Culture, société et technique sec 4

Chapitre 7: Faire le point

La trigonométrie

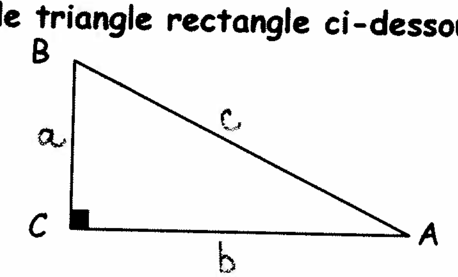
Nom : Catherine Huppé

Groupe : ____________________

Cours 1 :

1. Préalables

Dans le triangle rectangle ci-dessous :



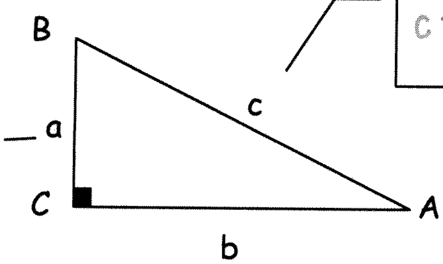
- Pour nommer les côtés d'un triangle, on utilise normalement la même lettre que celle du sommet opposé, mais en minuscule.
- Le côté c est appelé l'hypoténuse. C'est le plus grand côté et il est toujours opposé à l'angle de 90°. **Dans tous les triangles, au plus grand angle est opposé le** plus grand côté.
- Les angles A et B sont complémentaires, car leur somme donne 90°. $m\angle A + m\angle B = 90°$
- Prenons l'angle A : Pour cet angle, le côté a est son côté opposé et le côté b est son côté adjacent.
- Prenons l'angle B : Pour cet angle, le côté b est son côté opposé et le côté a est son côté adjacent.

2. Les rapports trigonométriques DANS LES TRIANGLES RECTANGLES

Puisque tous les triangles **RECTANGLES** ayant un angle aigu isométrique sont semblables et que les mesures de leurs côtés homologues sont proportionnelles, les rapports entre les mesures des côtés d'un triangle **RECTANGLE**, pour un angle donné, sont uniques.

Donc dans un triangle ABC rectangle en C :

c: hypoténuse



a: côté opposé à $\angle A$
a: côté adjacent à $\angle B$

b: côté opposé à $\angle B$
b: côté adjacent à $\angle A$

- sinus $A = \dfrac{\text{mesure du côté opposé à } \angle A}{\text{mesure de l'hypoténuse}} = \dfrac{c.o.}{hyp}$

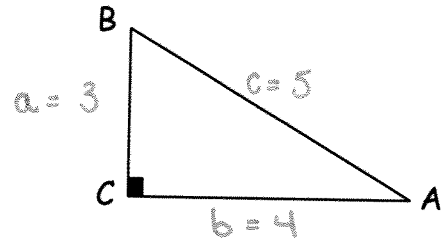
- cosinus $A = \dfrac{\text{mesure du côté adjacent à } \angle A}{\text{mesure de l'hypoténuse}} = \dfrac{c.a.}{hyp.}$

- tangente $A = \dfrac{\text{mesure du côté opposé à } \angle A}{\text{mesure du côté adjacent à } \angle A} = \dfrac{c.o}{c.a}$

* Soh Cah Toa *

Le rapport trigonométrique est donc le rapport entre deux côtés. On le calcule en décimale et sa mesure sera donnée aux dix millièmes (4 chiffres après la virgule).

Exemple : Dans le triangle suivant :



1. Détermine la mesure du côté a, sachant que le côté b mesure 4 et que l'hypoténuse mesure 5.

* Vous souvenez-vous de Pythagore !

$$hyp^2 = p^2 + g^2$$
$$5^2 = p^2 + 4^2$$
$$25^{-16} = p^2 + 16^{-16}$$
$$9 = p^2 \quad \text{donc } a = 3$$

2. Détermine les rapports trigonométriques suivants :

$$\sin \angle B = \frac{c.o}{hyp} = \frac{4}{5} = 0,8$$
$$\cos \angle B = \frac{c.a}{hyp} = \frac{3}{5} = 0,6$$
$$\tan \angle B = \frac{c.o}{c.a} = \frac{4}{3} = 1,3333$$
$$\sin \angle A = \frac{c.o}{hyp} = \frac{3}{5} = 0,6$$
$$\cos \angle A = \frac{c.a}{hyp} = \frac{4}{5} = 0,8$$
$$\tan \angle A = \frac{c.o}{c.a} = \frac{3}{4} = 0,75$$

On remarque que les valeurs du sinus et du cosinus sont toujours inférieures à 1. On remarque également que le sinus de l'angle A est égal au cosinus de l'angle B, car les angles sont complémentaires !!!

Devoir : **p. 131 ai-je bien compris**
p. 138 # 1-2-3-4-5

Mini-test au prochain cours !

Cours 2

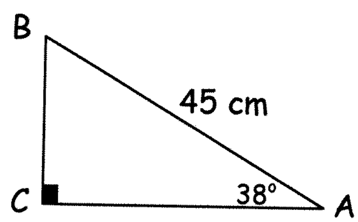
1. Recherche d'une mesure de côté

Pour trouver une mesure d'un côté dans un triangle **RECTANGLE** il faut connaître la mesure d'un angle aigu et la mesure d'un autre côté.

À l'aide des exemples suivants, nous verrons les étapes à suivre pour résoudre ce genre de problème.

Exemples :

#1 Dans le triangle suivant, détermine la mesure de a :



Pour bien résoudre ce problème, vous devez obligatoirement écrire ces trois étapes :

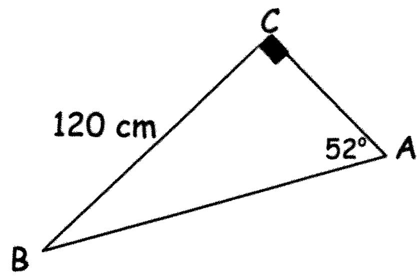
1. je connais : $m\angle A = 38°$ et l'hypoténuse
2. je cherche : mesure du côté opposé à $\angle A$
3. formule : $\sin A = \frac{c.o}{hyp}$

$$\frac{\sin 38}{1} = \frac{c.o.}{45}$$

$$c.o = 45 \cdot \sin 38$$

$$c.o = 27.70 \text{ cm}$$

#2 Dans le triangle suivant, détermine la mesure de b :



1. je connais : $m \angle A = 52°$

   c.o. à $\angle A = 120$

2. je cherche : c.a. à $\angle A$

3. formule : $\tan A = \dfrac{c.o}{c.a.}$

$$\tan 52 = \frac{120}{c.a.}$$

$$c.a = \frac{120}{\tan 52}$$

$$c.a. = 93,75 \text{ cm}$$

Devoir : **p. 133 ai-je bien compris**
p. 139 # 6-7-8

Mini-test au prochain cours !

Cours 3

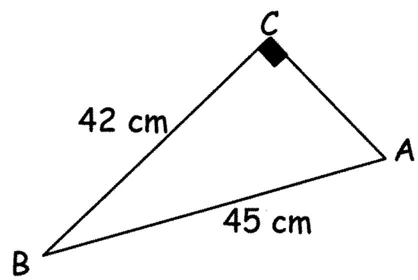
1. Recherche d'une mesure d'angle

Pour trouver une mesure d'angle dans un triangle **RECTANGLE** il faut connaître la mesure de deux côtés du triangle.

À l'aide des exemples suivants, nous verrons les étapes à suivre pour résoudre ce genre de problème.

Exemples :

#1 Dans le triangle suivant, détermine la mesure de l'angle B :



Pour bien résoudre ce problème, vous devez obligatoirement écrire ces trois étapes :

1. je connais : le côté adjacent à $\angle B$
   l'hypoténuse
2. je cherche : $m \angle B$
3. formule : $\cos B = \frac{c.a.}{hyp}$

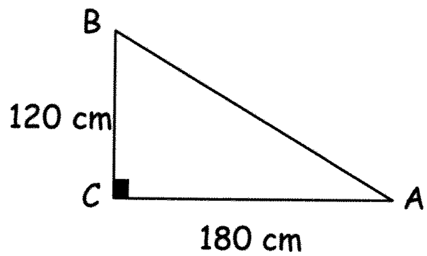
$\cos B = \frac{42}{45}$

$\cos B = 0,9333$

$m\angle B = \cos^{-1}(0,9333)$

$m\angle B = 21,04°$

#2 Dans le triangle suivant, détermine la mesure de A:



1. je connais : côté opposé à $\angle A$
   côté adjacent à $\angle A$

2. je cherche : $m \angle A$

3. formule :

$$\tan A = \frac{c.o.}{c.a.}$$

$$\tan A = \frac{120}{180}$$

$$\tan A = 0{,}6667$$

$$m\angle A = \tan^{-1}(0{,}6667)$$

$$m\angle A = 33{,}69°$$

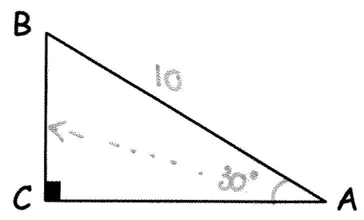
Devoir : **p. 135 ai-je bien compris**
p. 140 # 9-10-11-13

Mini-test au prochain cours

Cours 4

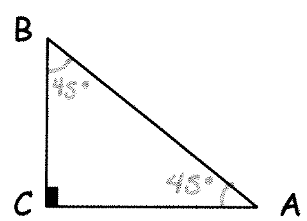
1. Rappel

☺ Dans un triangle rectangle, le côté opposé à un angle de 30° vaut la moitié de l'hypoténuse.



$m\overline{BC} = \frac{m\overline{AB}}{2}$

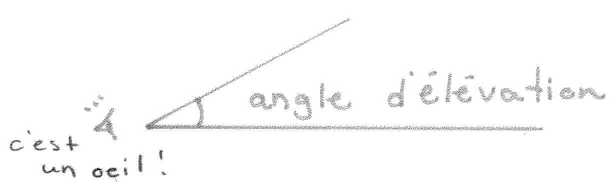
☺ Dans un triangle rectangle, si l'un des angles aigus est de 45°, alors l'autre est de 45° aussi et le triangle rectangle est isocèle.



$m\overline{BC} = m\overline{AC}$

2. Les angles d'élévations et de dépressions

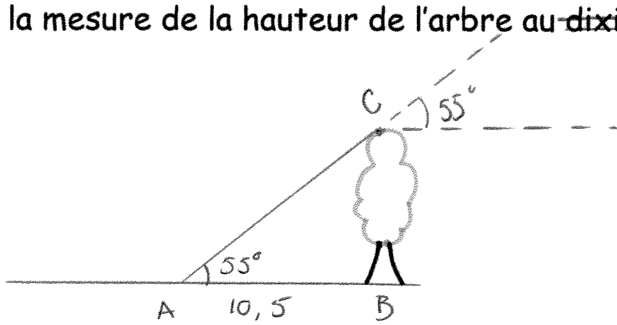
❖ **Un angle d'élévation** est un angle formé par la ligne de visée et l'horizontale lorsqu'un observateur regarde un objet situé plus haut que lui.



❖ **Un angle de dépression** est un angle formé par la ligne de visée et l'horizontale lorsque l'observateur regarde un objet situé plus bas que lui.

Exercices :

#1 Lorsque l'angle d'élévation du soleil est de 55°, un arbre projette une ombre de 10,5 m. Trouve la mesure de la hauteur de l'arbre au ~~dixième de~~ mètre près.



1) je connais : $m\angle A = 55°$

mesure du côté adjacent = 10, 5

2) je cherche : mesure du côté opposé

3) Formule : $\tan A = \frac{c.o}{c.a}$

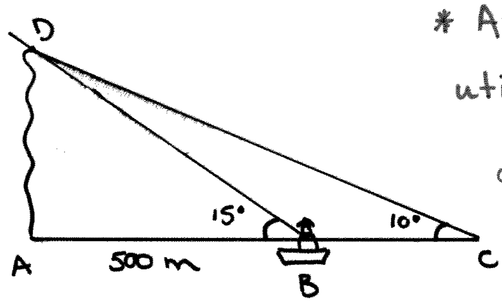
$\tan 55 = \frac{c.o.}{10,5}$

$c.o = \tan 55 \cdot 10,5$

$c.o = 14,995$

Donc l'arbre mesure 15 m

#2 Un bateau s'éloigne de la côte en ligne droite. À 500 m de la côte, la passagère observe le sommet d'une falaise sous un angle d'élévation de 15°. Quelques instants plus tard, l'angle n'est plus que de 10°. Quelle est la distance séparant les deux points d'observation ?



* Attention, il faut toujours utiliser les rapports trigo (sin, cos, tan) dans les Δ rectangles !

1° Trouvons m $\overline{AD}$:

je connais : m ∠DBA et son côté adjacent

je cherche : m du côté opposé

formule : $\tan B = \dfrac{c.o}{c.a}$

$\tan 15 = \dfrac{c.o}{500}$ $\quad$ $c.o = 500 \cdot \tan 15$

$c.o = 133,97$

2° Trouvons m $\overline{AC}$:

je connais : m ∠C et son côté opposé

je cherche : son côté adjacent

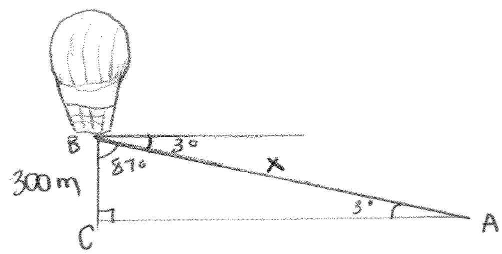
Formule : $\tan C = \dfrac{c.o}{c.a}$

$\tan 10 = \dfrac{133,97}{c.a}$ $\quad$ $c.a = \dfrac{133,97}{\tan 10}$

$c.a = 759,78$

Donc la distance séparant les 2 points d'observation est de 259,78 m

#3 Une montgolfière amorce sa descente sous un angle de dépression de 3°. Son altitude est de 300 mètres. Quelle sera la longueur de son trajet de descente ?



je connais : $m\angle A = 3°$ et le côté opposé

je cherche : l'hypoténuse

formule: $\sin A = \dfrac{c.o}{hyp}$

$$\sin 3 = \frac{300}{x}$$

$$x = \frac{300}{\sin 3}$$

$$x = 5\,732,196 \text{ m}$$

Donc son trajet sera d'une longueur de 5 732,2 m.

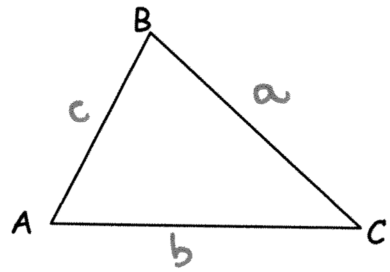
Devoir : p. 141 # 12 - 14 - 15 - 16 - 17 - 18 - 19

Cours 5

1. Loi des sinus

Dans tout triangle, le rapport entre la mesure du côté et le sinus de l'angle qui lui est opposé est toujours constant. Dans le triangle quelconque ci-dessous, on a donc les proportions suivantes :

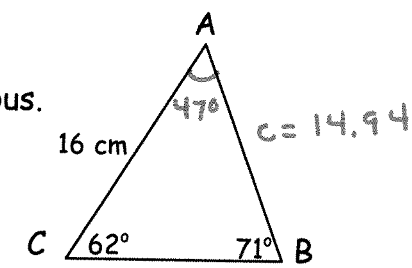
$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}$$



La loi des sinus permet de résoudre un triangle (c'est-à-dire de trouver les mesures manquantes d'angles ou de côtés) et ce, dès que l'on connaît la mesure d'un angle et celle de son côté opposé ainsi qu'une autre mesure d'angle ou de côté.

Exemples :

#1 Résous le triangle ABC ci-dessous.



1° Trouvons c :

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{c}{\sin 62°} = \frac{16}{\sin 71°}$$

$$c = \frac{16 \cdot \sin 62°}{\sin 71}$$

$$\boxed{c = 14{,}94 \text{ cm}}$$

2° Trouvons $m\angle A$

$$m\angle A = 180 - 62 - 71$$

$$\boxed{m\angle A = 47°}$$

3° Trouvons a :

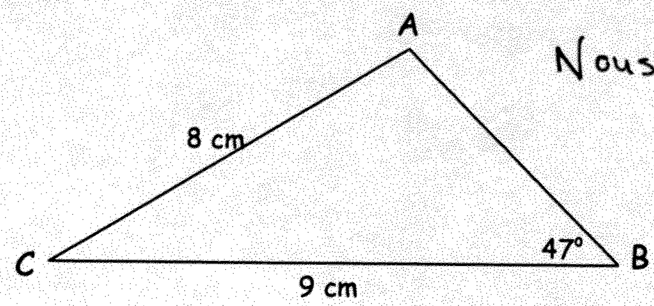
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{a}{\sin 47} = \frac{16}{\sin 71}$$

$$a = \frac{16 \cdot \sin 47}{\sin 71}$$

$$\boxed{a = 12{,}38 \text{ cm}}$$

#2 Trouve la mesure de l'angle obtus. → angle supérieur à 90°



Nous cherchons donc

$m\angle A$

1)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{9}{\sin A} = \frac{8}{\sin 47°}$$

$$\sin A = \frac{9 \cdot \sin 47}{8}$$

$$\sin A = 0,8228$$

$$m\angle A = \sin^{-1}(0,8228)$$

$$m\angle A = 55,37$$

↳ oups! c'est plus petit que 90°!!

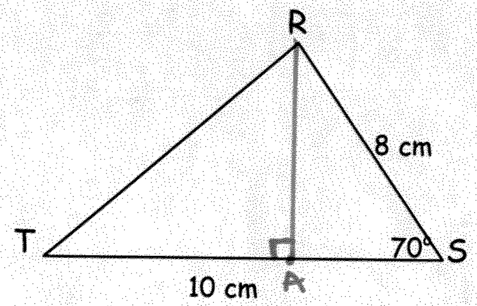
2) Comme $\angle A$ est obtus il y a une étape de plus :

$$m\angle A = 180 - 55,37$$
$$= 124,63°$$

Attention : Le sinus d'un angle obtus est égal au sinus de l'angle qui lui est supplémentaire.

$$\boxed{\sin A = \sin(180 - A)}$$

#3 Détermine la mesure du segment RT dans le triangle ci-dessous.



1. Pouvons-nous utiliser la loi des sinus ? NON Pourquoi ? car nous ne connaissons pas les mesures des angles opposés aux côtés que l'on connaît

2. Pouvons-nous utiliser un rapport trigonométrique ? NON Pourquoi ? car le △ RST n'est pas un △ rectangle

3. Que faire ??? Abaissons une hauteur qui sera opposé à l'angle que l'on connaît. Nous venons de créer 2 △ rectangles.

1° Trouvons la m $\overline{AR}$:

je connais : m ∠ S et l'hyp.

je cherche : m du côté opposé

formule : $\sin S = \dfrac{co}{hyp}$

$\sin 70 = \dfrac{c.o}{8}$

$c.o = 7{,}52$

2° Trouvons m $\overline{SA}$:

$hyp^2 = p^2 + g^2$

$8^2 = p^2 + 7{,}52^2$

$p = 2{,}73$

3° Trouvons m $\overline{AT}$

m $\overline{AT} = 10 - 2{,}73$

m $\overline{AT} = 7{,}27$

4° Trouvons m $\overline{RT}$:

$hyp^2 = p^2 + g^2$

$hyp^2 = 7{,}52^2 + 7{,}27^2$

$hyp = 10{,}46$ cm

Devoir : **p. 147 ai-je bien compris**
p. 150 # 1-2-3-4

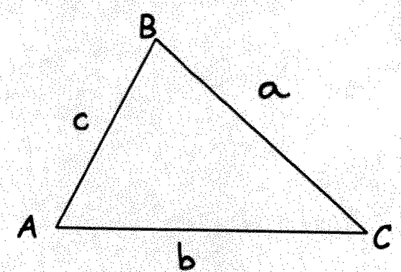
Mini-test au prochain cours !

Cours 6

Mini-test

La loi des cosinus (facultative mais très pratique !!!)

Dans tout triangle



$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C \end{aligned}}$$

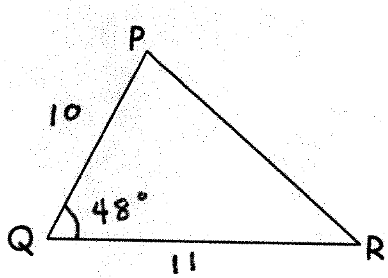
Cette loi est utile (entre autre) pour trouver une mesure de côté si l'on connaît :

- La mesure de l'angle qui est opposé au côté manquant

ET

- Les mesures des deux autres côtés

Ex. : Détermine la mesure du côté PR sachant que l'angle Q mesure 48° et que les côtés PQ et QR mesurent respectivement 10 et 11 cm.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

$$a^2 = 10^2 + 11^2 - 2 \cdot 10 \cdot 11 \cdot \cos 48$$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{73,79}$$

$$a = 8,59$$

Rép : Le côté $\overline{PR}$ mesure 8,59 cm.

Exercices : p. 151 # 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 11 - 12

Cours 7

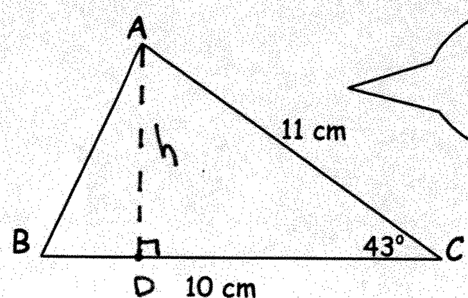
1. L'aire d'un triangle

Depuis longtemps, vous connaissez une formule pour calculer l'aire d'un triangle :

$$\boxed{A = \frac{b \cdot h}{2}}$$

Exemples :

#1 Calculez l'aire du triangle suivant :



Il nous manque une hauteur qui doit être perpendiculaire à une base et opposé à l'angle connu.

1) Dans le $\triangle ADC$: trouvons h

1) Je connais : $m\angle C = 43°$
$hyp = 11$ cm

2) Je cherche : m. c.o à $\angle C$

3) Formule : $\sin C = \frac{c.o}{hyp}$

$$\sin 43 = \frac{c.o}{11}$$

$$c.o = 11 \cdot \sin 43$$

$$c.o = 7{,}5 \text{ cm}$$

2) Trouve l'aire du $\triangle ABC$:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{10 \cdot 7.5}{2}$$

$$A = 37.5 \text{ cm}^2$$

Rép : L'aire du $\triangle ABC$ est de 37.5 cm^2

2. La formule de Héron

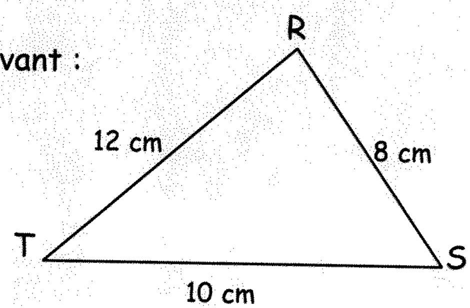
Voici une deuxième façon de calculer l'aire d'un triangle qui est très efficace lorsque nous connaissons les 3 mesures des côtés d'un triangle :

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Où ***p*** représente le **demi-périmètre** du triangle et ***a, b, c*** sont les mesures des **trois côtés** du triangle.

Exemple:

#1 Calcule l'aire du triangle suivant :



Étape 1 : calcule le demi-périmètre

$$p = \frac{8+10+12}{2}$$

$$p = 15$$

Étape 2 : utilise la formule de Héron

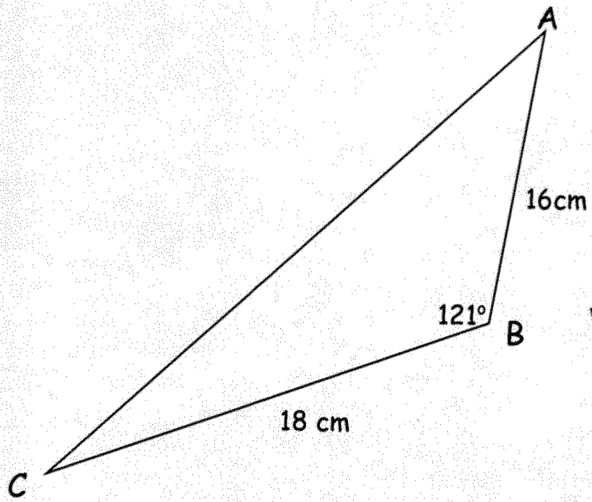
$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$A = \sqrt{15(15-8)(15-10)(15-12)}$$

$$A = \sqrt{1575}$$

$$A = 39,69 \text{ cm}^2$$

#2 Déterminez l'aire du triangle suivant :



1) trouve b :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$$

$$b^2 = 16^2 + 18^2 - 2 \cdot 16 \cdot 18 \cdot \cos 121$$

$$\sqrt{b^2} = \sqrt{876,66}$$

$$b = 29,61 \text{ cm}$$

2) Trouve l'aire :

$$p = \frac{29,61 + 16 + 18}{2}$$

$$p = 31,81$$

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

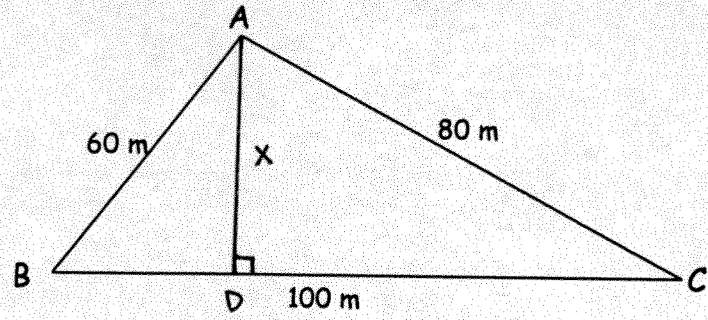
$$A = \sqrt{31,81(31,81 - 29,61)(31,81 - 18)(31,81 - 16)}$$

$$A = \sqrt{15\ 279,60}$$

$$A = 123,61 \text{ cm}^2$$

Rep : L'aire du Δ ABC est de 123,61 cm^2

#2 Dans le triangle suivant, détermine la hauteur issue du sommet *A*.



1) Trouvons l'aire du $\triangle$ ABC :

$$p = \frac{60 + 80 + 100}{2} = 120$$

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$A = \sqrt{120(120-100)(120-80)(120-60)}$$

$$A = \sqrt{5\,760\,000}$$

$$A = 2400 \text{ m}^2$$

2) Trouvons $m\overline{AD}$:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \qquad 2400 \cdot 2 = \frac{100 \cdot x}{2} \cdot 2$$

$$\frac{4\,800}{100} = \frac{100 \cdot x}{100}$$

$$48 = x$$

Devoir : **p. 155 ai-je bien compris**
p. 157 ai-je bien compris
p. 159 # 2 - 5

Mini-test au prochain cours

Rép : Donc la hauteur issue du sommet A mesure 48 m

Cours 8

Mini-test
Document d'exercices préparatoires

Cours 9

Terminer le document d'exercices préparatoires
Exercices préparatoires supplémentaires p. 162 # 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 9 - 11 - 13 - 14 - 16 - 25 - 26

Examen au prochain cours

Cours 10

Examen toute la période