b) $g(x) = 2^{2x+2} - 4$

1) trace l'esquisse :

1) Forme canonique réduite :

$g(x) = 2^{2(x+1)} - 4$

$g(x) = 4^{(x+1)} - 4$

$g(x) = 4^{x} \cdot 4^{1} - 4$

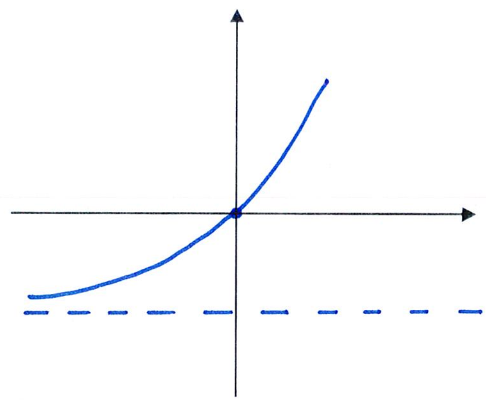
$g(x) = 4 \cdot 4^{x} - 4$

$a > 0$

$c > 1$

asy : $y = -4$

point $(0,0)$



2) Dom : $\mathbb{R}$ Ima : $]-4, \infty[$

3) L'ordonnée à l'origine : $y = 0$

3) Le zéro (s'il existe) :

$x = 0$

4) Le signe :

positive : $[0, \infty[$ négative : $]-\infty, 0]$

5) La variation : croissante $x \in \mathbb{R}$

6) L'équation de l'asymptote : $y = -4$

6-Recherche de la règle d'une fonction exponentielle

Apprenons à déterminer l'équation de la fonction exponentielle sous la forme canonique, c'est-à-dire $f(x) = a \cdot c^{x} + k$, à l'aide des différents cas suivants :

Cas #1 : Connaissant la valeur initiale, un point et l'asymptote

Ex) Voici deux points d'une fonction exponentielle : (0,6) et (-1, 14) de plus, l'équation de son asymptote est y = 4 => donc $k = 4$

1) Trouve a : voici 2 méthodes

i) Valeur initiale

$y = a + k$

$6 = a + 4$ (-4 des deux côtés)

$2 = a$

ou

ii) Équation : prenons (0, 6) et $k = 4$

$y = ac^x + k$

$6 = a \cdot c^0 + 4$

$6 = a \cdot 1 + 4$ (-4 des deux côtés)

$2 = a$

2) Trouve c : avec (-1, 14)

$y = a \cdot c^x + k$

$14 = 2 \cdot c^{-1} + 4$ (-4 des deux côtés)

$\frac{10}{2} = \frac{2 \cdot c^{-1}}{2}$

$(5)^{-1} = (c^{-1})^{-1}$

$\frac{1}{5} = c$

Rép : $y = 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x + 4$

Cas #2 : Connaissant deux points de la courbe et son asymptote

Ex) Voici deux points d'une fonction exponentielle dont l'asymptote est donnée par y = 4 : (-1, 14) et (-3, 254)

1) En utilisant les deux points, forme 2 équations

1) $(-1, 14)$ (x, y) => $14 = a \cdot c^{-1} + 4$ (-4 des deux côtés) simplifie → $10 = a \cdot c^{-1}$

2) $(-3, 254)$ (x, y) => $254 = a \cdot c^{-3} + 4$ (-4 des deux côtés) simplifie → $250 = a \cdot c^{-3}$

2) Divise tes 2 équations pour trouver c : (tu peux diviser 1 avec 2 ou 2 avec 1)

$10 = \cancel{a} c^{-1}$

$\div \; 250 = \cancel{a} \cdot c^{-3}$

$\sqrt{\frac{1}{25}} = \sqrt{c^2}$

$\frac{1}{5} = c$

3) Trouve a : avec 1 point

$y = a \cdot c^x + k$

$14 = a \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} + 4$ (-4 des deux côtés)

$\frac{10}{5} = \frac{a \cdot 5}{5}$

$2 = a$

Rép : $y = 2\left(\frac{1}{5}\right)^x + 4$

Cas #3 : Connaissant plusieurs points consécutifs de la fonction exponentielle Mais pas l'asymptote !!

Ex)

x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	254	54	14	6	4,4	4,08

-200 -40 -8 -1,6 -0,32

1) Trouve la régularité pour trouver c :

$$c = \frac{-40}{-200} = \frac{-8}{-40} = \frac{-1,6}{-8} = \frac{-0,32}{-1,6}$$

$$c = \frac{1}{5}$$

2) Prenons 2 points pour former un système d'équations :
(il nous reste deux inconnus (a et k) donc nous avons de 2 équations !)

1) Pt $(-3, 254) \Rightarrow 254 = a\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} + k$ isole k : $254 = a \cdot 125 + k$

$k_1 = 254 - 125a$

2) Pt $(-2, 54) \Rightarrow 54 = a\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} + k$ isole k : $54 = a \cdot 25 + k$

$k_2 = 54 - 25a$

Par comparaison : trouve a

$$k_1 = k_2$$

$$254 - 125a = 54 - 25a$$

-54 $+125a$ -54 $+125a$

$$\frac{200}{100} = \frac{100a}{100}$$

$$2 = a$$

trouve k :

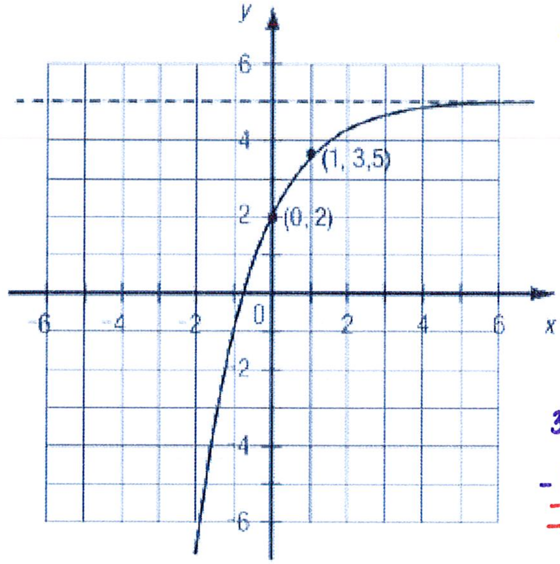
$$k_1 = 254 - 125 \cdot 2$$

$$k = 4$$

Rép :
$$y = 2\left(\frac{1}{5}\right)^x + 4$$

Exercices : Déterminez la règle des fonctions exponentielles suivantes :

a)



1) $k = 5$ et valeur initiale $= 2$

donc $y = k + a$

$2 = 5 + a$

$a = -3$

2) Trouve c : $(1, 3{,}5)$ x y

$y = a \cdot c^x + k$

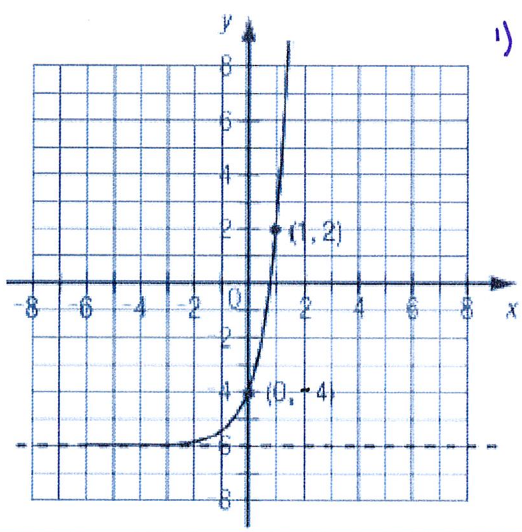
$3{,}5 - 5 = -3 \cdot c^1 + 5 - 5$

$\frac{-1{,}5}{-3} = \frac{-3 \cdot c}{-3}$

$0{,}5 = c$

Rép : $y = -3\left(\frac{1}{2}\right)^x + 5$

b)



1) $k = -6$ et valeur initiale $= -4$

donc $y = a + k$

$-4 + 6 = a - 6 + 6$

$2 = a$

2) Trouve c : $(1, 2)$

$y = a \cdot c^x + k$

$2 + 6 = 2 \cdot c^1 - 6 + 6$

$\frac{8}{2} = \frac{2 \cdot c}{2}$

$4 = c$

Rép : $y = 2 \cdot 4^x - 6$

c)

x	y
−1	$\frac{-5}{12}$
0	$\frac{-1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{7}{4}$
3	$\frac{25}{4}$

Asymptote : $y = -\frac{1}{2}$

1) Trouve a

$y = a + k$

$-\frac{1}{4} \overset{+1/2}{=} a - \frac{1}{2} \quad {+1/2}$

$-\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = a$

$\frac{1}{4} = a$

2) Trouve c : (1, 1/4)

$y = a \cdot c^x + k$

$\frac{1}{4} \overset{+1/2}{=} \frac{1}{4} \cdot c^1 - \frac{1}{2} \quad {+1/2}$

$\frac{3}{4} \overset{\cdot 4}{=} \frac{1}{4} \cdot c \quad {\cdot 4}$

$3 = c$

Rép : $y = \frac{1}{4} \cdot 3^x - \frac{1}{2}$

d)

x	y
−1	−3,58
0	−1,5
1	11
2	86
3	536

+2,08
+12,5
+75
+450

1) Trouve c :

$c = \frac{12,5}{2,08} = \frac{75}{12,5} = 6$

2) Prenons (0, −1,5) et (1, 11)

① $-1,5 = a \cdot 6^0 + k \rightarrow k_1 = -1,5 - a$

② $11 = a \cdot 6^1 + k \rightarrow k_2 = 11 - 6a$

3) Trouvons a :

$k_1 = k_2$

$-1,5 - a = 11 - 6a$ (+1,5 +6a +1,5 +6a)

$\frac{5a}{5} = \frac{12,5}{5}$

$a = 2,5$

4) Trouvons k

$k = -1,5 - 2,5$

$k = -4$

Rép : $y = 2,5 \cdot 6^x - 4$

e)

x	y
−2	−31
−1	−7
0	−1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{7}{8}$

Asymptote : $y = 1$

Dans ce cas, pratiquons la divisions (même si ce n'est pas nécessaire !)

1) $k=1$ et prenons $(-2,-31)$ et $(-1,-7)$

alors :

① $-31 = a \cdot c^{-2} + 1 \rightarrow -32 = a \cdot c^{-2}$

② $-7 = a \cdot c^{-1} + 1 \rightarrow -8 = a \cdot c^{-1}$

donc $-32 = a \cdot c^{-2}$

$\div \quad -8 = a \cdot c^{-1}$

$(4)^{-1} = (c^{-1})^{-1}$

$\frac{1}{4} = c$

2) Trouve a :

$-7^{-1} = a \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + 1^{-1}$

$\frac{-8}{4} = \frac{a \cdot 4}{4}$

$-2 = a$

Rép : $y = -2\left(\frac{1}{4}\right)^{x} + 1$

f)

x	y
−1	28
0	8
1	4
2	3,2
3	3,04

$\downarrow -20$

$\downarrow -4$

$\downarrow -0,8$

1) Trouvons c :

$c = \frac{-4}{-20} = \frac{1}{5}$

2) Prenons $(0,8)$ et $(1,4)$

① $8 = a\left(\frac{1}{5}\right)^{0} + k \rightarrow k_1 = 8 - a$

② $4 = a\left(\frac{1}{5}\right)^{1} + k \rightarrow k_2 = 4 - \frac{1}{5}a$

3) Trouvons a :

$k_1 = k_2$

$8^{-4} - a^{+a} = 4^{-4} - \frac{1}{5}a + a$

$4^{\cdot 5/4} = \frac{4}{5}a^{\cdot 5/4}$

$5 = a$

4) Trouvons k :

$k = 8 - 5$

$k = 3$

Rép : $y = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x} + 3$

7-Résolution d'une inéquation exponentielle :

Étapes :

1- Remplace le symbole d'inéquation par le symbole d'équation

2-Trace l'esquisse du graphique

3-Résous l'équation

4-Donne ta réponse en tenant compte du symbole d'inéquation

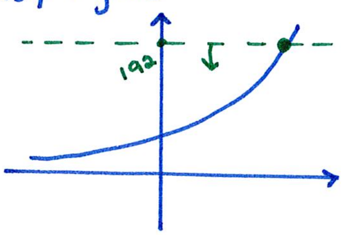
Ex :

#1 $3(4)^{2x} < 192$

$a > 0$

$c > 1$

asy : $y = 0$



$$\frac{3\cdot(4^2)^x}{3} = \frac{192}{3}$$

$$4^{2x} = 64$$

$$4^{2x} = 4^3$$

$$2x = 3 \qquad x = 3/2$$

Donc

Rép : $x \in \left]-\infty, 3/2\right[$

#2 Au cours d'une expédition en Antarctique, un explorateur utilise une casserole pour se préparer de la soupe. Au moment de la retirer du feu, le métal de la casserole atteint une température de 208°C. Par la suite, cette température varie selon la règle : $f(t) = -26 + 234\,(3)^{-0{,}08t}$ où t est le temps écoulé en minutes. Pendant combien de temps la température a été supérieur à 52°C

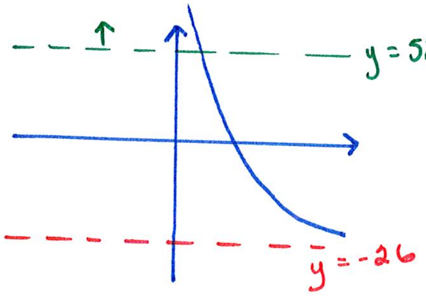
1) Esquisse

$$f(t) = 234\,(3)^{-0{,}08t} - 26$$

$$f(t) = 234\left(\frac{1}{3^{0{,}08}}\right)^t - 26$$

$$f(t) = 234\,(0{,}9158)^t - 26$$

$a > 0 \quad 0 < c < 1 \quad$ asy : $y = -26$



2) $\overset{+26}{-26} + 234(3)^{-0{,}08t} > 52 + 26$

$$\frac{234(3)^{-0{,}08t}}{234} = \frac{78}{234}$$

$$3^{-0{,}08t} = \frac{1}{3}$$

$$3^{-0{,}08t} = 3^{-1}$$

$$\frac{-0{,}08t}{-0{,}08} = \frac{-1}{-0{,}08}$$

$$t = 12{,}5$$

Rép : Durant 12,5 minutes.

8- Résolution de problèmes

Beaucoup de problèmes relié aux situations exponentielles peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\boxed{Q_f = Q_i \cdot c^{t/f}}$$

ou $Q_f = Q_i \cdot c^n$

où Q_f : représente la quantité finale

Q_i : représente la quantité initiale

c : représente le changement effectué sur Q_i ou base

$n = \dfrac{\text{temps}}{\text{fréquence}}$

attention le temps et la fréquence doivent avoir les mêmes unités !

Exercices :

#1 Le nombre de bactéries présentes dans une certaine culture triple à toutes les 2 heures. Au début, il y a 3 bactéries. Quelle quantité y aura-t-il après 2 jours ?

a) Identifier la quantité initiale : 3 bactéries

b) Trouver la valeur de n : $n = \dfrac{\text{temps}}{\text{fréquence}} = \dfrac{48\text{ h (2 jours!)}}{2\text{ h}} = 24$

c) La base est : 3 (triple)

d) Trouver la quantité finale :

$Q_f = Q_i \cdot c^n$

$Q_f = 3 \cdot 3^{24}$

$Q_f = 3^{25}$ ou $8,47 \times 10^{11}$ bactéries

#2 Une population augmente de 1% par année. En 2020, la population était de 6300 habitants. Combien y aura-t-il d'habitants en l'an 2030 ?

$Q_i = 6300$

$c = \dfrac{100}{100} + \dfrac{1}{100}$

$c = \dfrac{101}{100} = 1,01$

$n = \dfrac{\text{temps}}{\text{fréquence}} = \dfrac{10\text{ ans}}{1\text{ an}}$

$Q_f = Q_i \cdot c^n$

$Q_f = 6300 \cdot (1,01)^{10}$

$Q_f = 6959$ personnes

#3 Une population augmente de 1% à tous les six mois. En 2020, la population était de 6300 habitants. Combien y aura-t-il d'habitants en l'an 2030 ?

$Qi = 6300$

$c = \frac{1}{100} + \frac{100}{100} = \frac{101}{100}$

$n = \frac{120 \text{ mois}}{6 \text{ mois}}$ (10 ans!)

$n = 20$

$Qf = Qi \cdot c^n$

$Qf = 6300 \cdot (1{,}01)^{20}$

$Qf = 7687$ personnes

#4 Sachant que la population d'un village diminue de 2 % toutes les 3 années, combien de temps s'écoulera-t-il pour que la population atteigne 9 500 habitants si la population initiale était de 9 694 habitants ?

$Qi = 9694$

$Qf = 9500$

$c = \frac{100}{100} - \frac{2}{100} = \frac{98}{100} = 0{,}98$

$n = \frac{\text{temps}}{\text{fréquence}} = \frac{t}{3}$

$Qf = Qi \cdot c^n$

$\frac{9500}{9694} = \frac{9694}{9694} \cdot (0{,}98)^{t/3}$

$0{,}98 = 0{,}98^{t/3}$

$1 \cdot 3 = \frac{t}{3} \cdot 3$

$t = 3$

Donc 3 ans

#5 Si on place 2000 $ à 3 % d'intérêt, trouve le montant accumulé après 3 ans, sachant que les intérêts sont calculés une fois par année.

$Qi = 2000\$$

$c = \frac{100}{100} + \frac{3}{100} = 1{,}03$

$n = \frac{\text{temps}}{\text{fréquence}}$

$n = \frac{3}{1}$

$Qf = Qi \cdot c^n$

$Qf = 2000 \cdot (1{,}03)^3$

$Qf = 2185{,}45\$$

#6 Si on place 2000 $ à 3 % annuellement, mais que les intérêts sont calculés à tous les 6 mois, quel sera le montant accumulé après 3 ans ?

donc 2 fois par an

$Qi = 2000$

$c = \frac{100}{100} + \frac{3 \div 2}{100} = \frac{101,5}{100} = 1,015$

$n = \frac{\text{temps}}{\text{fréquence}} = \frac{3 \cdot 12 \text{ mois}}{6 \text{ mois}}$

$n = 6$

$Qf = 2000 \cdot (1,015)^6$

$Qf = 2186,89$ $

#7 Si on place 2000 $ à 3 % annuellement, mais que les intérêts sont calculés à tous les 4 mois, quel sera le montant accumulé après 3 ans ?

donc 3 fois par an

$Qi = 2000$

$c = \frac{100}{100} + \frac{3 \div 3}{100} = \frac{101}{100} = 1,01$

$n = \frac{36 \text{ mois}}{4 \text{ mois}} = 9$

$Qf = Qi \cdot c^n$

$Qf = 2000 \cdot (1,01)^9$

$Qf = 2187,37$ $

#8 Si on place 2000 $ à 3 % annuellement, mais que les intérêts sont calculés à tous les mois, quel sera le montant accumulé après 3 ans ?

donc 12 fois

$Qi = 2000$

$c = \frac{100}{100} + \frac{3 \div 12}{100} = \frac{100}{100} + \frac{0,25}{100}$

$= 1,0025$

$n = \frac{36}{1}$

$Qf = Qi \cdot c^n$

$Qf = 2000 \cdot (1,0025)^{36}$

$Qf = 2188,10$ $

#9 Si tu empruntes 5000$ sur ta carte de crédit, avec un taux d'intérêt de 2% calculé deux fois par mois. Quelle sera le montant de ta dette après 1 an?

$Qi = 5000$

$c = \frac{100}{100} + \frac{2}{100} = 1,02$

$n = \frac{\text{temps}}{\text{fréquence}} = \frac{12 \text{ mois}}{\frac{1}{2} \text{ mois}}$

$n = 24$

$Qf = Qi \cdot c^n$

$Qf = 5000 \cdot (1,02)^{24}$

$Qf = 8042,19$ $

#10 Une personne, qui a consommé un produit toxique, se présente à l'hôpital. Le médecin conclut que la concentration de ce produit lors de la consommation était de 24 mg. Deux heures plus tard, celle-ci est passée à 13,5 mg. Cette situation est représentée par une fonction exponentielle. Quelle sera la concentration du produit après une demi-journée sachant qu'elle s'approche toujours de plus en plus d'une concentration de 0 mg ? donc $k = 0$

1) x : temps écoulé (en h)

y : concentration (mg)

2) Trouve c : $(0, 24)$ et $(2, 13{,}5)$

$a = 24$ car $y = ac^x$

$24 = a \cdot c^0$

$24 = a$

alors $y = 24 \cdot c^x$

$\dfrac{13{,}5}{24} = \dfrac{24 \cdot c^2}{24}$ $\sqrt{c^2} = \sqrt{(0{,}5625)}$

$c = 0{,}75$

3) $y = ?$ si $x = 12$ h

$y = 24\,(0{,}75)^{12}$

$y = 0{,}76$ mg

La concentration sera de 0,76 mg.

#11 On prévoit que la population d'une ville suit la courbe de la fonction $P(t) = 1500 \cdot 2^{0{,}02t}$ où t représente le temps écoulé en année et $P(t)$ la population dans t années. Quel est le taux d'augmentation annuel de la population de cette ville ?

$P(t) = 1500 \cdot 2^{0{,}02t}$

$P(t) = 1500 \cdot 1{,}01395948^t$

Donc $\dfrac{100}{100}$ + taux d'augmentation $= \dfrac{101{,}395948}{100}$

alors taux d'augmentation est de 1,395948 %