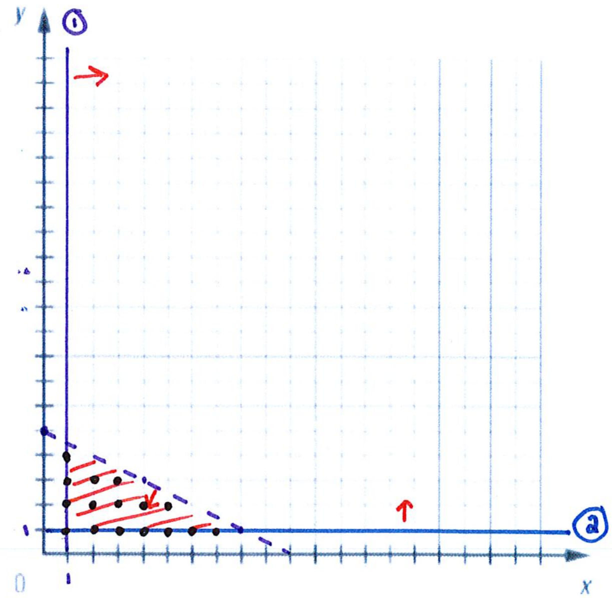
2) $x \geq 0$, $y \geq 0$ ou plutôt ① $x \geq 1$, ② $y \geq 1$

③ $5x + 10y < 50$ Zone $0 + 0 < 50$ V

3) Trace

$x = 1$ $y = 1$ $y_3 = \frac{-5x + 50}{10}$

$y_3 = \frac{-x}{2} + 5$



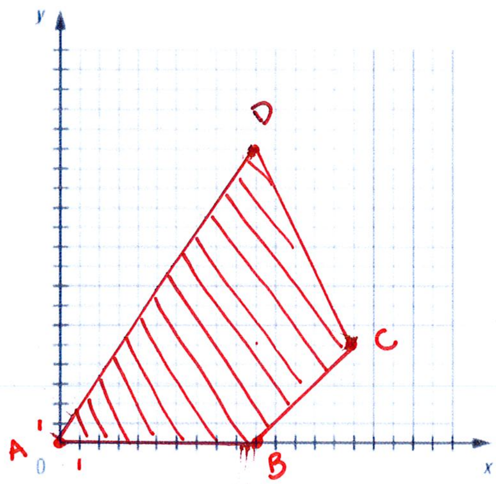
Dans le polygone de contraintes, toutes les coordonnées entières sont des solutions possibles. Donc 16 possibilités !

Cas particuliers

Prenons un polygone de contraintes qui a les sommets suivants :

A (0, 0), B (10, 0), C (15, 5) et D (10, 15)

Sa fonction économique Z = 4x + 2y, exprime le revenu généré pour la vente de **x gâteaux** et de **y croissants**. Combien de gâteaux et de croissants faut-il pour maximiser les revenus ?



Sommet	Z = 4x + 2y
A(0,0)	Z = 4·0 + 2·0 = 0
B(10,0)	Z = 4·10 = 40
C(15,5)	Z = 4·15 + 2·5 = 70
D(10,15)	Z = 4·10 + 2·15 = 70

Remarque : Si une fonction est optimisée en 2 sommets consécutifs du polygone de contraintes alors tous les points de ce côté du polygone optimisent la situation

Comme x et y sont des gâteaux et des croissants, recherchons des coordonnées entières :

1) Détermine l'équation de la droite à l'aide des deux points : * Très utile si le graphique n'est pas gradué par 1 !

1) Trouve a: (15,5) et (10,15)

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{15-5}{10-15} = \frac{10}{-5} = -2$

2) b :

$y = -2x + b$

$15 = -2 \cdot 10 + b$

$35 = b$

Donc $y = -2x + 35$

2) Détermine les points qui optimisent cette fonction :

x	10	11	12	13	14	15
y	15	13	11	9	7	5

* On doit trouver les "couples entiers" dont les abscisses varient entre 10 et 15

Rép : (10, 15), (11, 13), (12, 11), (13, 9), (14, 7), (15, 5)

Exercices supplémentaires :

#1 Lors d'une collecte de fonds pour une maison des jeunes, les dons reçus sont des billets de 10$ et de 20$. Au tout début de la journée, on avait au moins 3 billets de 20$. À la fin de la journée, on estime que la somme amassée est d'au moins 120$ et d'au plus 240$. De plus, on sait que le nombre de billets de 10$ est supérieur ou égal au nombre de billets de 20$. Combien de billets de chaque sorte faut-il pour maximiser les revenus ?

1) x : Nb de billets de 10$

y : Nb de billets de 20$

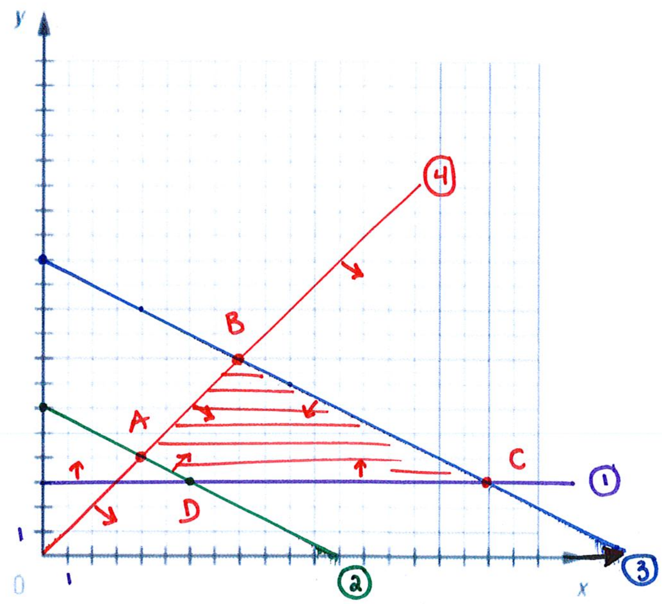
2) $x \geq 0$, $y \geq 0$ — Zone

$y \geq 3$ ① — $a \geq 3$ F

$10x + 20y \geq 120$ ② — $0 + 0 \geq 120$ F

$10x + 20y \leq 240$ ③ — $0 + 0 \leq 240$ V

$x \geq y$ ④ (1,0) — $1 \geq 0$ V



3) Trace

$y_1 = 3$ $\quad y_2 = \dfrac{-10x + 120}{20}$ $\quad y_3 = \dfrac{-10x + 240}{20}$ $\quad y_4 = x$

$y_2 = -\dfrac{x}{2} + 6$ $\quad y_3 = -\dfrac{x}{2} + 12$

4) Sommets :

A : $y_2 = y_4$

$-\dfrac{x}{2} + 6 = x$

$6 = \dfrac{3x}{2}$

$x = 4 \quad y = 4$

B : $y_3 = y_4$

$-\dfrac{x}{2} + 12 = x$

$12 = \dfrac{3x}{2}$

$x = 8 \quad y = 8$

C : x = ? si y = 3 dans y_3

$3 = \dfrac{-x}{2} + 12 \quad x = 18$

D : x = ? si y = 3 dans y_2

$3 = \dfrac{-x}{2} + 6 \quad x = 6$

5)

Tableau	$Z = 10x + 20y$
A (4, 4)	$Z = 10 \cdot 4 + 20 \cdot 4 = 120$
B (8, 8)	$Z = 80 + 160 = 240$ *
C (18, 3)	$Z = 180 + 60 = 240$ *
D (6, 3)	$Z = 60 + 60 = 120$

6) Équation $\overline{BC}$:

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{3 - 8}{18 - 8} = -0,5$

b : $8 = -0,5 \cdot 8 + b$

$12 = b$

Donc $y = -0,5x + 12$

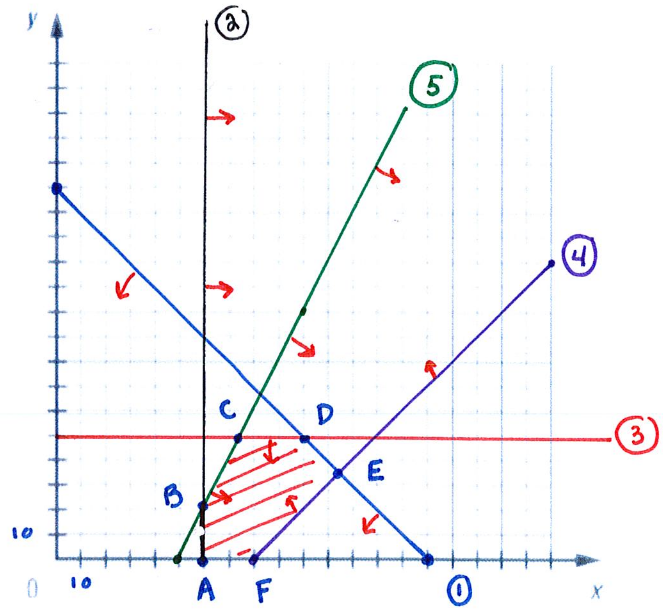
7) Trouvons les « couples entiers » pour les x se situant entre 8 et 18

x	8	10	12	14	16	18
y	8	7	6	5	4	3

→ nb pairs $a = -0,5$!

Rép : Les combinaisons possibles sont (8, 8), (10, 7), (12, 6), (14, 5), (16, 4) (18, 3)

#2 Dans un tournoi de badminton, une bourse d'une valeur maximale de 150$ sera partagée entre les deux premières position. Catherine a terminé en première place et recevra au moins 60$. Martin a terminé en deuxième place et recevra au plus 50$. On a annoncé que la différence entre les sommes accordées à la première et à la deuxième place sera au maximum de 80 $. De plus, une règle stipule que celui ou celle qui gagne le tournoi doit recevoir 50$ de plus que la moitié de la somme que recevra celui ou celle qui termine en deuxième place. Au minimum, combien Catherine recevra-t-elle de plus que Martin ?



1) x: Montant pour la 1ère place

y: Montant pour la 2e place

2) $x \geq 0,\ y \geq 0$ Zone

$x + y \leq 150$ ① $0 + 0 \leq 150$ V

$x \geq 60$ ② $0 \geq 60$ F

$y \leq 50$ ③ $0 \leq 50$ V

$x - y \leq 80$ ④ $0 - 0 \leq 80$ V

$x \geq \frac{y}{2} + 50$ ⑤ $0 \geq 0 + 50$ F

3) Trace

① $y = -x + 150$ ② $x = 60$ ③ $y = 50$ ④ $y = x - 80$ ⑤ $y = 2x - 100$

x	y
0	150
150	0

x	y
80	0
200	120

x	y
50	0
100	100

4) Sommets :

C : x = ? si y = 50 dans y_5

$50 = 2x - 100$ (75, 50)

$150 = 2x$

$x = 75$

E : $y_1 = y_4$

$-x + 150 = x - 80$

$230 = 2x$

$x = 115$

$y = -115 + 150$

$y = 35$

(115, 35)

5) Evaluer la différence entre les 2 prix

A (60, 0) $60 - 0 = 0$

B (60, 20) $60 - 20 = 40$

C (75, 50) $75 - 50 = 25$ ←

D (100, 50) $100 - 50 = 50$

E (115, 35) $115 - 35 = 80$

F (80, 0) $80 - 0 = 80$

Rép : Au minimum Catherine recevra 25$ de plus que Martin !