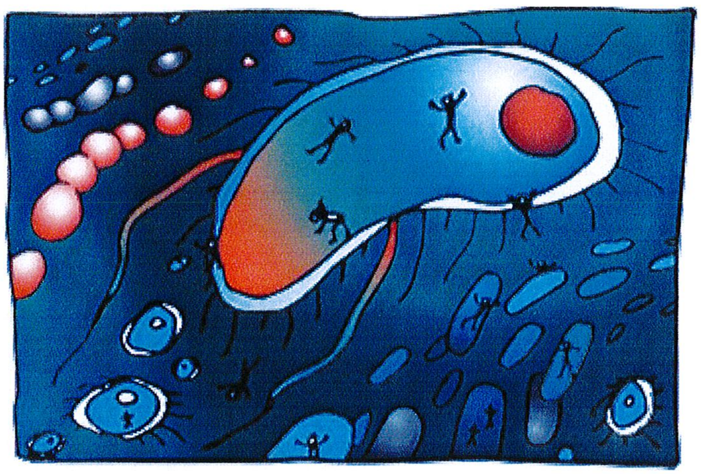
Les fonctions exponentielles



ATHÉMATIQUE SN5

Nom : ______________________________________

Groupe : ___________

1-Lois des exposants

L'exponentiation :

L'exponentiation est l'opération qui consiste à affecter une base d'un exposant afin d'obtenir une puissance.
Par exemple, dans l'expression $4^5 = 1024$, la base est 4, l'exposant est 5 et la puissance est 1024.

$$\text{base}^{\text{exposant}} = \text{puissance}$$

Propriétés :

1. $b^0 = 1$ ex: $1{,}03^0 = 1$
2. $b^1 = b$ ex: $0{,}57^1 = 0{,}57$
3. $b^{-m} = \frac{1}{b^m}$ ex: $4^{-3} = 1/4^3$
4. $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$ ex: $3^{2/3} = \sqrt[3]{3^2}$

Lois des exposants :

1. Produits des puissances : $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. Quotient des puissances : $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. Puissance d'un produit : $(a \cdot b)^m = a^m b^m$
4. Puissance d'un quotient : $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
5. Puissance d'une puissance : $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

2- Simplification :

Les propriétés des expressions exponentielles vont nous permettre de simplifier des expressions.

Exercices : simplifie les expressions suivantes :

1) $21a^{x-1} \cdot 49\,ab^{x} \cdot 9a^{2x}b^{2-x}$

* Il faut transformer les bases afin qu'elles deviennent identiques

$3 \cdot 7 \cdot a^{x-1} \cdot 7^{2}ab^{x} \cdot 3^{2}a^{2x}b^{2-x}$

$3^{1} \cdot 3^{2} \cdot 7^{1} \cdot 7^{2} \cdot a^{x-1} \cdot a^{1} \cdot a^{2x} \cdot b^{x} \cdot b^{2-x}$ } J'ai des bases identiques qui se multiplient alors j'additionne les exposants !

$3^{3} \cdot 7^{3}a^{3x} \cdot b^{2}$

$3^{3} \cdot 7^{3}a^{3x}b^{2}$

2) $\frac{-a^{3}}{3a^{5}} \times \left(\frac{(a^{2})^{3}}{-9a^{4}}\right)^{2}$

Note : la puissance de $(-a)^{m}$ est positive si m est paire et négative si m est impaire

$\frac{-a^{3}}{3a^{5}} \cdot \left(\frac{a^{6}}{-3^{2}a^{4}}\right)^{2}$

$\frac{-a^{3}}{3a^{5}} \cdot \frac{a^{12}}{(-3^{2})^{2}a^{8}}$

$\frac{-1}{3a^{2}} \cdot \frac{a^{4}}{3^{4}}$

$\frac{-a^{2}}{3^{5}}$

3- Équations exponentielles :

Pour résoudre une équation exponentielle, on peut transformer l'équation afin d'obtenir une équation équivalente contenant deux termes ayant la même base.

Ex. $2^{x} = 2^{4}$ alors $x = 4$

Donc si les bases sont les mêmes, on compare les exposants

Exercices résous les équations suivantes :

1) $4^x = 64$

1) Mettre sous la même base

2) Comparer !

$4^x = 4^3$

$\Rightarrow x = 3$

2) $3^X = 3^{2X+3}$

$x \underset{-2x}{=} 2x + 3 \; {-2x}$

$-x = 3$

$x = -3$

3) $16^{x-1} = \frac{1}{8}$

$16 = 2^4$

$8 = 2^3$

$(2^4)^{x-1} = \frac{1}{2^3}$

$2^{4x-4} = 2^{-3}$

$4x - 4 \; {+4} = -3 + 4$

$\frac{4x}{4} = \frac{1}{4}$

$x = 1/4$

4) $3^x \cdot 9^{x-1} = 27$

$3^x \cdot (3^2)^{x-1} = 3^3$

$3^x \cdot 3^{2x-2} = 3^3$

$3^{3x-2} = 3^3$

$3x - 2 \; {+2} = 3 + 2$

$3x = 5$

$x = 5/3$

5) $2 \cdot 5^{x+1} + 3 \cdot 5^{x+1} = 125$

* Faire une simple mise en évidence !

$5^{x+1}(2+3) = 125$

$5^{x+1} \cdot 5^1 = 5^3$

$5^{x+2} = 5^3$

$x + 2 = 3$

$x = 1$

6) $5^{x-1} + 2 \cdot 5^x + 320 = 3 \cdot 5^{x+1}$

* Mettre en évidence le plus grand facteur commun $\Leftrightarrow$ au plus petit exposant !

$\frac{5^x}{5^{x-1}} = 5^1 \qquad \frac{5^{x+1}}{5^{x-1}} = 5^2$

$5^{x-1} + 2 \cdot 5^x - 3 \cdot 5^{x+1} = -320$

$5^{x-1}(1 + 2 \cdot 5 - 3 \cdot 5^2) = -320$

$5^{x-1}(-64) = -320$

$5^{x-1} = 5^1$

$x - 1 = 1$

$x = 2$

7) $a^2 = \frac{16}{25}$

Note : on cherche une base. Si les exposants sont identiques on compare les bases!

$a^2 = \frac{4^2}{5^2}$

$a^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2$

$a = 4/5$

8) $a^{\frac{1}{2}} = 3$

Truc : il faut réussir à obtenir un exposant 1

$(a^{1/2})^2 = 3^2$

$a^1 = 9$

9) $b^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$

$(b^{-2/3})^{-3/2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-3/2}$

$b^1 = 4^{3/2}$

$b^1 = (2^2)^{3/2}$

$b = 2^3$

$b = 8$

10) $x^3 = \frac{1}{8}$

$x^3 = \frac{1^3}{2^3}$

$x^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$x = 1/2$

11) $\frac{9^x}{2^{2x}} = \frac{4}{9}$

$\frac{(3^2)^x}{2^{2x}} = \frac{2^2}{3^2}$

$\frac{3^{2x}}{2^{2x}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$

$2x = -2$

$x = -1$

12) $5^{-x} = 5\sqrt{5}$

$$5^{-x} = 5^1 \cdot 5^{1/2}$$

$$5^{-x} = 5^{3/2}$$

$$-x = 3/2$$

$$x = -3/2$$

13) $5^{x+3} + 5^{x-1} + 5^{x+2} = 3755$

$$\frac{5^{x+3}}{5^{x-1}} = 5^4$$

$$\frac{5^{x-1}}{5^{x-1}} = 1$$

$$\frac{5^{x+2}}{5^{x-1}} = 5^3$$

$$5^{x-1}(5^4 + 1 + 5^3) = 3755$$

$$\frac{5^{x-1}(751)}{751} = \frac{3755}{751}$$

$$5^{x-1} = 5^1$$

$$x - 1 = 1$$

$$x = 2$$

14) $4 \cdot 3^{x-1} - 2 \cdot 3^x - 3^{x+1} = -99$

$$\frac{3^{x-1}}{3^{x-1}} = 1$$

$$\frac{3^x}{3^{x-1}} = 3^1$$

$$\frac{3^{x+1}}{3^{x-1}} = 3^2$$

$$3^{x-1}(4 - 2 \cdot 3 - 3^2) = -99$$

$$\frac{3^{x-1}(-11)}{-11} = \frac{-99}{-11}$$

$$3^{x-1} = 9$$

$$3^{x-1} = 3^2$$

$$x - 1 = 2$$

$$x = 3$$

15) $3 \cdot 2^{x+2} - 48 + 2^x = 5 \cdot 2^{x+1}$

$$3 \cdot 2^{x+2} + 2^x - 5 \cdot 2^{x+1} = 48$$

$$2^x(3 \cdot 2^2 + 1 - 5 \cdot 2^1) = 48$$

$$\frac{2^x(3)}{3} = \frac{48}{3}$$

$$2^x = 16$$

$$2^x = 2^4$$

$$x = 4$$

$$\frac{2^{x+2}}{2^x} = 2^2 \qquad \frac{2^{x+1}}{2^x} = 2^1$$

4-Fonction exponentielle

Une fonction définie par une règle dans laquelle la variable indépendante apparaît en exposant est appelée une **fonction exponentielle.**

La règle d'une fonction exponentielle peut s'écrire sous la forme $f(x) = ac^{b(x-h)} + k, où\ a \neq 0\ et\ b \neq 0$ et où la base c est un nombre supérieur à 0 et différent de 1. Toutefois, les lois des exposants permettent de transformer cette règle et de l'écrire sous la forme canonique :

$$\boxed{f(x) = ac^x + k}$$

Exercices, écrivez les règles des fonctions exponentielles suivantes sous la forme canonique :

1) $f(x) = 7 \cdot 3^{(x+1)} - 9$

$f(x) = 7 \cdot 3^x \cdot 3^1 - 9$

$f(x) = 7 \cdot 3^1 \cdot 3^x - 9$

$f(x) = 21 \cdot 3^x - 9$

$a = 21$ $k = -9$
$c = 3$

2) $g(x) = 3{,}4 \cdot 5^{3x} + 1$

$g(x) = 3{,}4 \cdot 125^x + 1$

$a = 3{,}4$
$c = 125$
$k = 1$

3) $h(x) = 5 \cdot \frac{1}{3}^{(x-2)} - 4$

$h(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - 4$

$h(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot (3)^2 - 4$

$h(x) = 5 \cdot 9 \left(\frac{1}{3}\right)^x - 4$

$h(x) = 45 \left(\frac{1}{3}\right)^x - 4$

4) $i(x) = 6 \cdot 2^{(5x+3)} + 11$

$i(x) = 6 \cdot 2^{5x} \cdot 2^3 + 11$

$i(x) = 6 \cdot 2^3 \cdot 2^{5x} + 11$

$i(x) = 6 \cdot 8 \cdot 32^x + 11$

$i(x) = 48 \cdot 32^x + 11$

5-Représentation graphique

Étapes :

1- Transforme l'équation sous la forme canonique

2- Trace l'asymptote. Elle est donnée par $y = k$

3- La fonction est représentée au-dessus ou au-dessous de l'asymptote ?

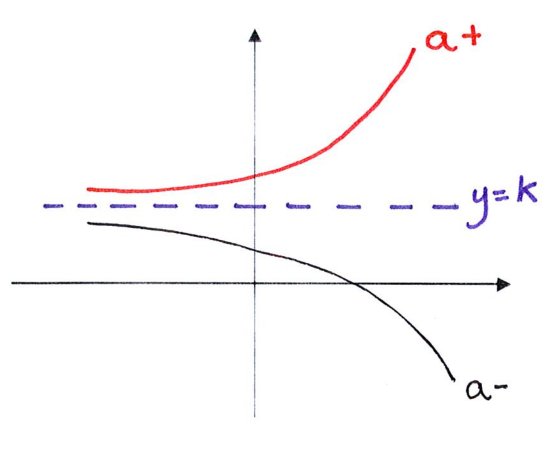
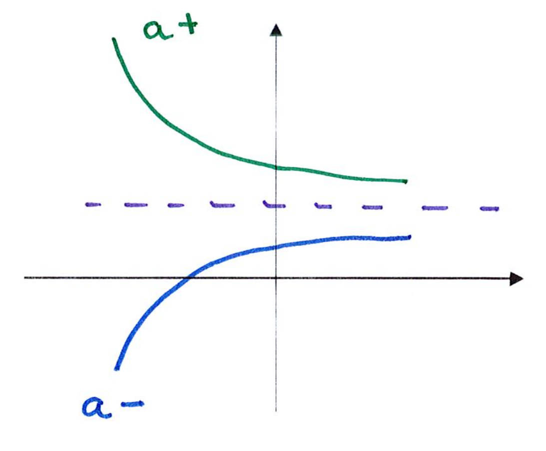
Voir le signe du paramètre a.

Si a est positif au-dessus et si a est négatif au-dessous

4- La fonction est-elle croissante ou décroissante

Voir la valeur du **paramètre** c

Exemples de graphiques :

$c > 1$	$0 < c < 1$
	

Notes :

* ➢ La courbe passe par le point : (0, a + k) *Valeur initiale !

➢ Si a et k son de signes contraires il y aura un zēro !

Exercices

#1 Remplissez le tableau suivant : * Forme canonique !

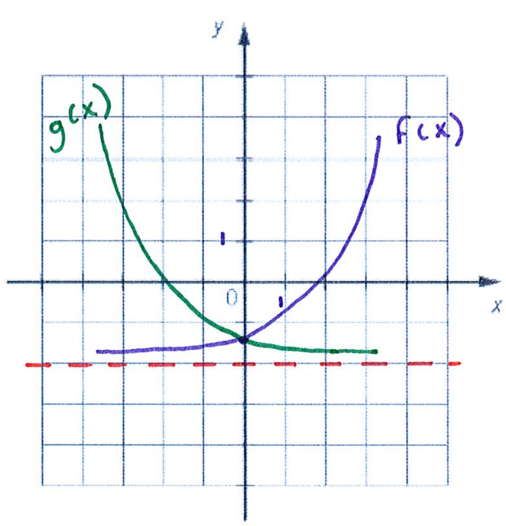
Fonction	Valeur du paramètre a	Valeur du paramètre k	Valeur initiale a + k
$f(x) = 3(2)^x - 1$	$a = 3$	$k = -1$	2
$g(x) = 5(\frac{1}{2})^x - \frac{3}{4}$	$a = 5$	$k = -3/4$	$\frac{20}{4} - \frac{3}{4} = 17/4$
$h(x) = 125(0{,}512)^{\frac{x}{3}}$ $h(x) = 125\left((0{,}512)^{1/3}\right)^x$ $= 125\left(\sqrt[3]{0{,}512}\right)^x$ $= 125 \cdot 0{,}8^x$	$a = 125$	$k = 0$	125
$i(x) = \frac{3}{2}(\frac{2}{3})^{x+2} + \frac{4}{3}$ $i(x) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \frac{2}{3}^2 + \frac{4}{3}$ $i(x) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{4}{3}$ $i(x) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{4}{3}$	$a = \frac{2}{3}$	$k = \frac{4}{3}$	$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3}$ $= 2$

#2 Tracez le graphique de chacune des paires de fonctions suivantes :

a) $f(x) = 0{,}5(3)^x - 2$
$g(x) = 0{,}5(3)^{-x} - 2$

$f(x)$: $a > 0$
$c > 1$
asy : $y = -2$
point : $(0, a+k)$
$(0, -1{,}5)$

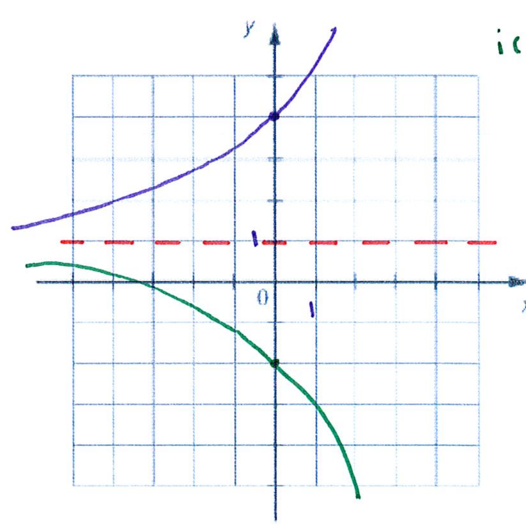
$g(x)$: Forme canonique !
$g(x) = 0{,}5\left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$
$a > 0$
$0 < c < 1$
asy : $y = -2$
Point $(0, -1{,}5)$



b) $h(x) = 3(2)^x + 1$
$i(x) = -3(2)^x + 1$

$h(x)$: $a > 0$ $c > 1$
point $(0, 4)$
asy : $y = 1$

$i(x)$: $a < 0$
$c > 1$
point $(0, -2)$
asy : $y = 1$

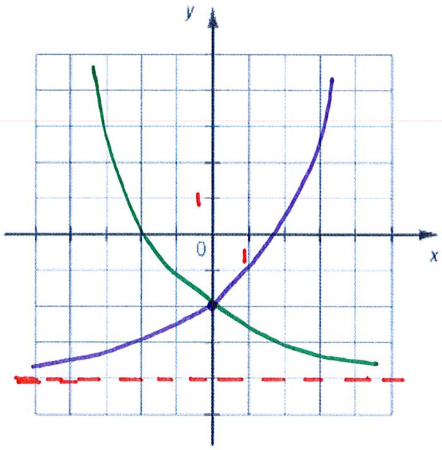


$j(x)$:
$a > 0$ $\quad c > 1$
point : $(0, -2)$

$k(x)$:
$a > 0$ $\quad 0 < c < 1$
point $(0, -2)$

c) $j(x) = 2(3)^x - 4$
$k(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x - 4$

asy :
$y = -4$

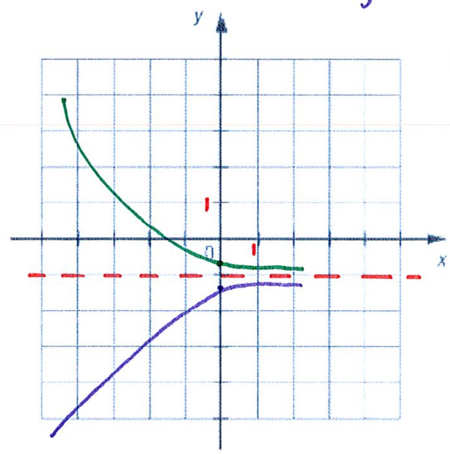


d) $l(x) = -0{,}25(4)^{-x} - 1$
$m(x) = 0{,}25\left(\frac{1}{4}\right)^x - 1$

asy : $y = -1$

$j(x) = -0{,}25\left(\frac{1}{4}\right)^x - 1$
$a < 0$
$0 < c < 1$
point $(0, -1{,}25)$

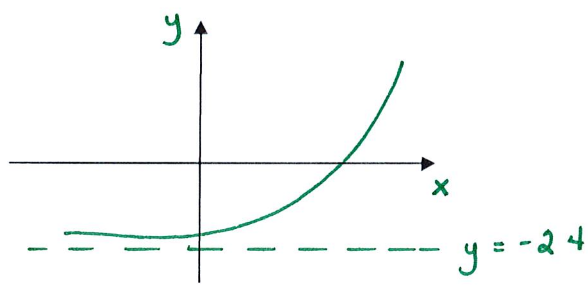
$m(x)$:
$a > 0$
$0 < c < 1$
point $(0, -0{,}75)$



#3 Fais l'étude complète de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3(4)^x - 24$
1) trace l'esquisse :

$a > 0$
$c > 1$
point $(0, -21)$



2) Dom : $x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ Ima : $y \in]-24, \infty[$
3) L'ordonnée à l'origine : $y = -21$
3) Le zéro (s'il existe) :

$$3 \cdot 4^x - 24 = 0$$
$$\frac{3 \cdot 4^x}{3} = \frac{24}{3}$$
$$4^x = 8$$

$$(2^2)^x = 2^3$$
$$2x = 3$$
$$x = 3/2$$

Rép : $x = 3/2$

4) Le signe :
positive : $x \in [3/2, \infty[$ $\qquad$ négative : $x \in]-\infty, 3/2]$

5) La variation : croissante $x \in \mathbb{R}$

6) L'équation de l'asymptote : $y = -24$