Résolution de problèmes :

Les problèmes qui se rattachent à la fonction logarithmique sont très semblables à ceux de la fonction exponentielle, la seule différence survient lors de la résolution. Pour arriver à la solution, il faudra utiliser les propriétés des log.

#1 Léa place 1000 $ à un taux annuel de 8 %. Les intérêts sont capitalisés annuellement. Dans combien d'années le placement vaudra-t-il 3000 $?

$Qf = 3000\,\$$

$Qi = 1000\,\$$

$c = \frac{100}{100} + \frac{8}{100} = 1{,}08$

$n = \frac{\text{temps}}{\text{fréquence}} = \frac{x}{1}$

$Qf = Qi \cdot c^n$

$\frac{3000}{1000} = \frac{1000 \cdot 1{,}08^x}{1000}$

$3 = 1{,}08^x$

$x = \log_{1{,}08} 3$

$x = \frac{\log 3}{\log 1{,}08}$

$x = 14{,}27$ ans

Dans 14,27 ans !

#2 Jasmine place 1000$ à un taux annuel de 8 %. Les intérêts sont capitalisés aux 6 mois. Dans combien d'années le placement vaudra-t-il 3000 $?

$Qf = 3000\,\$$

$Qi = 1000\,\$$

$c = \frac{100}{100} + \frac{8 \div 2}{100} = 1{,}04$

$n = \frac{\text{temps}}{\text{fréquence}} = \frac{x}{\frac{1}{2}\text{ an}}$

$n = 2x$

$Qf = Qi \cdot c^n$

$\frac{3000}{1000} = \frac{1000 \cdot 1{,}04^{2x}}{1000}$

$3 = 1{,}04^{2x}$

$\log_{1{,}04} 3 = 2x$

$\frac{\log 3}{\log 1{,}04} = 2x$

$\frac{2x}{2} = \frac{28{,}01}{2}$

$x = 14$ années

Dans 14 ans !

#3 La population d'une ville diminue de 3 % annuellement. Elle est actuellement de 12 380 habitants. Dans combien d'années la population sera-t-elle de 10000 habitants ?

$Qf = 10\,000$

$Qi = 12\,380$

$c = \frac{100}{100} - \frac{3}{100} = \frac{97}{100}$

$n = x$

$Qf = Qi \cdot c^n$

$\frac{10\,000}{12\,380} = \frac{12\,380 \cdot 0{,}97^x}{12\,380}$

$0{,}80775 = 0{,}97^x$

$x = \log_{0{,}97} 0{,}80775$

$x = \frac{\log 0{,}80775}{\log 0{,}97}$

$x = 7$

Donc dans 7 ans !

#4 Un certain dépôt rapporte un intérêt annuel de 4 % capitalisé trois fois par année. Après combien d'années le capital initial aura-t-il doublé ?

$Qi = 1$

$Qf = 2$

$c = \frac{100}{100} + \frac{4 \div 3}{100} = 1{,}01\bar{3}$

$n = \frac{\text{temps}}{\text{fréquence}} = \frac{x}{1/3 \text{ année}}$

$n = 3x$

$Qf = Qi \cdot c^n$

$2 = 1 \cdot 1{,}01\bar{3}^{3x}$

$\log_{1{,}013} 2 = 3x$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{\log 2}{\log 1{,}013} = \frac{3x}{3}$

$17{,}44 = x$

Rép : Dans 17,44 années

#5 Le prix d'une voiture neuve est de 20 000 \$. Après l'achat, la voiture déprécie de 20 % par année. Combien de temps après son achat cette voiture aura-t-elle une valeur de 5 000\$?

$Qi = 20\,000$

$Qf = 5\,000$

$c = \frac{100}{100} - \frac{20}{100} = 0{,}8$

$n = x$

$Qf = Qi \cdot c^n$

$\frac{5000}{20\,000} = \frac{20\,000}{20\,000} \cdot 0{,}8^x$

$\frac{1}{4} = 0{,}8^x$

$x = \log_{0{,}8} 1/4$

$x = \frac{\log 1/4}{\log 0{,}8}$

$x = 6{,}21$

Dans 6,21 années

#6 Des études démontrent que la vitesse moyenne des piétons d'une certaine ville dépend de la population de cette ville. On estime la vitesse moyenne de marche à l'aide de la fonction suivante : $v(x) = 0{,}01 + 0{,}46\, log x$ où x représente la population et v(x) la vitesse moyenne en mètres par seconde. Quelle est la vitesse moyenne des piétons dans une ville de 10 000 habitants?

$V(10\,000) = 0{,}01 + 0{,}46 \log 10\,000$

$= 0{,}01 + 0{,}46 \cdot 4$

$= 1{,}85$

Donc la vitesse est de 1,85 m/sec

#7 Pour déterminer la masse M d'une substance radioactive qui se désintègre, on utilise la formule $M = M_0 e^{bx}$ ou M_0 est la masse initiale et x est le nombre d'années écoulées depuis le début de la désintégration. Après 5 ans, il reste 80% de la masse radioactive initiale.

a) Détermine la valeur du b :

$M_0 = 100\%$ ou 100

$M = 80\%$ ou 80

$$\frac{80}{100} = \frac{100\, e^{b \cdot 5}}{100}$$

$$0,8 = e^{b \cdot 5}$$

$$\frac{\ln 0,8}{5} = \frac{5b}{5}$$

$$-0,0446 = b$$

b) Dans combien d'années la masse radioactive sera-t-elle réduite de moitié ?

$$0,5 = e^{-0,0446x}$$

$$\frac{\ln 0,5}{-0,0446} = \frac{-0,0446x}{-0,0446}$$

$$15,54 = x$$

Dans 15,54 ans

#8 Une compagnie de livraison considère que le matériel routier qu'elle possède perd 30 % de sa valeur par année. Après 5 ans, un de ses camions de transport vaut 12 650$.

a) Quel prix la compagnie avait-elle payé ce camion ?

$Q_i = ?$

$Q_f = 12\,650$

$c = \frac{100}{100} - \frac{30}{100} = 0,7$

$n = 5$

$$Q_f = Q_i \cdot c^n$$

$$\frac{12\,650}{0,7^5} = \frac{Q_i \cdot 0,7^5}{0,7^5}$$

$$74\,998,51 = Q_i$$

Le camion avait été payé 74 998,51 $.

b) Combien de temps après l'achat la valeur du camion est-elle réduite à 10 % de son coût d'achat ?

1) Trouve 10% de 74 988,51 \$

$$\frac{10}{100} = \frac{?}{74\,988,51}$$

$? := 7\,498,85$ \$

2) Trouve x :

$$\frac{7\,499,85}{74\,988,51} = \frac{74\,988,51 \cdot 0,7^x}{74\,988,51}$$

$$0,1 = 0,7^x$$

$$x = \log_{0,7} 0,1$$

$$x = \frac{\log 0,1}{\log 0,7}$$

$$x = 6,46 \text{ ans}$$

Dans 6,46 ans

#9 Supposons qu'une substance se désintègre à une vitesse telle qu'après une année il reste $\frac{500}{501}$ de sa masse initiale.

a) Si l'on dispose à un moment donné de 100 milligrammes de cette substance, combien en restera-t-il *n* années plus tard ? Combien d'année se sont écoulées s'il reste 20 mg ?

1) $Qf = 100\left(\frac{500}{501}\right)^n$

2) $n = ?$ si $Qf = 20$

$$\frac{20}{100} = \frac{100}{100}\left(\frac{500}{501}\right)^n$$

$$0,2 = \left(\frac{500}{501}\right)^n$$

$$\log_{(500/501)} 0,2 = n$$

$$\frac{\log 0,2}{\log 500/501} = n$$

$805,52$ ans $= n$!

b) Quelle est la demi-vie de cette substance ?

$n = ?$ si $Qf = 50$

$$\frac{50}{100} = \frac{100}{100}\left(\frac{500}{501}\right)^n$$

$$0,5 = \left(\frac{500}{501}\right)^n$$

$$n = \log_{(500/501)} 0,5$$

$$n = \frac{\log 0,5}{\log(500/501)}$$

$$n = 346,92$$

Donc 346,92 ans.

#10 Voici l'équation qui représente le nombre de bactéries en fonction du temps écoulé en minutes : $N(t) = 10 \cdot 2^{\frac{t}{40}}$ Exprime par une équation le temps en fonction du nombre de bactéries.

Trouve la réciproque ! Comme il y a un contexte, isole t !!

$$\frac{N}{10} = \frac{10}{10} \cdot 2^{t/40}$$

$$\frac{N}{10} = 2^{t/40}$$

$$\frac{t}{40} \cdot 40 = \log_2 (N/10) \cdot 40$$

$$\rightarrow t = 40 \cdot \log_2 (N/10)$$

donc $t(n) = 40 \log_2 (N/10)$

#11 Dans le grenier d'une fermette, le nombre P de souris varie selon la règle $P = 10(4)^{\frac{t}{2}}$, où t représente le temps (en année)

a) Combien y avait-il de souris dans le grenier au début de l'année ?

10 souris

b) À ce rythme, quel est le temps nécessaire pour que la population de souris atteigne

i) 310 spécimens

$$\frac{310}{10} = \frac{10}{10} (4)^{t/2}$$

$$31 = 4^{t/2}$$

$$\frac{t}{2} = \log_4 31$$

$$t = 2 \cdot \frac{\log 31}{\log 4}$$

$t = 4{,}95$ années

ii)1280 spécimens

$$\frac{1280}{10} = \frac{10}{10} (4)^{t/2}$$

$$128 = 4^{t/2}$$

$$2^7 = (2^2)^{t/2}$$

$$2^7 = 2^t$$

$$7 = t$$

Dans 7 ans

#12 Un amateur de plongée a remarqué que l'intensité de la lumière du soleil dans l'eau diminue selon la profondeur. Après plusieurs recherches, il découvre que l'intensité lumineuse L (en candelas) varie en fonction de la profondeur p (en mètre) selon l'équation $logL = -0{,}245 \log p + 3$

a) Quelle est l'intensité lumineuse du soleil à 2 m de profondeur ?

$\log L = -0{,}245 \log 2 + 3$

$\log L = 2{,}9262$

$10^{2{,}9262} = L$

843,82 candelas = L

b) À quelle profondeur trouve-t-on une intensité lumineuse de 627 candelas ?

$\log 627 \,{}^{-3} = -0{,}245 \log p + 3 \,{}^{-3}$

$\frac{-0{,}2027}{-0{,}245} = \frac{-0{,}245}{-0{,}245} \log p$

$0{,}8275 = \log p$

$p = 10^{0{,}8275}$

$p = 6{,}73$ m

Donc à 6,73 m

c) Quelle est l'intensité lumineuse à la surface de l'eau ? Expliquez votre réponse.

$\log L = -0{,}245 \log 0 + 3$

↳ impossible

donc l'intensité est la même que dans l'air

#13 La valeur V d'une maison payée aujourd'hui 200 000$ varie selon l'équation $V = 200\,000(1{,}025)^{\frac{x}{12}} + 5000$, où x représente le temps écoulé depuis l'achat (en mois).

a) Combien la maison vaudra-t-elle au bout de trois ans et demi ?

3 ans et demi = 3 × 12 + 6 = 42 mois

$V = 200\,000\,(1{,}025)^{42/12} + 5000$

$V = 223\,053{,}73$

Elle va valoir 223 053,73 $.

b) Si on veut revendre cette maison le double du prix qu'on l'a payée, combien de temps doit-on attendre ?

$x = ?$ si $V = 400\,000$

$$\underset{-5000}{400\,000} = 200\,000\,(1{,}025)^{x/12} + 5000 \quad -5000$$

$$\frac{395\,000}{200\,000} = \frac{200\,000\,(1{,}025)^{x/12}}{200\,000}$$

$$1{,}975 = 1{,}025^{x/12}$$

$$\frac{x}{12} = \log_{1{,}025} 1{,}975$$

$$x = 12 \cdot \frac{\log 1{,}975}{\log 1{,}025}$$

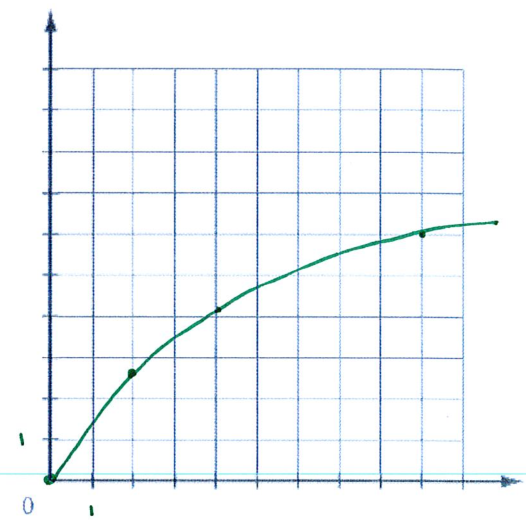
$x = 330{,}74$ mois

donc $\approx 27{,}56$ années !

#14 La responsable des ressources humaines d'une entreprise de fabrication de bicyclettes détermine que le nombre n de bicyclettes assemblées (par semaine) suit la courbe de la fonction $n = 6\log(x+1)$, où x représente le nombre de semaines depuis l'embauche d'une personne.

a) Tracez le graphique de cette situation.

x	y
0	0
2	2,86
4	4,19
9	6



b) Quel est le nombre de bicyclettes assemblées par semaine par une personne 15 semaines après son embauche ?

$n = 6\log(15+1)$

$n = 7{,}22$

Donc 7,22 bicyclettes /sem.

#15 L'échelle de Richter permet de comparer la magnitude de différents séismes. La magnitude M est calculée à partir de la mesure de l'amplitude a du mouvement du sol (en μm) déterminée d'après l'enregistrement obtenu sur un sismographe à 100 km de l'épicentre. L'équation $M = log a$ est une règle simplifiée qui permet de classifier les séismes selon cette échelle.

a) Quelle est la magnitude d'un séisme qui provoque un mouvement d'une amplitude 150 μm ?

$M = \log 150$

$M = 2,18$

Donc une magnitude de 2,18

b) Un sismographe enregistre deux séismes consécutifs de magnitudes respectives 3,1 et 5,4. Trouvez la différence d'amplitude entre les mouvements provoqués par ces deux séismes.

$3,1 = \log a$

$a = 10^{3,1}$

$a = 1\,258,98$ um

$5,4 = \log a$

$a = 10^{5,4}$

$a = 251\,188,64$ µm

Donc

$251\,188,64 - 1\,258,93$

$= 249\,929,72$ µm de différence

c) Le plus gros séisme recensé au monde s'est produit au Chili en 1960. Il était de magnitude 9,5 sur l'échelle de Richter. Au Québec, les plus gros séismes ressentis ont une magnitude d'environ 6 sur l'échelle de Richter. L'amplitude du mouvement produit par le séisme au Chili était combien de fois plus élevée que celle du mouvement produit par les plus gros séismes survenus au Québec?

1) Amplitude du Chili

$9,5 = \log a$

$10^{9,5} = a$

2) Amplitude au Québec

$6 = \log a$

$10^{6} = a$

3) Comparons

$\frac{10^{9,5}}{10^{6}} = 10^{3,5}$

Donc 3 162, 28 fois plus élevée !