6-Résolution d'une équation logarithmique à une variable

Résoudre une équation logarithmique consiste à écrire l'équation à l'aide d'un seul logarithme pour ensuite la transformer sous la forme exponentielle équivalente. Une fois la ou les solutions obtenues, on doit vérifier la validité (**puissance et base > 0**)

Modèle #1 : **Équations avec un terme** (log)

a) $log_5 8x = 2$

$5^2 = 8x$

$\frac{25}{8} = \frac{8x}{8}$

$25/8 = x$

↳ acceptée!

b) $log_x 7 = \frac{1}{2}$

$(x^{1/2})^2 = (7)^2$

$x = 7^2$

$x = 49$

c) $\frac{2 \ln x}{2} = \frac{5}{2}$

$\ln x = 5/2$

$e^{5/2} = x$

$12{,}1825 \approx x$

Modèle #2 : Équations avec deux termes (log)

Propriétés : $si\ log_c m = log_c n \quad alors\ m = n$

a) $log_3(2x+1) = log_3 5$

Démarche : lorsque les logarithmes sont identiques, on compare les puissances.

$\Leftrightarrow \quad 2x + 1 \overset{-1}{} = 5 - 1$

$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$

$x = 2$

b) $log_2(3-4x) = log_2(x+1)$

$3 \overset{-1}{} - 4x \overset{+4x}{} = x \overset{+4x}{} + 1 - 1$

$\frac{2}{5} = \frac{5x}{5}$

$x = 2/5$

Valide :

$3 - 4x > 0$

$3 - \frac{4 \cdot 2}{5} = 1,4$ ok !

c) $2\ln(x-1) - \ln(x-1) = 0$

$\ln(x-1)^2 = \ln(x-1)$

$(x-1)^2 = (x-1)$

$x^2 - 2x \overset{-x}{} + 1 \overset{+1}{} = x \overset{-x}{} - 1 + 1$

S = - 3

P = 2

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-2)(x-1) = 0$

$x - 2 = 0 \qquad x - 1 = 0$

$x = 2 \qquad x = 1$ → à rejeter !

Valide

$x = 2$: $\ln(2-1) = \ln 1$ ok !

$x = 1$: $\ln(1-1) = \ln 0$ indéterminé

$e^{\square} = 0$ impossible

ou $\ln\left(\frac{(x-1)^2}{(x-1)}\right)$ si $x = 1$ division par 0

Modèle #3 : Équations avec trois termes

Démarche :

1) avoir un seul log

2) mettre sous la forme exp : $b^{exp} = puissance$

a) $log_2 x + log_2(x-1) = 4$

$$\log_2(x(x-1)) = 4$$

$$2^4 = x^2 - x$$

$$x^2 - x - 16 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - (4 \cdot 1 \cdot -16)}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{65}}{2}$$

$x_1 = -3{,}53$ à rejeter $x_2 = 4{,}53$

Valide :

$\log_2(x-1)$

$\log_2(4{,}53 - 1)$ ck !

b) $log_2(3-4x) = log_2(x+1) - 3$

$$\log_2(3-4x) - \log_2(x+1) = -3$$

$$\log_2\left(\frac{3-4x}{x+1}\right) = -3$$

$$2^{-3} = \frac{3-4x}{x+1}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{3-4x}{x+1}$$

$$x + 1 = 8(3-4x)$$

$$\underset{+32x}{x} + \underset{-1}{1} = \underset{-1}{24} - 32x \quad {+32x}$$

$$33x = 23$$

$$x = 23/33$$

Valide

$3 - 4x > 0$

$3 - \left(\frac{23}{33}\right) \cdot 4 > 0$ ck !

c) $log_2(x+2) = {}^-log_2(x) + 3$

$\log_2 (x+2) + \log_2 x = 3$

$\log_2 x(x+2) = 3$

$2^3 = x^2 + 2x$

$S = 2$ $\quad x^2 + 2x - 8 = 0$

$P = -8$ $\quad (x+4)(x-2) = 0$

$x + 4 = 0 \qquad x - 2 = 0$

$x = -4 \qquad x = 2$ ok !

à rejeter

Modèle #4 : Équations exponentielles

Propriété : $si\ m = n \quad alors \quad log_c m = log_c n$

Ex : $5^{x+2} = 2^x$

Démarche : Appliquer des log en base 10 de chaque côté

$\log 5^{x+2} = \log 2^x$

$(x+2) \log 5 = x \log 2$

$(x+2)\, 0{,}6990 = x \cdot 0{,}3010$

$0{,}6990x \underset{-0{,}699x}{} + 1{,}398 = 0{,}301x - 0{,}699x$

$\dfrac{1{,}398}{-0{,}398} = \dfrac{-0{,}398x}{-0{,}398}$

$-3{,}5126 = x$

Autres exemples :

1) $\frac{\log(2+x)}{\log(x-3)} = 2$

$\log(2+x) = 2\log(x-3)$

$\log(2+x) = \log(x-3)^2$

$2+x = (x-3)^2$

$2+x = x^2-6x+9$

$x^2-7x+7=0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2-(4\cdot1\cdot7)}}{2}$

$x_1 = \frac{7+\sqrt{21}}{2} \approx 5{,}79$

$x_2 = \frac{7-\sqrt{21}}{2} \approx 1{,}21$ à rejeter !

2) $7 \cdot 3^{x+2} = 4^x$

$\log(7\cdot3^{x+2}) = \log 4^x$

$\log 7 + \log 3^{x+2} = \log 4^x$

$0{,}8451 + (x+2)\cdot 0{,}4771 = x \cdot 0{,}6021$

$0{,}8451 + 0{,}4771x \underset{}{\overset{-0{,}4771x}{}} + 0{,}9542 = 0{,}6021x - 0{,}4771x$

$\frac{1{,}7993}{0{,}125} = \frac{0{,}125x}{0{,}125}$

$14{,}3944 = x$

3) $log_2(x+1) + log_2(x-1) = 3$

$\log_2((x+1)(x-1)) = 3$

$\log_2(x^2-1) = 3$

$2^3 = x^2-1$

$x^2-1-8=0$

$x^2-9=0$

$(x-3)(x+3)=0$

$x=3$ $\quad$ $x=-3$ à rejeter !

$$\frac{5^{x+1}}{5^{x-1}} = 5^2$$

4) $3 \cdot 5^{x-1} - 2 \cdot 5^{x+1} + 5^x = 28$

$$5^{x-1}(3 - 2 \cdot 5^2 + 5) = 28$$

$$\frac{5^{x-1}(78)}{78} = \frac{28}{78}$$

$$5^{x-1} = 28/78$$

$$\log_5(28/78) = x - 1$$

$$\frac{\log(28/78)}{\log 5} + 1 = x$$

$$x = 0,3634$$

5) $log_2(x^2 + 3x - 2) = 3$

$$2^3 = x^2 + 3x - 2$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$(x + 5)(x - 2) = 0$$

$x + 5 = 0$ $\quad$ $x - 2 = 0$

$x = -5$ $\quad$ $x = 2$

Valide : $x^2 + 3x - 2 > 0$

si $x = -5$ $\quad (-5)^2 + 3 \cdot -5 - 2 > 0_{ck}$

si $x = 2$ $\quad (2^2) + 3 \cdot 2 - 2 > 0_{ck}$

Rép : $x \in \{-5, 2\}$

7-Résolution d'une inéquation logarithmique à une variable

Étapes :

1-Trace l'esquisse de la fonction

2-Remplace le symbole d'inégalité par un symbole d'égalité

3-Résous l'équation

Exemples : Résolvez les inéquations suivantes :

a) $3log_4(x+5) \geq 6$

asy : $x = -5$

$c > 0$ $\quad a+ \quad b+$

$\frac{3\log_4(x+5)}{3} = \frac{6}{3}$

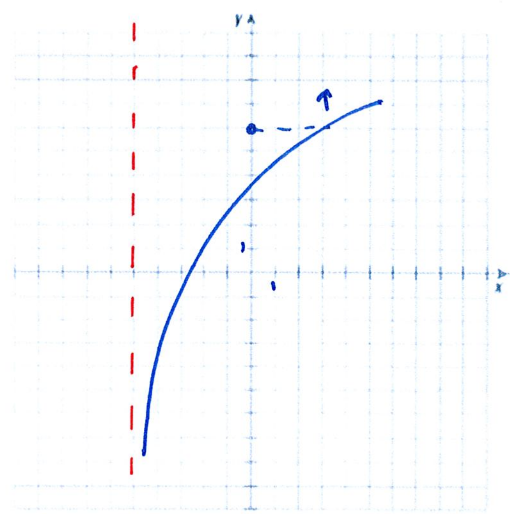
$\log_4(x+5) = 2$

$4^2 = x+5$

$16 - 5 = x + 5 - 5$

$11 = x$

Donc $x \in [11, \infty[$



b) $10 < 5log_{\frac{1}{2}}(x+3)$

asy : $x = -3$

$0 < c < 1$ $\quad a+ \quad b+$

$\frac{5\log_{1/2}(x+3)}{5} = \frac{10}{5}$

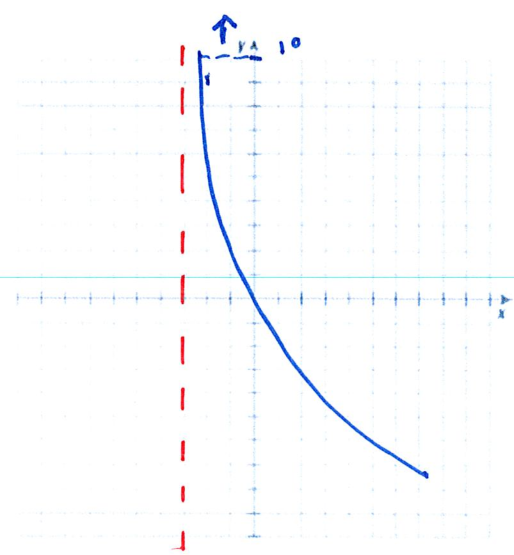
$\log_{1/2} x+3 = 2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 = x + 3 - 3$

$\frac{1}{4} - \frac{12}{4} = x$

$-\frac{11}{4} = x$

Donc $x \in]-3, -\frac{11}{4}[$

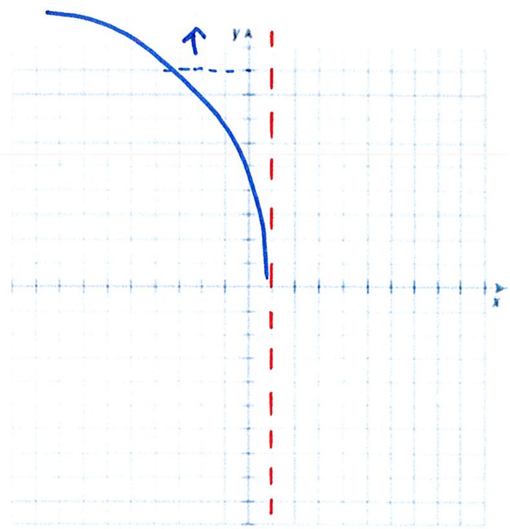


c) $3log_5(-2(x-1))) + 6 \geq 9$ asy : $x = 1$

$c > 1$

$a + b -$

$3\log_5(-2(x-1)) + 6 \overset{-6}{=} 9 - 6$



$\frac{3}{3}\log_5(-2(x-1)) = \frac{3}{3}$

$\log_5(-2(x-1)) = 1$

$\frac{5^1}{-2} = \frac{-2(x-1)}{-2}$

$-\frac{5}{2} \overset{+1}{=} x - 1 \quad +1$

$-\frac{3}{2} = x$

Donc $x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$

d) $log_2(x+4) + 5 \geq -log_2(x-6) + 9$

$+\log_2(x-6) \quad -5 \qquad +\log_2(x-6) \quad -5$

$\log_2(x+4) + \log_2(x-6) = 4$

$\log_2(x+4)(x-6) = 4$

$2^4 = x^2 - 2x - 24$

$x^2 - 2x - 40 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - (4 \cdot 1 \cdot -40)}}{2}$

$x_1 = -5,4 \qquad x_2 = 7,4$

à rejeter

$x > 7,4$

8-La réciproque d'une **fonction** logarithmique

A) Algébriquement

La réciproque de la fonction logarithmique de base c est une fonction exponentielle.

Étapes :

1- Inverser les variables

2- Isoler le y en remettant l'équation sous la forme $b^{exp} = puis$

Ex : Trouver la règle de la **réciproque** de la fonction suivante :

$$f(x) = 4\log(2(x+5)) - 2$$

$$x^{+2} = 4\log(2(y+5)) - 2^{+2}$$

$$\frac{x+2}{4} = \frac{4\log(2(y+5))}{4}$$

$$\frac{x+2}{4} = \log 2(y+5)$$

$$\frac{1}{2}\cdot 10^{\left(\frac{x+2}{4}\right)} = \frac{2(y+5)}{2}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 10^{\left(\frac{x+2}{4}\right)} -5 = y+5-5$$

$$y = \frac{1}{2}\cdot 10^{\frac{x+2}{4}} - 5$$

Rép :
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\cdot 10^{\frac{x+2}{4}} - 5$$

B) Graphiquement

Étapes

1- Déterminer l'équation de la réciproque de la fonction logarithmique

2- Compléter la table de valeurs de la fonction exponentielle obtenue

3- Intervertir les points de la table de valeurs de la fonction exponentielle pour obtenir les points de la fonction logarithmique

Ex : tracer le graphique de la réciproque de la fonction suivante :

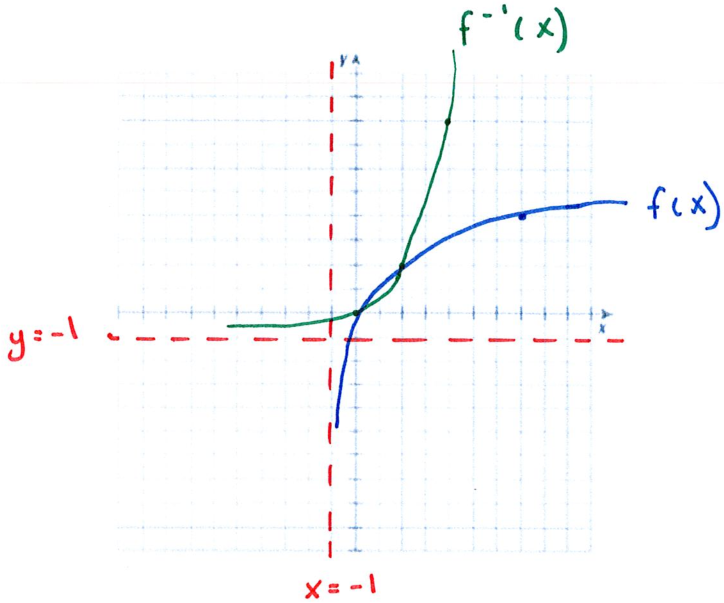
$f(x) = 2log_3(x+1)$

1) $\frac{x}{2} = \frac{2 \log_3 (y+1)}{2}$

$\frac{x}{2} = \log_3 (y+1)$

$3^{\frac{x}{2}} -1 = y+1 -1$

$y = 3^{x/2} - 1$



Forme exp

x	y
0	0
2	2
4	8

Forme log

x	y
0	0
2	2
8	4

En résumé :

- Si l'équation de l'asymptote de la fonction log est : $x = -1$ alors celle de sa réciproque (donc la fonction exp.) sera : $y = -1$
- Les fonctions sont symétriques car elles ont la même base.

9-Opérations sur les fonctions

1- Soit $f(x) = 3^x$ et $g(x) = (\frac{1}{3})^x$

Trouver $f(x) \cdot g(x) = 3^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$= 3^x \cdot (3^{-1})^x$

2- Soit $f(x) = 3log_2x$ et $g(x) = 4log_2(x+1)$

Calcule : $f(x) + g(x) =$

$3\log_2 x + 4\log_2(x+1)$

$\log_2 x^3 + \log_2 (x+1)^4$

$\log_2 (x^3 \cdot (x+1)^4)$

3- Soit $f(x) = 2$ $et\ g(x) = logx$

Prouve que $(f + g)(x) = log100x$

$2 + \log x = \log 100x$

$\log 10^2 + \log x = \log 100x$

$\log 100 + \log x = \log 100x$

$\log 100 \cdot x = \log 100x$

!!

4- Les fonctions f et g ont pour règles $f(x) = -2log_7 3(x+1)$ $et\ g(x) = 4x + 5$

Déterminez la règle de chacune des fonctions suivantes :

a) $f°g =$

$= -2\log_7 3(4x+5+1)$

$= -2\log_7 3(4x+6)$

$= -2\log_7 3(4(x+3/2))$

$= -2\log_7 12(x+3/2)$

b) $g°f$

$= 4(-2\log_7 3(x+1)) + 5$

$= -8\log_7 3(x+1) + 5$