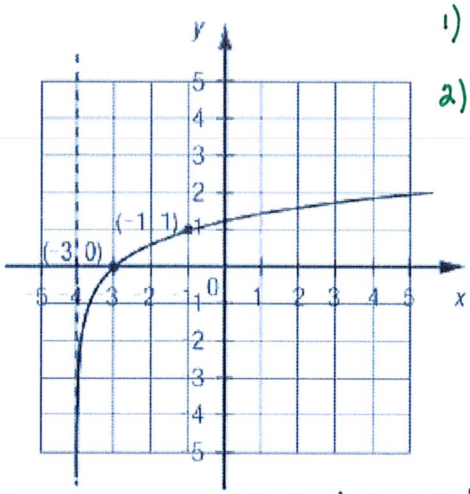
Exercice : Détermine la règle des fonctions logarithmiques suivantes :

a)



1) asy : $x = -4$ donc $h = -4$

2) abs : $(-3, 0)$

donc $\frac{1}{b} + h = -3$

$\frac{1}{b} - 4 \overset{+4}{=} -3 + 4$

$\frac{1}{b} = 1$

$b = 1$

3) Trouve c : Pt $(-1, 1)$: $y = \log_c b(x - h)$

$1 = \log_c 1(-1 + 4)$

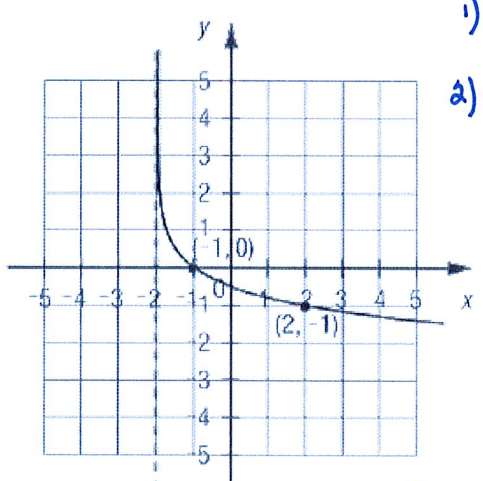
$1 = \log_c 3$

$c^1 = 3$

$c = 3$

Rép : $y = \log_3 (x + 4)$

b)



1) asy : $x = -2$ donc $h = -2$

2) abs : $(-1, 0)$

donc $\frac{1}{b} + h = -1$

$\frac{1}{b} - 2 \overset{+2}{=} -1 + 2$

$\frac{1}{b} = 1$

$b = 1$

3) Trouve c : Pt $(2, -1)$: $y = \log_c b(x - h)$

$-1 = \log_c 1(2 + 2)$

$-1 = \log_c 4$

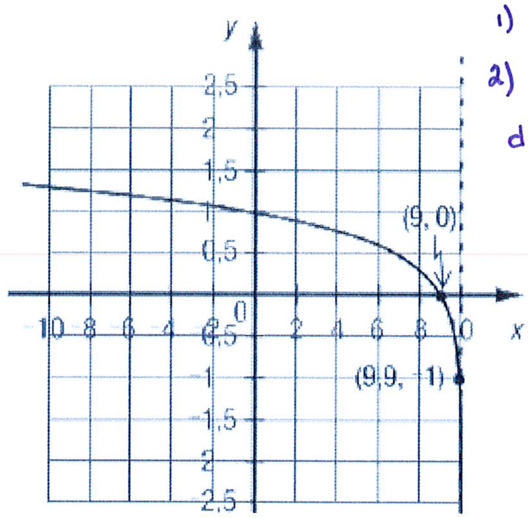
$(c^{-1})^{-1} = (4)^{-1}$

$c = \frac{1}{4}$

Rép : $f(x) = \log_{1/4} (x + 2)$

12

c)



1) asy : $x = 10$, $h = 10$

2) abs : $(9, 0)$

donc $\frac{1}{b} + h = 9$ $\qquad \frac{1}{b} + 10 \underset{-10}{=} 9 \; {-10}$

$\frac{1}{b} = -1 \qquad b = -1$

3) Trouve c: $(9{,}9 , -1)$: $y = \log_c b(x-h)$

$-1 = \log_c -1(9{,}9 - 10)$

$-1 = \log_c (0{,}1)$

$c^{-1} = 0{,}1 \qquad (c^{-1})^{-1} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$

$c = 10$

Rép: $f(x) = \log -(x - 10)$

d)

X	Y
$-\frac{7}{4}$	-4
$-\frac{3}{2}$	-3
-1	-2
0	-1

$+\frac{1}{4}$

$+\frac{1}{2}$

$+1$

1) Trouve c :

$\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 1 \div \frac{1}{2} \qquad c = 2$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = 1 \cdot \frac{2}{1} = 2$

2) Trouve 2 équations: $y = \log_c b(x-h)$

① pt $(-1, -2)$

$-2 = \log_2 b(-1-h)$

$2^{-2} = b(-1-h)$

$\frac{1}{4} = b(-1-h)$

$b_1 = \frac{1}{4(-1-h)}$

② pt $(0, -1)$

$-1 = \log_2 b(0-h)$

$2^{-1} = b(-h)$

$\frac{1}{2} = -bh$

$b_2 = -\frac{1}{2h}$

3) Trouve h : $b_1 = b_2$

$\frac{1}{4(-1-h)} = \frac{-1}{2h}$

$2h = -4(-1-h)$

$2h \underset{-4h}{=} 4 + 4h - 4h$

$\frac{-2h}{-2} = \frac{4}{-2}$

$h = -2$

4) Trouve b :

$b = \frac{-1}{2 \cdot -2}$

$b = \frac{1}{4}$

Rép: $f(x) = \log_2 \frac{1}{4}(x + 2)$

1) Trouve c : $\frac{20}{4} = \frac{100}{20} = 5$

e)

	X	Y
+4	−1	0
+20	3	1
+100	23	2
	123	3

2) Trouve 2 équations : $y = \log_c b(x-h)$

pt $(-1, 0)$

$0 = \log_5 b(-1-h)$

$5^0 = b(-1-h)$

$1 = b(-1-h)$

$b_1 = \frac{1}{(-1-h)}$

pt $(3, 1)$

$1 = \log_5 b(3-h)$

$5^1 = b(3-h)$

$b_2 = \frac{5}{3-h}$

3) Trouve h : $b_1 = b_2$

$\frac{1}{(-1-h)} = \frac{5}{(3-h)}$

$3 - h = 5(-1-h)$

$\overset{-3}{3} - \overset{+5h}{h} = -5 \overset{-3}{-} 5h \; {+5h}$

$\frac{4h}{4} = \frac{-8}{4}$

$h = -2$

4) Trouve b :

$b = \frac{5}{3--2}$

$b = \frac{5}{5}$

$b = 1$

Rép :

$y = \log_5 (x+2)$

5- Propriétés des logarithmiques

Certaines propriétés nous serviront à résoudre des équations logarithmiques tandis que d'autres propriétés nous permettront de trouver des équations équivalentes que l'on pourra résoudre.

A) Propriétés de base de résolution :

1) $log_c 1 = 0$

ex : $\log_3 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3^0 = 1$

2) $log_c c = 1$

ex : $\log_2 2 = y \quad \Rightarrow \quad 2^y = 2$

$2^y = 2^1$

$y = 1$

3) $log_c c^n = n$ $\Rightarrow$ $\log_c c^n = n \cdot \log_c c = n \cdot 1 = n$

ex : $\log_2 2^4 = y$ $\Rightarrow$ $2^y = 2^4$

$y = 2$

4) $c^{log_c m} = m$

ex : $2^{\log_2 4} = x \iff \log_2 x = \log_2 4$

$x = 4$

2 log de même base alors compare les puissances !

B) Propriétés pour trouver des équations équivalentes

1) **Loi du logarithmique d'un produit** : Le logarithmique d'un produit de facteurs égale la somme des logarithmes de chacun des facteurs.

$$log_c(M \cdot N) = log_c M + log_c N$$

Démontre :

Utilisons la dernière propriété

$$\Rightarrow \underbrace{C^{\log_c (M \cdot N)}}_{M \cdot N} = \underbrace{C^{\log_c M}}_{M} \cdot \underbrace{C^{\log_c N}}_{N}$$

2 bases identiques qui se multiplient alors ⊕ les exposants

$$\iff C^{\log_c (M \cdot N)} = C^{\log_c M + \log_c N}$$

$$\iff \log_c (M \cdot N) = \log_c M + \log_c N$$

cqfd!

2 bases identique donc compare les exposants

Ex :

a) $log_3 27 = \log_3 3 \cdot 9$

$= \log_3 3 + \log_3 9$

$= 1 + \log_3 3^2$

$= 1 + 2$

$= 3$

ou $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$

b) $log_{x+3}(x^2 + 6x + 9) = \log_{x+3} (x+3)^2$

$= \log_{x+3} (x+3)(x+3)$

$= \log_{x+3} (x+3) + \log_{x+3} (x+3)$

$= 1 + 1$

$= 2$

ou directement $\log_{x+3} (x+3)^2 = 2$

2) Loi du logarithme d'un quotient : Le logarithme d'un quotient de deux nombre égale la différence des logarithmes du dividende et du diviseur :

$$log_c\left(\frac{M}{N}\right) = log_c M - log_c N$$

ex : $log_3\left(\frac{9}{27}\right) = \log_3 9 - \log_3 27$

$= \log_3 3^2 - \log_3 3^3$

$= 2 - 3$

$= -1$

ex :

$$\log_6 x + \log_6 y - \log_6 a - \log_6 b$$

$$\log_6 x \cdot y - (\log_6 a + \log_6 b)$$

$$\log_6 x \cdot y - \log_6 a \cdot b$$

$$\log_6 \left(\frac{xy}{ab}\right)$$

3) Le logarithme d'une puissance : Le logarithme d'un nombre élevé à un certains exposant égale le produit de cet exposant par le logarithme de ce nombre.

$$log_c M^n = n log_c m$$

ex : $\log 5^3 = 3 \log 5$

$= 3 \cdot 0,6990$

$\approx 2,0969$

4) Inverser les bases

$$log_c M = -log_{\frac{1}{c}} M$$

ex : $log_{\frac{1}{2}} 64 = -\log_2 64$

$= -\log_2 2^6$

$= -6$

5) Loi du changement de base : Le logarithme de *m* dans la base *n* est égal au quotient des logarithmes des deux nombres *m* et *n* dans une même base.

$$log_{\,n}M = \frac{log_aM}{log_aN}$$

Très pratique pour utiliser votre calculatrice ! Attention de bien fermer vos parenthèses!

ex : $log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2}$

$= \frac{0,6990}{0,3010}$

$\approx 2,3219$

Note : Si l'équation à résoudre est sous la forme exponentielle il suffit d'appliquer des log en base ___10___ à chaque terme (ce qui est l'équivalent de la propriété d'un changement de base)

Ex ; a) $3^5 = 5^x$

$\log 3^5 = \log 5^x$

$\frac{5 \log 3}{\log 5} = \frac{x \log 5}{\log 5}$

$3,4130 \approx x$

b) $2^{x+1} = 5^x$

$\log 2^{x+1} = \log 5^x$

$(x+1) \log 2 = x \log 5$

$-x \log 2$

$x \log 2 + 1 \log 2 = x \log 5 - x \log 2$

$\log 2 = x \log 5 - x \log 2$

$0,3010 = 0,6990x - 0,3010x$

$\frac{0,3010}{0,398} = \frac{0,398x}{0,398}$

$0,76 \approx x$

Exercices :

1- Écris l'expression sous la forme d'une somme ou d'une différence :

a) $log_3\left(\frac{x}{y^2}\right) = \log_3 x - \log_3 y^2$

$= \log_3 x - 2\log_3 y$

b) $log_3\left(\frac{3}{ab}\right) = \log_3 3 - \log_3 (a \cdot b)$

$= \log_3 3 - (\log_3 a + \log_3 b)$

$= \log_3 3 - \log_3 a - \log_3 b$

c) $log_5 5a^2 = \log_5 5 + \log_5 a^2$

$= 1 + 2\log_5 a$

2- Donne une expression équivalente comportant un seul logarithme :

$$\frac{log_a 81a}{log_a 45 - log_a 5} = \frac{\log_a 9^2 a}{\log_a (45/5)}$$

$$= \frac{\log_a 9^2 a}{\log_a 9}$$

$$= \frac{\log_a 9^2 + \log_a a}{\log_a 9}$$

$$= \frac{2\log_a 9}{\log_a 9} + \frac{\log_a a}{\log_a 9}$$

$$= 2 + \frac{1}{\log_a 9}$$

3- Évalue

a) $log_3 36 - 2log_3 2 = \log_3 36 - \log_3 2^2$

$= \log_3 \left(\frac{36}{4}\right)$

$= \log_3 9$

$= \log_3 3^2 = 2$

b) $\frac{log_3 81}{2} = \frac{\log_3 3^4}{2}$

$= \frac{4}{2} = 2$

c) $log_2 3 = x \Rightarrow 2^x = 3$

$\log 2^x = \log 3$

$x \log 2 = \log 3$

$x = \frac{\log 3}{\log 2} \qquad x \approx 1,5850$

ou $x = \frac{\log 3}{\log 2}$ changement de base !

4- Trouve la valeur de :

* On décompose puis on remplace !

$log_a\sqrt{24}$ si $log_a 2 = 3$ et $log_a 3 = 4$

$\log_a 24^{1/2} = \frac{1}{2} \log_a 24$

$= \frac{1}{2} \log_a 3 \cdot 8$

$= \frac{1}{2}(\log_a 3 + \log_a 8)$

$= \frac{1}{2}(\log_a 3 + \log_a 2^3)$

$= \frac{1}{2}(\log_a 3 + 3\log_a 2)$

$= \frac{1}{2}(4 + 3 \cdot 3)$

$= \frac{13}{2}$

5- Trouve $log_4 5$ sachant que $log_5 4 = 2x$

* Changement de base! (On choisit base 5 !!)

$$\frac{\log_5 5}{\log_5 4} = \frac{1}{2x}$$

6- Calcule

$5^{2log_5 3} + log_2 8$

$= 5^{\log_5 3^2} + \log_2 2^3$

$= 5^{\log_5 9} + 3\log_2 2$

$= 9 + 3$

$= 12$

7- Calcule

$2log_a a^2 + (3log_a a)^3 - 4log_a\sqrt{a} - 6log_a a + 121log_a 1$

$= 4 + (3\cdot 1)^3 - 4\cdot\frac{1}{2}\log_a a - 6 + 121\cdot 0$

$= 4 + 27 - 2 - 6$

$= 23$

8-Calcule

$log100 - log1000^3 + (log10)^5$

$= \log(10)^2 - 3\log(10)^3 + (1)^5$

$= 2 - 3\cdot 3 + 1$

$= -6$

9-Calcule

$$\frac{log_a a^3}{log_a \sqrt{a}} = \frac{3}{\frac{1}{2} log_a a}$$

$$= \frac{3}{\frac{1}{2}}$$

$$= 6$$

10- Si $log_a 2 = x$ et $log_a 5 = 2y$

Résous $log_a \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right) = log_a 2^{1/2} - log_a 10$

$$= \frac{1}{2} log_a 2 - (log_a (2 \cdot 5))$$

$$= \frac{1}{2} log_a 2 - (log_a 2 + log_a 5)$$

$$= \frac{1}{2} x - (x + 2y)$$

$$= \frac{1}{2} x - x - 2y$$

$$= -\frac{1}{2} x - 2y$$

11- Démontre

a) $\frac{log_3 8}{log_3 2} = 3$

$$= \frac{log_3 2^3}{log_3 2}$$

$$= \frac{3 \cancel{log_3 2}}{\cancel{log_3 2}}$$

$$= 3$$!!

b) $\underbrace{(log_2 3)(log_3 2)}$ $= 1$

Changement de base!

mettre en base 2

$$= \cancel{log_2 3} \cdot \frac{log_2 2}{\cancel{log_2 3}}$$

$$= log_2 2$$

$$= 1$$