Chapitre 3 : L'analyse de la fonction quadratique

mathmontcalm.weebly.com

1.1 Les 3 formes d'une fonction quadratique

A) La fonction quadratique

Degré d'une fonction : Le **degré** est déterminé par l'exposant le plus élevé de la variable indépendante.

Exemples :

1. $f(x) = 2x - 9$ est une fonction de degré 1
2. $g(x) = 8$ est une fonction de degré 0
3. $h(x) = -3x^2 + 7$ est une fonction de degré 2

Définition : La **fonction polynomiale de degré 2** est appelée **fonction quadratique**. La parabole est la courbe qui représente une fonction quadratique.

Remarque : Fonction quadratique de base.

Équation

$f(x) = x^2$

$a = 1$

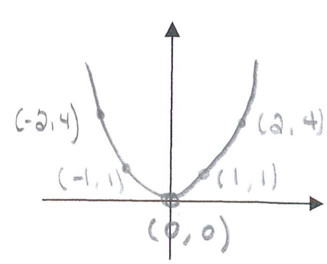
$h = 0$

$k = 0$

Table de valeurs

x	$f(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Graphique

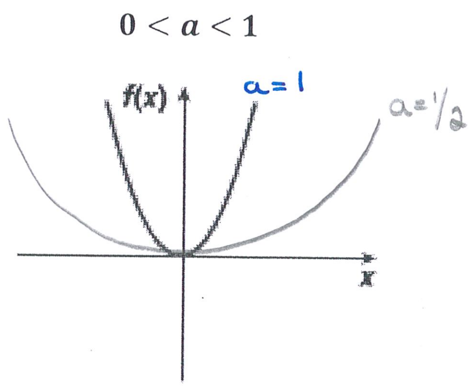


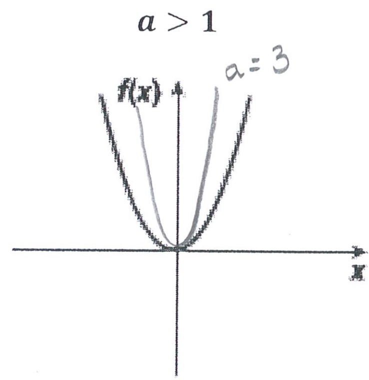
B) La forme canonique (sommet (h, k))

$$f(x) = a(x-h)^2 + k \quad \text{si } a \neq 0$$

Le rôle du paramètre a

- En faisant varier la valeur du **paramètre a**, on observe un changement d'échelle vertical

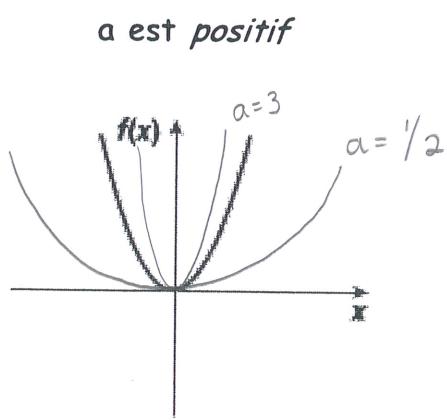


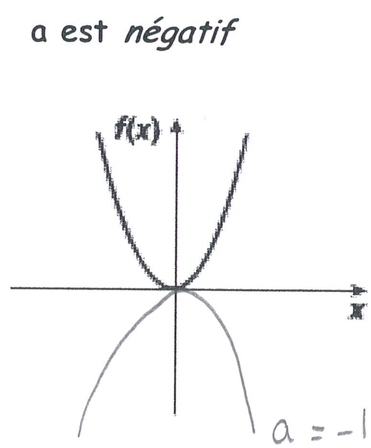


rétrécissement vertical

allongement vertical

- Un changement de signe du **paramètre a** provoque une réflexion par rapport à l'axe des x.





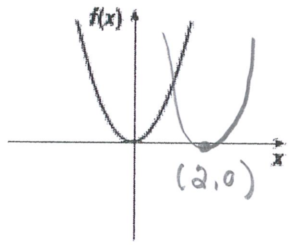
Le rôle du paramètre h

- En faisant varier la valeur du **paramètre h**, on observe une translation horizontale

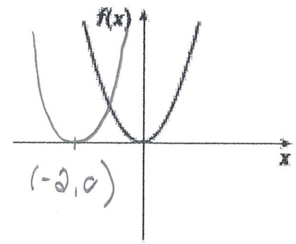
ex : $f(x) = (x-2)^2$

$h = 2$

h est *positif*



h est *négatif*



$f(x) = (x+2)^2$

$h = -2$

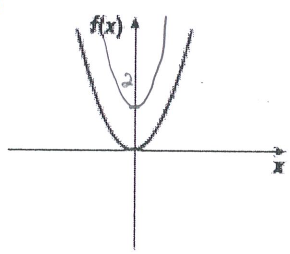
Le rôle du paramètre k

- En faisant varier la valeur du **paramètre k**, on observe une translation verticale

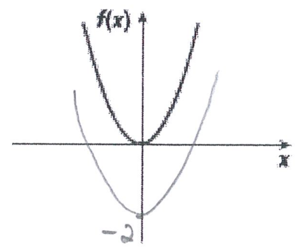
ex : $f(x) = x^2 + 2$

$k = 2$

k est *positif*



k est *négatif*



ex : $f(x) = x^2 - 2$

$k = -2$

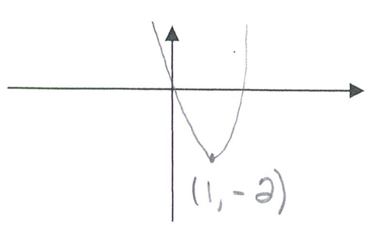
Exemples : Tracer l'allure des paraboles suivantes.

a) $y = 5(x-1)^2 - 2$

sommet $(1,-2)$

a = 5 h = 1 k = -2

$a > 0$

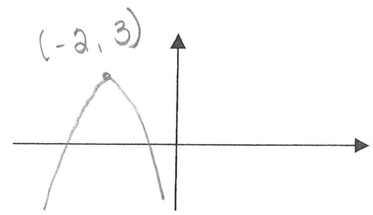


b) $f(x) = -(x+2)^2 + 3$

a = -1 h = -2 k = 3

sommet $(-2, 3)$

$a < 0$



C) La forme générale (ordonnée à l'origine = c)

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{où} \quad a \neq 0$$

Le rôle du paramètre a

- Même rôle que la forme canonique

Le rôle du paramètre b

- Aucun rôle

Le rôle du paramètre c

- Ordonnée à l'origine (valeur de $f(0)$)

D) La forme factorisée

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{où} \quad a \neq 0 \text{ et } x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont les zéros}$$

Le rôle du paramètre a

- Même rôle que la forme canonique

Remarque 1 : Si une fonction quadratique ne comporte aucun zéro, il est impossible d'écrire sa règle sous la forme factorisée.

Remarque 2 : Si une fonction quadratique a un seul zéro, écrire la règle sous forme factorisée revient au même qu'écrire la règle sous forme canonique. Donc $f(x) = (x-3)(x-3) \leftarrow$ factorisée

$f(x) = (x-3)^2 \leftarrow$ canonique

1.2 Transformer la règle d'une fonction quadratique d'une forme à une autre.

$$\text{forme canonique} \underset{\text{p. 8 D}}{\overset{\text{p. 5, 6, 7 A-B}}{\rightleftarrows}} \text{forme générale} \underset{\text{p. 8 E}}{\overset{\text{p. 7 C}}{\rightleftarrows}} \text{forme factorisée}$$

A) La complétion du carré

Lorsqu'on a un binôme du type $x^2 + bx$, il est possible d'ajouter une certaine valeur pour obtenir un trinôme carré parfait de la forme $x^2 + bx + c$.

Dans un TCP, on a

* $b = 2\sqrt{a}\sqrt{c}$

Procédure : ① *Prendre la moitié du paramètre b.*

② *Élever cette valeur au carré.*

③ *Ajouter ce nouveau terme aux deux premiers.*

En isolant c, on a

$\sqrt{c} = \frac{b}{2\sqrt{a}} \Rightarrow c = \left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2$

Donc quand $a = 1$

$c = \left(\frac{b}{2\sqrt{1}}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$

Exemples : Compléter les binômes suivants afin qu'ils deviennent des trinômes carrés parfaits.

a) $x^2 \underset{}{\overset{b}{-8}}x$ ...

1) $\frac{-8}{2} = -4$

2) $(-4)^2 = 16$

Rép : $x^2 - 8x + 16$

b) $x^2 + 6xy$ ...

$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2 = 9$

Rép : $x^2 + 6xy + 9y^2$

c) $x^2 + 5x$ ...

$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

Rép : $x^2 + 5x + \frac{25}{4}$

d) $x^2 - x$ ...

$\left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Rép : $x^2 - x + \frac{1}{4}$

B) Passage de la forme générale à la forme canonique

$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad f(x) = a(x-h)^2 + k$

Procédure :

① *Mettre le paramètre "a" en évidence.*

② *Compléter le carré, sans changer la fonction.*

③ *Factoriser les 3 premiers termes (on obtient un binôme carré). Regrouper les 2 derniers termes.*

④ *Distribuer le « a » sur le binôme au carré et sur le dernier terme.*

Exemples : Mettre les règles suivantes sous la forme canonique.

a) $f(x) = x^2 + 6x - 8$ $\qquad \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2 = 9$

$f(x) = \underbrace{x^2 + 6x + 9}_{TCP} - 9 - 8$

$f(x) = (x+3)^2 - 17$

* Validez-vous avec votre calculatrice!

b) $f(x) = 2x^2 - 4x - 30$ $\qquad b = -2$ donc $\left(\frac{-2}{2}\right)^2 = 1$

$f(x) = 2(x^2 - 2x - 15)$

$f(x) = 2(\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{TCP} - 1 - 15)$

$f(x) = 2((x-1)^2 - 16)$

$f(x) = 2(x-1)^2 - 32$

$\left(-\frac{2}{2}\right)^2 = 1$

c) $f(x) = 4x^2 - 8x + 1$

$f(x) = 4\left(x^2 - 2x + \frac{1}{4}\right)$

$f(x) = 4\left(\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{TCP} - 1 + \frac{1}{4}\right)$

$f(x) = 4\left((x-1)^2 - \frac{3}{4}\right)$

$f(x) = 4(x-1)^2 - 3$

$-1 + \frac{1}{4} = -\frac{4}{4} + \frac{1}{4}$

$= -\frac{3}{4}$

$\frac{\cancel{4}}{1} \cdot -\frac{3}{\cancel{4}} = -3$

C) Passage de la forme générale à la forme factorisée

$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Procédure :

① *Mettre le « a » en évidence.*

② *Factoriser le trinôme*

Exemple : Mettre $f(x) = 2x^2 - 4x - 30$ sous la forme factorisée.

$f(x) = 2(x^2 - 2x - 15)$

$f(x) = 2(x-5)(x+3)$

$m + n = -2$

$m \cdot n = -15$

$-5 + 3 = -2$

$-5 \cdot 3 = -15$

Donc les zéros sont $x_1 = -3$ et $x_2 = 5$

et $a = 2$ $c = -30$

D) Passage de la forme canonique à la forme générale

$f(x) = a(x-h)^2 + k \quad \Rightarrow \quad f(x) = ax^2 + bx + c$

Procédure :

① *Développer le binôme carré.* ← Donne un trinôme carré !

② *Distribuer le « a » au trinôme trouvé en ①.*

③ *Réduire.*

Exemple : Mettre $f(x) = 2(x-1)^2 - 32$ sous la forme générale.

$f(x) = 2(x^2 - 2x + 1) - 32$

$f(x) = 2x^2 - 4x + 2 - 32$

$f(x) = 2x^2 - 4x - 30$

$a = 2$

$h = 1$

$k = -32$

$c = -30$

E) Passage de la forme factorisée à la forme générale

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) \quad \Rightarrow \quad f(x) = ax^2 + bx + c$

Procédure :

① *Multiplier les facteurs entre parenthèse et réduire.*

② *Distribuer le « a » au trinôme trouvé en ①.*

Exemple : Mettre $f(x) = 2(x+3)(x-5)$ sous la forme générale.

$f(x) = 2(x^2 - 5x + 3x - 15)$

$f(x) = 2(x^2 - 2x - 15)$

$f(x) = 2x^2 - 4x - 30$

$a = 2$

zéros : $x_1 = -3$ et $x_2 = 5$

$c = -30$

1.3 Les propriétés de la fonction quadratique

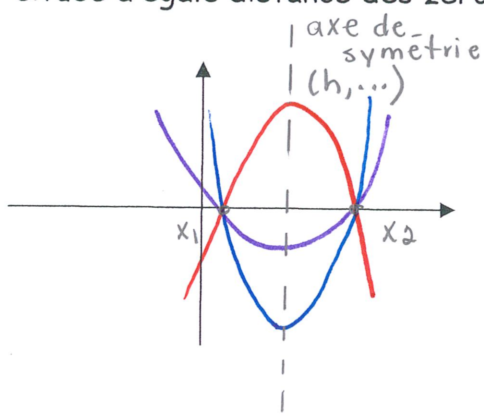
A) Les coordonnées du sommet

	Sommet
Forme canonique : $f(x)=a(x-h)^2+k$	(h, k)
Forme générale : $f(x)=ax^2+bx+c$	$h=\frac{-b}{2a}$ $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$ ou $k=f(h)$ (c'est la valeur de y si $x=h$)
Forme factorisée : $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$	$h=\frac{x_1+x_2}{2}$ $k=f(h)$

1) Trouve h
2) Remplace x par le h trouvé dans l'équation!

Remarque pour la forme factorisée :

La coordonnée ***h*** du sommet d'une fonction quadratique possédant 2 zéros est située à égale distance des zéros. (c'est le point milieu!)



$h=\frac{x_1+x_2}{2}$

* Toutes les fonctions qui ont les mêmes zéros ont la même coordonnée pour h.

Remarque pour la forme générale :

Dans $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$, $-b^2$ est toujours de signe négatif.

si $b=4$ $-(4)^2=-16$

si $b=-4$ $-(-4)^2=-16$

Exemples : Trouver les coordonnées du sommet des fonctions quadratiques suivantes.

a) $f(x) = 4(x+7)^2 - 12$

$f(x) = 4(x - -7)^2 - 12$ Sommet $(-7, -12)$

$h = -7$

$k = -12$

b) $f(x) = 7x^2 - 14x + 5$

$a = 7$

$b = -14$

$c = 5$

1) Trouve h :

$h = \frac{-b}{2a}$

$h = \frac{--14}{2 \cdot 7}$

$h = \frac{14}{14}$

$h = 1$

2) Trouve k

(formule)

$k = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$

$k = \frac{-(-14)^2 + 4 \cdot 7 \cdot 5}{4 \cdot 7}$

$k = \frac{-56}{28}$

$k = -2$

ou

Remplace x par $\underline{h}$

$f(1) = 7 \cdot 1^2 - 14 \cdot 1 + 5$

$f(1) = -2$

Sommet $(1, -2)$

c) $f(x) = -5(x-4)(x+10)$

$x_1 = 4$

$x_2 = -10$

1) Trouve h

$h = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$h = \frac{4 + -10}{2}$

$h = \frac{-6}{2}$

$h = -3$

2) Trouve k :

$f(-3) = -5(-3-4)(-3+10)$

$f(-3) = -5 \cdot -7 \cdot 7$

$f(-3) = 245$

Sommet $(-3, 245)$

Démonstration (coordonnées du sommet de la forme générale)

Soit la forme générale d'une fonction quadratique : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$.

Démontrons que les coordonnées du sommet sont : $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$.

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$

Transformons cette règle sous la forme canonique :

$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

1) $\frac{b}{a} \div 2 = \frac{b}{2a}$

2) $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$

$f(x) = a\left(\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{\text{TCP}} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$

$\frac{-b^2}{4a^2} + \frac{c \cdot 4a}{a \cdot 4a}$

$= \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}$

$f(x) = a\left(\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}\right)$

$f(x) = a\left(x^2 - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$

$\frac{a \cdot -b^2}{4a^2} + \frac{a \cdot 4ac}{4a^2}$

$\frac{-b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$

alors $h = \frac{-b}{2a}$ et $k = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$

Sommet $\left(\frac{-h}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$ CQFD !!

(ce qu'il fallait démontrer !!)