9- Composée

Exemple : Les fonctions f et g sont définies par les règles :

$$f(x) = 3(2)^{(x+5)} + 2 \quad et \quad g(x) = -2x + 3$$

Détermine :

a) $f^\circ g(x) = f(g(x)) = 3(2)^{(-2x+3+5)} + 2$

$= 3(2)^{-2x+8} + 2$

$= 3(2)^{-2(x-4)} + 2$

$= 3\left(\frac{1}{4}\right)^{(x-4)} + 2$

b) $g^\circ f(3)$

1) $f(3) = 3(2)^{(3+5)} + 2$

$f(3) = 3(2)^8 + 2$

$f(3) = 770$

2) $g(770) = -2 \cdot 770 + 3$

$= -1537$

10- La réciproque d'une fonction exponentielle

Graphiquement :

Toute fonction exponentielle a comme réciproque une fonction logarithmique de même base. Il suffit d'intervertir les x et y pour obtenir la fonction logarithmique

Exemple :

$$f(x) = 2^{x+1} - 3$$

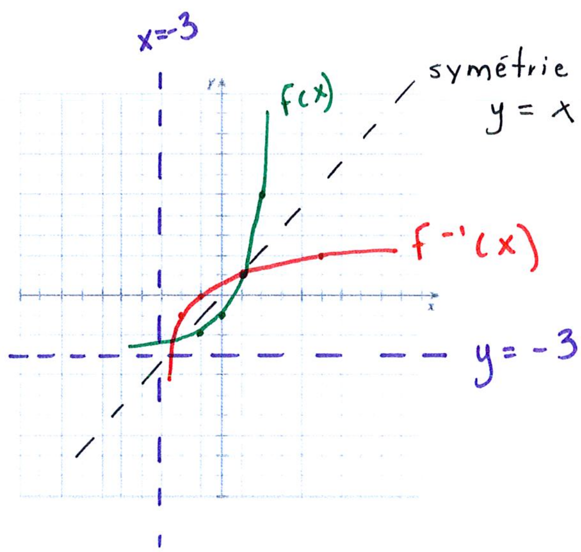
utilisez votre calculatrice!

$f(x)$

x	y
-1	-2
0	-1
1	1
2	5

$f^{-1}(x)$

x	y
-2	-1
-1	0
1	1
5	2



En résumé :

1- L'équation de l'asymptote de f(x) : $y = -3$

2- L'équation de l'asymptote de $f^{-1}(x)$: $x = -3$

3- La réciproque et sa fonction sont symétrique par rapport à la bissectrice d'équation $y = x$.

4- Si une fonction exponentielle est croissante alors sa réciproque sera croissante car elles ont la même base.

Algébriquement

La réciproque d'une fonction est constituée des couples intervertis d'une fonction initiale : $y = c^x$

Si on change les variables, la fonction devient :

$$\underset{\text{puissance}}{x} = \underset{\text{(base)}}{c}^{\,y\text{(exposant)}} \quad \text{ou} \quad \overset{\text{(exposant)}}{y} = \log_{\underset{\text{base}}{c}} x \text{ (puissance)}$$

Note : L'exposant que l'on attribue à une base est appelé logarithme.

Ainsi y est logarithme de x en base c. D'où la notation :

* $\boxed{c^y = x \iff y = \log_c x}$ *

Exercice : détermine la réciproque des fonctions exponentielles suivantes :

#1 $y = 2^x$ -> C'est une fct exponentielle car x est en exposant

$x = 2^y$ -> C'est une fct logarithmique car y est en exposant!

* Toujours mettre l'équation sous la forme

$$y = \log_c x$$

donc $y = \log_2 x$

ou $f^{-1}(x) = \log_2 x$

#2 $y = 3 \cdot 4^x$

1) Intervertir x et y

$x = 3 \cdot 4^y$

2) Forme recherchée : $x = c^y$

donc $\frac{x}{3} = \frac{3 \cdot 4^y}{3}$

$\frac{x}{3} = 4^y$

3) Forme logarithmique:

$y = \log_4\left(\frac{x}{3}\right)$ ou $f^{-1}(x) = \log_4\left(\frac{x}{3}\right)$

#3 $y = 2^{(x-4)} + 3$

1) $x - 3 = 2^{(y-4)} + 3 - 3$

2) $x - 3 = 2^{(y-4)}$

3) $y - 4 + 4 = \log_2 (x-3) + 4$

donc $y = \log_2 (x-3) + 4$

ou $f^{-1}(x) = \log_2 (x-3) + 4$

#4 $y = -4^{(2x+2)} + 5$

1) $x - 5 = -4^{(2y+2)} + 5 - 5$

2) $\frac{x-5}{-1} = \frac{-4}{-1}^{(2y+2)}$

$-(x-5) = 4^{(2y+2)}$

3) $2y + 2 - 2 = \log_4 -(x-5) - 2$

$\frac{2y}{2} = \frac{\log_4 -(x-5)}{2} \frac{-2}{2}$

$y = \frac{1}{2} \log_4 -(x-5) - 1$ ou $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \log_4 -(x-5) - 1$

Autres problèmes :

#1 Un troupeau renferme aujourd'hui 7 éléphants. Ce troupeau double à tous les 6 ans. Combien d'éléphants y aura-t-il après 45 ans ?

$Qi = 7$

$c = 2$

$n = \frac{\text{temps}}{\text{fréquence}}$

$n = \frac{45}{6} = 7.5$

$Qf = Qi \cdot c^n$

$Qf = 7 \cdot 2^{7.5}$

$Qf = 1267.13$

Donc 1267 éléphants

#2 On investit un capital de 1000$ à un taux d'intérêt de 10 % composé 2 fois par année. Détermine le capital après 15 ans.

$Qi = 1000$

$c = \frac{100}{100} + \frac{10 \div 2}{100}$

$c = \frac{105}{100} = 1,05$

$n = \frac{180 \text{ mois}}{6 \text{ mois}}$ $(15 \cdot 12)$

$n = 30$

$Qf = Qi \cdot c^n$

$Qf = 1000 \cdot 1,05^{30}$

$Qf = 4321,94\$$

Donc 4321,94 $

#3 Une balle rebondit à une hauteur égale aux 3/5 de la hauteur atteinte au bond précédent. On la laisse tomber du haut d'un édifice de 25 m de hauteur. Quelle est la hauteur atteinte par la balle après le sixième rebond ?

$Qi = 25$

$c = 3/5$

$n = \frac{6}{1}$

$Qf = Qi \cdot c^n$

$Qf = 25 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^6$

$Qf = 1,1664$

Donc 1,17 m

#4 Un panier d'épicerie pour 4 personnes coûte aujourd'hui 125 \$. Si le taux d'inflation se maintient à 3,6 % au cours des 10 prochaines années, quel sera le coût après 5 ans ?

$Qi = 125\$$

$C = \frac{100}{100} + \frac{3,6}{100}$

$C = \frac{103,6}{100} = 1,036$

$n = \frac{\text{temps}}{\text{fréquence}} = \frac{10}{2} = 5$

$Qf = Qi \cdot c^n$

$Qf = 125 \cdot (1,036)^5$

$Qf = 149,18$

Donc $149,18\$$

#5 Jérôme achète une voiture à 24 000 \$. Deux ans plus tard, la voiture est évaluée à 13 500 \$. Quelle sera la valeur de la voiture après 6 ans ?

$Qi = 24\,000$

$Qf = 13\,500$

$c = ?$

$n = 2$

$Qf = Qi \cdot c^n$

$\frac{13\,500}{24\,000} = \frac{24\,000 \cdot c^2}{24\,000}$

$(0,5625)^{1/2} = (c^2)^{1/2}$

$0,75 = c$

$Qf = Qi \cdot c^n$

$Qf = 24\,000 \cdot (0,75)^6$

$Qf = 4\,271,48$

Donc $4\,271,48\$$

#6 Une population de moustiques double à tous les 7 jours. Si on compte 5 moustiques au départ, combien y aura-t-il de moustiques après 10 jours ?

$Qi = 5$

$c = 2$

$n = \frac{10}{7}$

$Qf = Qi \cdot c^n$

$Qf = 5 \cdot 2^{10/7}$

$Qf = 13,459$

Donc 13 moustiques

#7 Une masse se désintègre selon la règle $m(t) = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}}$ où *m(t)* est la masse restante (en g)après *t* heures.

$m(t) = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{t/4}$

a) Détermine le nombre d'heure nécessaire pour que la masse restante soit de 25 g ?

$\frac{25}{100} = \frac{100}{100}\left(\frac{1}{2}\right)^{t/4}$

$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/4} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/4}$

$2 = \frac{t}{4}$

$t = 8$

Donc 8 heures

b) On appelle demi-vie d'une substance radioactive, le temps nécessaire pour que sa masse soit réduite de moitié par désintégration. Quelle est la demi-vie de cette masse ?

$\frac{50}{100} = \frac{100}{100}\left(\frac{1}{2}\right)^{t/4}$

$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/4}$

$1 = \frac{t}{4} \qquad t = 4$

Donc 4 heures

#8 Soit les deux fonctions exponentielles suivantes :

$$f(x) = 14\,(8)^{2x+3} + 1 \quad et \quad g(x) = 7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x-4} + 1$$

Détermine pour quelles valeurs de x $f(x) \geq g(x)$?

$\frac{14}{7}(8)^{2x+3} + 1 - 1 \geq \frac{7}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^{x-4} + 1 - 1$

$2(8)^{2x+3} \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{x-4}$

$2(2^3)^{2x+3} \geq 2^{-2(x-4)}$

$2^1 \cdot 2^{6x+9} \geq 2^{-2x+8}$

$2^{6x+10} \geq 2^{-2x+8}$

$6x + 2x + 10 - 10 \geq -2x + 2x + 8 - 10$

$\frac{8x}{8} \geq \frac{-2}{8}$

$x \geq -1/4$

Rép : $x \geq -1/4$