Les fonctions logarithmiques

ATHÉMATIQUE SN5

Nom : ____________________ Groupe : _________

1- Fonction logarithmique de base

Toute fonction logarithmique est la réciproque d'une fonction exponentielle. Le passage de la forme logarithmique à la forme exponentielle s'effectue selon l'équivalence suivante :

$$\boxed{x = c^{y} \iff y = \log_c x}$$

Voici les restrictions :

- Sur la base : $c \neq 1$ et $c > 0$
- Sur la puissance : $x > 0$
- **Aucune restriction pour l'exposant (donc pour y)**

Y est le logarithmique, **c'est l'exposant. On peut le lire ainsi : l'exposant qu'il faut donner à c pour obtenir** x c'est y.

Les fonctions en base 10 et en base e (base du logarithmique naturel) sont les plus utilisées. On peut les écrire de la façon suivante :

- $10^y = x \iff y = \log_{10} x \iff \boxed{y = \log x}$
- $e^y = x \iff y = \log_e x \iff \boxed{y = \ln x}$

Sur la calculatrice :
touche log : base 10 et
touche ln : base e

Exercice :

1-Déterminez la forme logarithmique des fonctions exponentielles suivantes :

a) $y = 3^x$

$x = \log_3 y$

b) $y = 2 \cdot 3^x$

$\frac{y}{2} = \frac{2 \cdot 3^x}{2}$

$x = \log_3 \left(\frac{y}{2}\right)$

c) $y = 2 \cdot 3^{(x+2)} - 4$

$y + 4 = 2 \cdot 3^{(x+2)} - 4 + 4$

$\frac{y+4}{2} = \frac{2 \cdot 3^{(x+2)}}{2}$

$x + 2 - 2 = \log_3 \left(\frac{y+4}{2}\right) - 2$

$x = \log_3 \left(\frac{y+4}{2}\right) - 2$

2- Calculez au dix millième près la valeur des logarithmiques suivants :

a) $\log 3 = 0,4771$ b) $ln6 = 1,7918$ c) $log10 = 1$ d) $lne = 1$

$10^{\square} = 3$ $e^{\square} = 6$ $10^{\square} = 10$ $e^{\square} = e$

$\left(e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad e = \lim \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right)$

2- Représentation graphique de la fonction de base :

$$y = log_c x$$

1-Si la base c > 1 : prenons différentes bases : c = 2, c = e et c = 10

1- Transforme en exponentielle :

2- Donne une valeur à y et calcule x !

$y_1 = log_2 x$

$x = 2^y$

x	y
1/2	-1
1	0
2	1
4	2

$y_2 = log_e x$

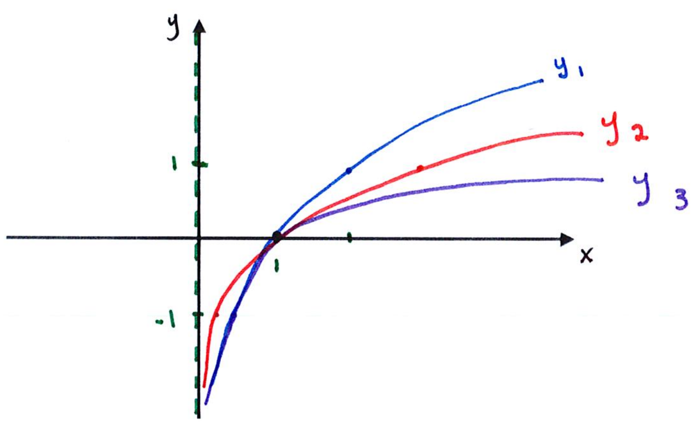
$x = e^y$

x	y
(0,37) 1/e	-1
1	0
(2,72) e	1
≈ 7,39	2

$y = log_{10} x$

$x = 10^y$

x	y
1/10	-1
1	0
10	1
100	2



Remarque : Fonctions croissantes (base > 1) et passe par (0,1) (a = 1 et (h, k) => (0,0))
Equation de l'asymptote : x = 0 (ou x = h)

1-Si la base 0 < c < 1 : prenons différentes bases : $c = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{e}$ et $c = \frac{1}{10}$

1- Transforme en exponentielle :

2- Donne des valeurs à y et calcule x!

$y_1 = log_{\frac{1}{2}} x$

$x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$

x	y
2	-1
1	0
1/2	1
1/4	2

$y_2 = log_{\frac{1}{e}} x$

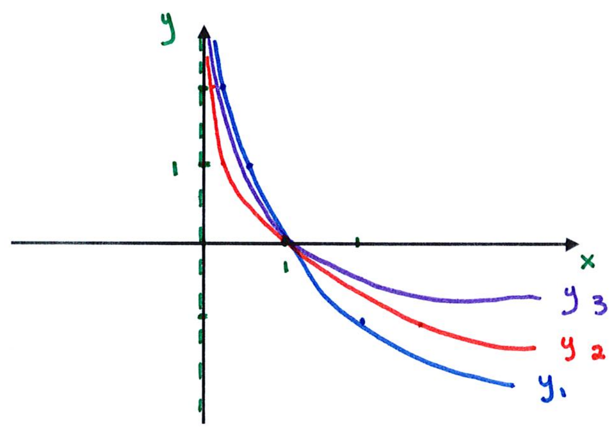
$x = \left(\frac{1}{e}\right)^y$

x	y
(2,78) e	-1
1	0
1/e	1
(0,14) $(1/e)^2$	2

$y = log_{\frac{1}{10}} x$

$x = \left(\frac{1}{10}\right)^y$

x	y
10	-1
1	0
1/10	1
1/100	2



Remarque : Fonctions décroissantes (0 < base < 1), passe par (0, 1) (a = 1 et (h, k) => (0, 0)
Equation de l'asymptote x = 0 (x = h)

Cette étude de graphique nous permet de faire trois conclusions :

exposant

1- Le logarithme de 1 est 0

↳ puissance

Ex :

$y = \log_2 1 \iff 2^y = 1$

$2^y = 2^0$

$y = 0$

$$\boxed{0 = \log_c 1 \iff c^0 = 1}$$

2- Le logarithme de la base est égal à $\underline{\ 1\ }$

Si la puissance est égale à la base => l'exposant doit être 1

Ex : $\log_3 3 = y \iff 3^y = 3$

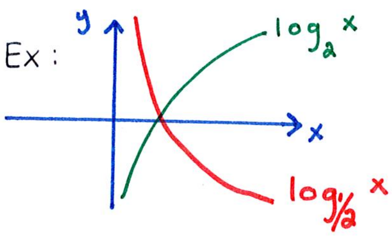
$3^y = 3^1$

$y = 1$

$$\boxed{1 = \log_c c \iff c^1 = c}$$

3- Pour inverser une base

Ex :



$$\boxed{\log_{\frac{1}{c}} x = -\log_c x}$$

donc $\log_c x = -\log_{1/c} x$

$\begin{cases} \log_2 (2) = 1 \\ \log_{1/2} (2) = -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \log_{10} (100) = 2 \\ \log_{1/10} (100) = -2 \end{cases}$

3- Fonction logarithmique translatée

Forme recherchée :

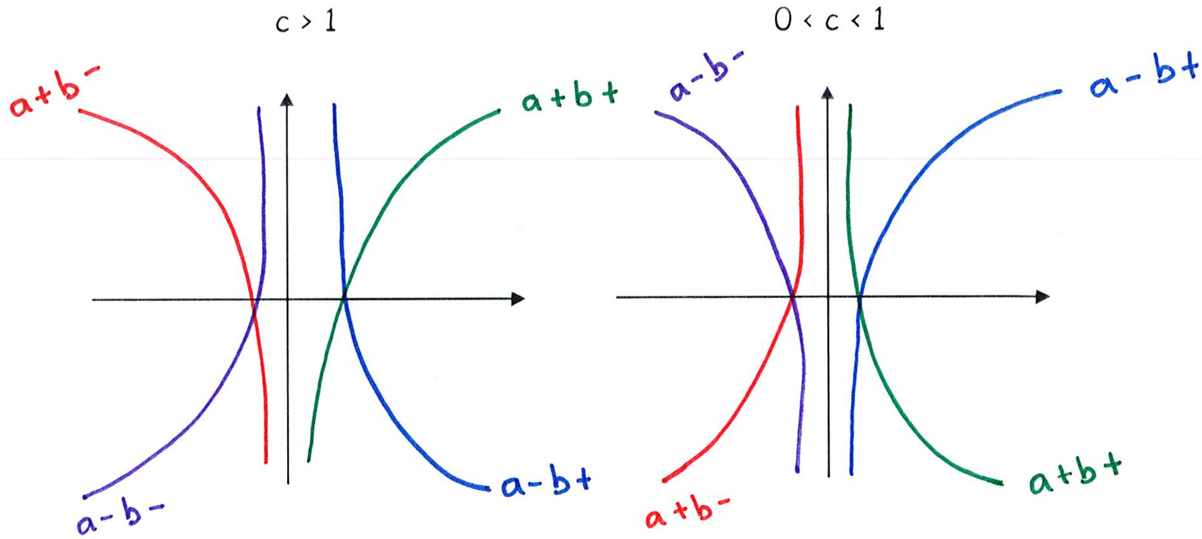
$$\boxed{f(x) = a \log_c b(x-h) + k}$$

Restrictions : $c > 0$, $c \neq 1$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $x > 0$

Rôle des paramètres :

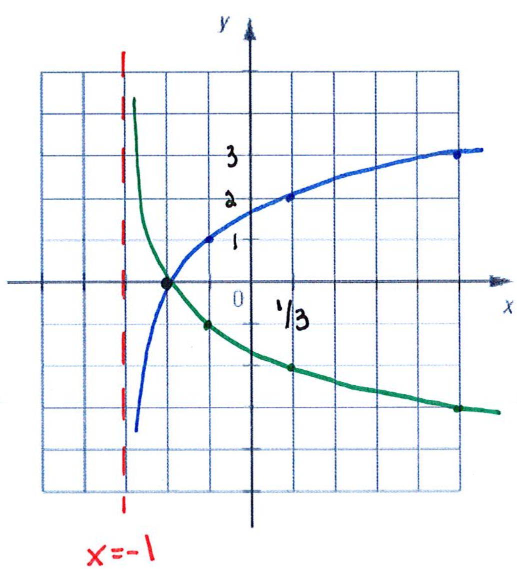
- L'équation de l'asymptote est : $x = h$
- La fonction est croissante si $c > 1$ et a et b de mêmes signes
- La fonction est décroissante si $0 < c < 1$ et a et b de signes contraires
- Si b est négatif alors il y a une symétrie par rapport à l'asymptote
- Si a est négatif alors il y a une symétrie par rapport à l'axe des x
  (a peut devenir positif si on inverse la base car $log_c x = -log_{\frac{1}{c}} x$)

Ex :



Exercice : Trace le graphique de chacune des paires des fonctions logarithmiques dans le même plan cartésien. Si tu dois faire un graphique précis, pour pouvoir faire une table de valeurs, tu dois passer par la fonction exponentielle. Si tu traces l'esquisse, sers-toi du rôle des paramètres.

a) $f(x) = \log_2 3(x+1)$
$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} 3(x+1)$



$f(x)$:

$$\frac{2^y}{3} = \frac{3(x+1)}{3}$$

$$\frac{2^y}{3} - 1 = x + 1 - 1$$

$$\frac{2^y}{3} - 1 = x$$

$g(x)$:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^y}{3} = \frac{3(x+1)}{3}$$

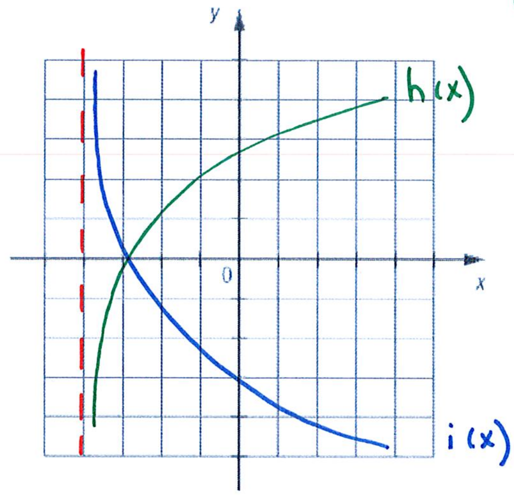
$$\frac{2^{-y}}{3} - 1 = x + 1 - 1$$

$$\frac{2^{-y}}{3} - 1 = x$$

x	f(x)	g(x)
-2/3	0	0
-1/3	1	-1
1/3	2	-2
5/3	3	-3

b) $h(x) = 2\log_3(x + 4)$
$i(x) = -2\log_3(x + 4)$

Esquisse!



$h(x)$:

asy : $x = -4$

$c > 1$

$a > 0 \quad b > 0$

donc

$i(x)$

asy : $x = -4$

$c > 1$

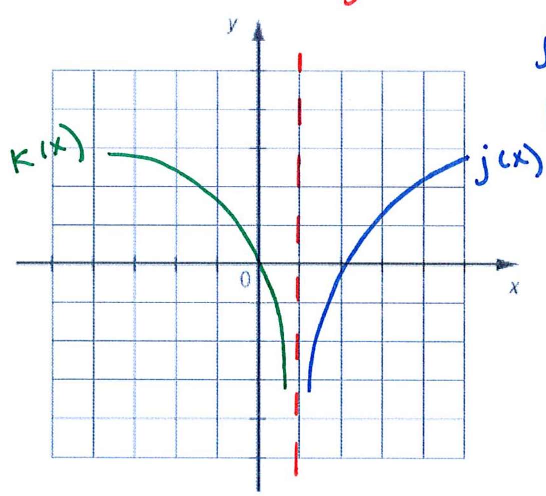
$a < 0 \quad b > 0$

↳ symétrie d'axe des x

c) $j(x) = \log_4(x - 1)$
$k(x) = \log_4 -(x - 1)$

} asy $x = 1$ et $c > 0$

Esquisse

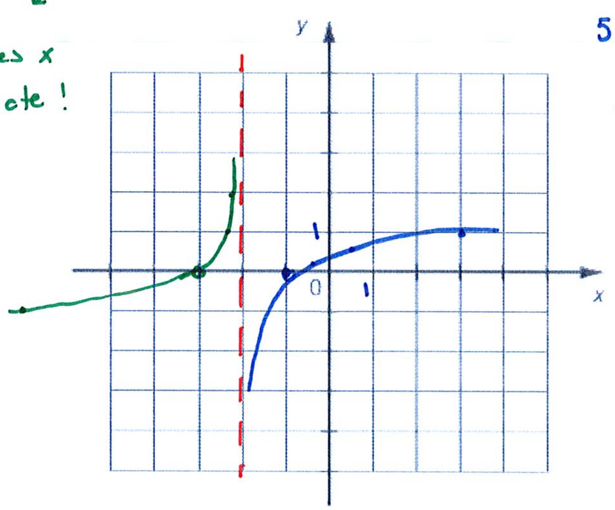


$j(x)$: a + b +

$k(x)$: a + b − → donc symétrie par rapport à l'asymptote!

d) $l(x) = \log_5(x + 2)$
$m(x) = -\log_5 -(x + 2)$

a − b −
sym axe des x
sym asymptote!



$i(x)$:

$y = \log_5(x+2)$

$5^{y} \, {}^{-2} = x + 2 \, {}^{-2}$

$5^y - 2 = x$

x	y
−1	0
3	1
0,23	1/2
−0,505	1/4

$m(x)$:

$\underset{\div -1}{y} = \underset{\div -1}{-\log_5} -(x + 2)$

$-y = \log_5 -(x + 2)$

$5^{-y} = -(x + 2)$

$-1\left(\frac{1}{5}\right)^y = \underset{\div -1}{-}(x+2)$

$-\left(\frac{1}{5}\right)^y - 2 = x$

x	y
−3	0
−2,2	1
−7	−1
−2,04	2

Fais l'étude complète du graphique suivant :

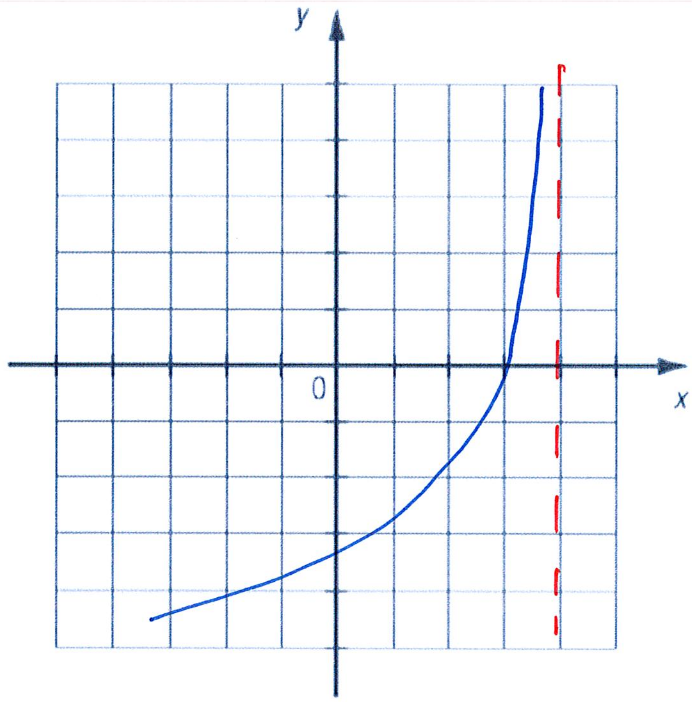
$$f(x) = -2log_3 - (x-4)$$

1) Trace l'esquisse du graphique

asy : $x = 4$

$c > 1$

$a -$ $b -$



2) Dom : $]-\infty, 4]$ image : $\mathbb{R}$

3) La variation : croissante $x \in -\infty, 4]$

5) Le zéro : $\frac{-2 \log_3 -(x-4)}{-2} = \frac{0}{-2}$

$\log_3 -(x-4) = 0$

$3^0 = -(x-4)$

$1 = -(x-4)$

$-1 \overset{+4}{=} x - 4^{+4}$

$3 = x$

6) Le signe : positive : $x \in [3, 4[$

négative : $x \in]-\infty, 3]$

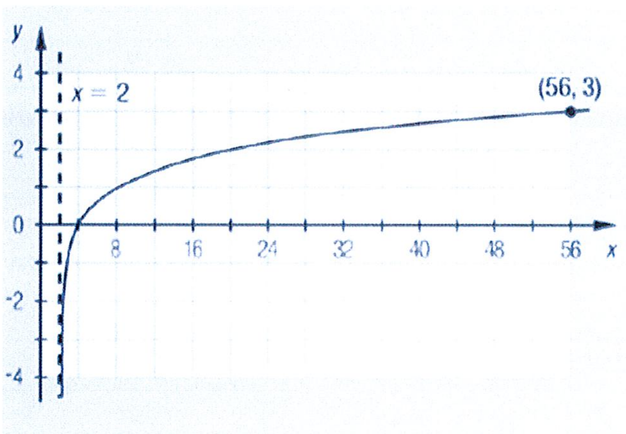
7) L'ordonnée l'origine (tu dois résoudre une équation logarithmique, donc à suivre)

4-Recherche de la règle d'une fonction logarithmique sous la forme :

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = \log_c b(x-h) \\ \text{ici } a = 1 \end{array}}$$

Cas #1 : Connaissant l'asymptote, les coordonnées de l'abscisse à l'origine et un point.

Ex : Détermine l'équation de la fonction logarithmique suivante :



asymptote
$x = 2$ donc $h = 2$

abscisse à l'origine est donnée par
$\left(\frac{1}{b} + h , 0\right)$

1) Trouve b : abs. à l'origine $x = 4$

$\frac{1}{b} + h = 4$

$\frac{1}{b} + 2 \overset{-2}{=} 4 - 2$

$\frac{1}{b} = 2$

$b = 1/2$

2) Trouve c : $P_t(56, 3)$

$y = \log_c b(x-h)$

$3 = \log_c 0{,}5(56-2)$

$3 = \log_c 27$

$\sqrt[3]{c^3} = \sqrt[3]{27}$

$c = 3$

Rép :

$f(x) = \log_3 1/2(x-2)$

Cas #2 : Connaissant plusieurs points

1) Trouve c :

x	4	8	20	56
y	0	1	2	3

$+4 \quad +12 \quad +36$

$c = \frac{12}{4} = \frac{36}{12}$

$c = 3$

2) Comme il reste 2 inconnus à trouver (a et b) alors trouve un système d'équations !

Point $(4,0)$: $y = \log_c b(x-h)$

$0 = \log_3 b(4-h)$

$3^0 = b(4-h)$

$1 = b(4-h)$

$b_1 = \frac{1}{4-h}$

Point $(8,1)$: $y = \log_c b(x-h)$

$1 = \log_3 b(8-h)$

$3^1 = b(8-h)$

$3 = b(8-h)$

$b_2 = \frac{3}{8-h}$

3) Par comparaison trouve h :

$b_1 = b_2$

$\frac{1}{4-h} = \frac{3}{8-h}$

$1(8-h) = 3(4-h)$

$\overset{-8}{8} - h \overset{+3h}{=} \overset{-8}{12} - 3h + 3h$

$\frac{2h}{2} = \frac{4}{2}$

$h = 2$

4) Trouve b :

$b_1 = \frac{1}{4-2}$

$b = \frac{1}{2}$

Rép : $f(x) = \log_3 \frac{1}{2}(x-2)$