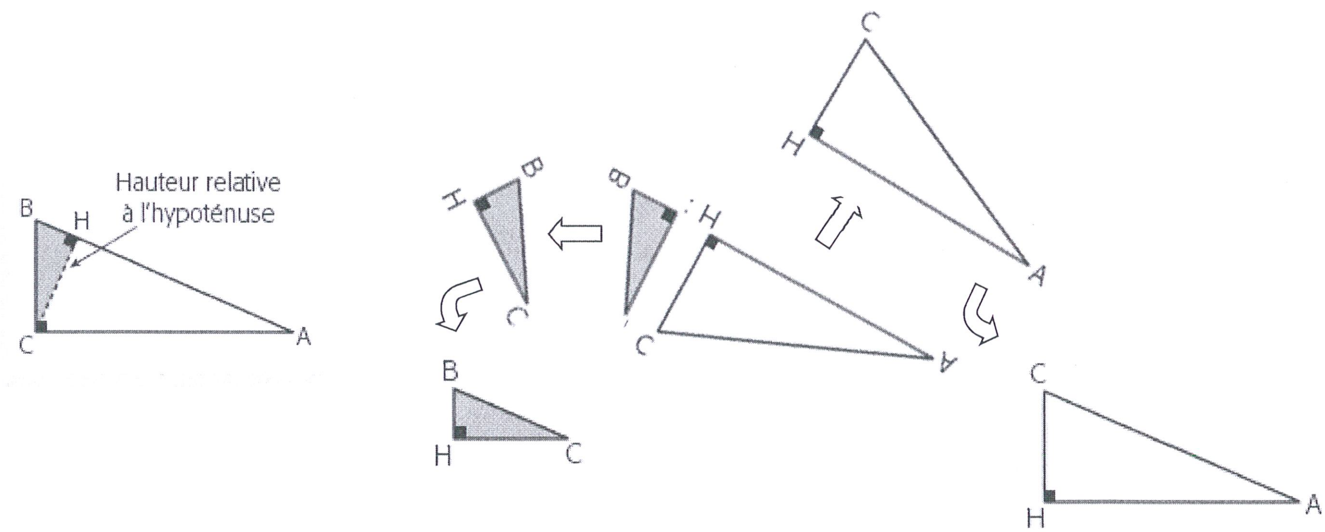
Cours 12

Les triangles rectangles semblables déterminés par la hauteur relative à l'hypoténuse

Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse détermine deux autres triangles rectangles, semblables au premier.



Par la condition minimale de similitude *AA* :

- $\triangle$**ABC** ~ $\triangle$**CBH** puisque ces deux triangles ont un angle droit et qu'ils ont l'angle **B** en commun;

- $\triangle$**ABC** ~ $\triangle$**ACH** puisque ces deux triangles ont un angle droit et qu'ils ont l'angle ***A*** en commun.

Par la transitivité de la relation de similitude, $\triangle$**CBH** ~ $\triangle$ A C H .

La relation de similitude est transitive, c'est-à-dire que si
$\triangle$**ABC** ~ $\triangle$**DEF**
et
$\triangle$**DEF** ~ $\triangle$**GHJ**,
alors
$\triangle$**ABC** ~ $\triangle$GHI

Les relations métriques dans le triangle rectangle

Établir des proportions à partir des côtés homologues des triangles rectangles semblables permet de trouver plusieurs relations métriques qui facilitent la recherche de mesures manquantes dans un triangle rectangle. Ces relations font intervenir le concept de moyenne proportionnelle.

1. La moyenne proportionnelle

Lorsque les deux extrêmes ou les deux moyens d'une proportion ont la même valeur, cette valeur est appelée moyenne proportionnelle des deux autres valeurs.

> Dans la proportion $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$, on dit que b est moyenne proportionnelle de a et de c.

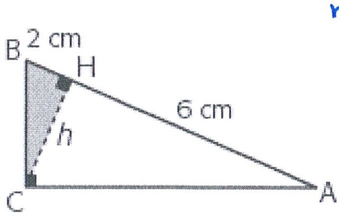
Exemple 1 : Pour déterminer la hauteur relative à l'hypoténuse du triangle rectangle ABC ci-dessous nous utiliserons la relation métrique #1 :

Relation métrique #1 :

Dans un triangle rectangle, la mesure de la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle des mesures des deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

$$\frac{m\overline{CH}}{m\overline{BH}} = \frac{m\overline{HA}}{m\overline{CH}}$$

Car dans un triangle rectangle, la mesure de la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle avec les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.



$$\frac{x}{2} = \frac{6}{x}$$

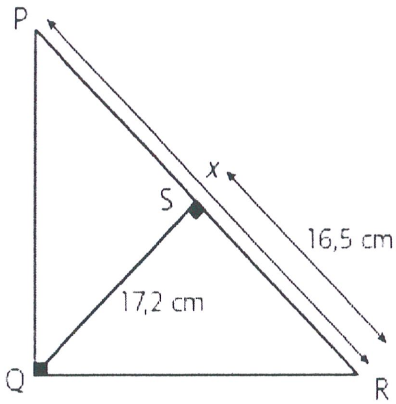
$$x \cdot x = 2 \cdot 6$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{12}$$

$$x = 3,46$$

Donc $m\overline{CH} = 3,46$ cm

Exercice : Détermine la mesure manquante dans le triangle suivant.



1) Trouvons $m\overline{PS}$:

$$\frac{m\overline{QS}}{m\overline{SR}} = \frac{m\overline{SP}}{m\overline{QS}}$$

Car dans un Δ rect, la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle aux 2 segments qu'elle détermine sur l'hyp entière.

$$\frac{17,2}{16,5} = \frac{m\overline{SP}}{17,2}$$

$$m\overline{SP} = \frac{17.2 \cdot 17.2}{16,5}$$

$$m\overline{SP} = 17,93 \text{ cm}$$

Donc $x = 17,93 + 16.5$

$= 34,43$ cm

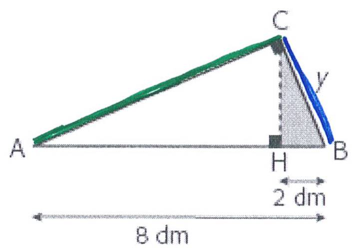
Devoir : **Ai-je bien compris : p.96 et p. 98 #1 c)**
p. 102 # 6 # 7 e) et #8

Cours 13

Exemple 2 : Pour déterminer la mesure de la cathète **BC** dans le triangle rectangle **ABC** ci-dessous, on procède de la façon suivante :

Relation métrique #2 :

Dans un triangle rectangle, la mesure de chaque cathète est moyenne proportionnelle de la mesure de sa projection sur l'hypoténuse et celle de l'hypothénuse entière.



$$\frac{m\overline{BC}}{m\overline{HB}} = \frac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}} \quad \text{ou} \quad \frac{m\overline{AC}}{m\overline{AH}} = \frac{m\overline{AB}}{m\overline{AC}}$$

Remarque : $\overline{BH}$ est la projection de la cathète **BC** sur l'hypoténuse.

$$\frac{m\overline{BC}}{m\overline{HB}} = \frac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}}$$

Car dans un triangle rectangle, la mesure de chaque cathète est moyenne proportionnelle avec la mesure de sa projection sur l'hypoténuse et l'hypoténuse.

$$\frac{y}{2} = \frac{8}{y}$$

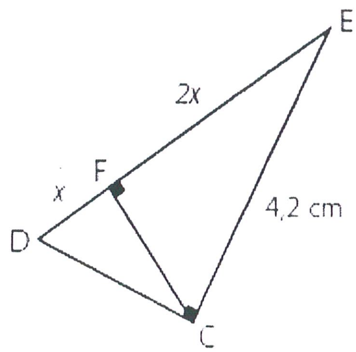
$$y \cdot y = 2 \cdot 8$$

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{16}$$

$$y = 4$$

Donc $m\overline{BC} = 4$ dm

Exercice : Détermine la donnée manquante dans le triangle suivant :



$$m\,\overline{DE} = x + 2x$$
$$= 3x$$

$$\frac{m\,\overline{CE}}{m\,\overline{FE}} = \frac{m\,\overline{DE}}{m\,\overline{CE}}$$

Car dans un triangle rectangle, la mesure de chaque cathète est moyenne proportionnelle avec la mesure de sa projection sur l'hypoténuse et celle de l'hyp. entière.

$$\frac{4{,}2}{2x} = \frac{3x}{4{,}2}$$

$$4{,}2 \cdot 4{,}2 = 2x \cdot 3x$$

$$\frac{17{,}64}{6} = \frac{6x^2}{6}$$

$$\sqrt{2{,}94} = \sqrt{x^2}$$

$$1{,}71 = x$$

Donc $m\,\overline{FD} = 1{,}71$ cm

$m\,\overline{FE} = 2 \cdot 1{,}71$

$= 3{,}42$ cm

Devoir : Ai-je bien compris : p.98 #1 b)

p.103 # 7 a) b) d) f) et h)

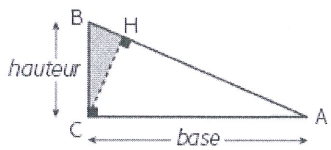
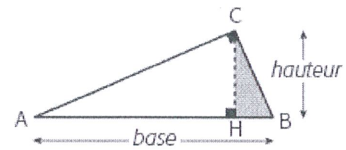
Mini-test au prochain cours

Cours 14

Exemple 3 : En calculant l'aire d'un triangle rectangle de deux façons différentes, on peut déduire une autre relation métrique dans le triangle rectangle.

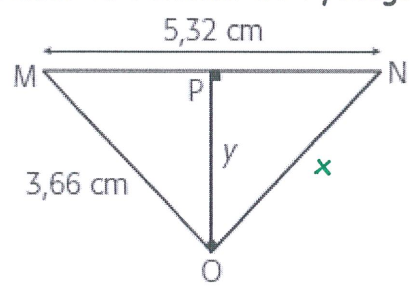
Relation métrique #3 :

Dans un triangle rectangle, le produit des cathètes est égale au produit de l'hypothénuse et de la hauteur relative à l'hypoténuse.

Calcul de l'aire d'un triangle rectangle	
Première façon	**Deuxième façon**
	
$A_{triangle} = \dfrac{m\overline{AC} \cdot \overline{CB}}{2}$	$A_{triangle} = \dfrac{m\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2}$
On a donc $m\ \overline{AC} \cdot m\ \overline{CB} = m\ \overline{AB} \cdot m\ \overline{CH}$	

Remarque : Il existe plusieurs démarches permettant de déterminer une mesure manquante dans un triangle rectangle. Dans tous les cas, on peut avoir recours aux relations métriques incluant la relation de Pythagore.

Exercice : Détermine la donnée manquante dans le triangle suivant.



1) Trouvons $m\overline{NO}$ avec Pythagore

$c^2 = a^2 + b^2$

$5{,}32^2 = 3{,}66^2 + x^2$

$3{,}86 = x$

2) $m\overline{MO} \cdot m\overline{NO} = m\overline{HN} \cdot m\overline{PO}$

$3{,}66 \cdot 3{,}86 = 5{,}32 \cdot y$

$\dfrac{14{,}13}{5{,}32} = \dfrac{5{,}32y}{5{,}32}$

$2{,}66 = y$

Car dans un triangle rectangle, le produit des cathètes est égal au produit de l'hypoténuse par la hauteur relative à l'hypoténuse.

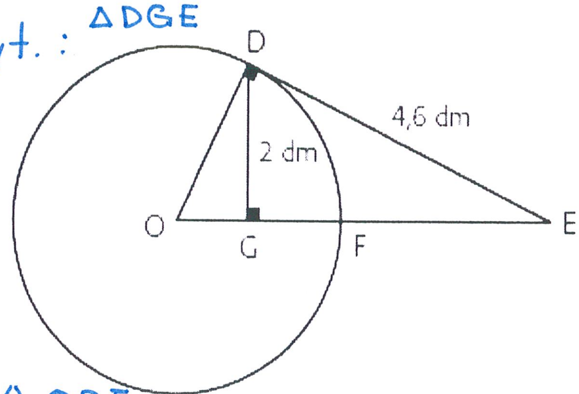
Donc $m\overline{PO} = 2{,}66$ cm

#2 La figure ci-dessous représente le système d'enroulement d'une courroie autour d'un disque de machinerie agricole. Le mécanicien doit refaire la pièce reliant le centre du cercle à la circonférence.

À partir de l'information fournie dans la figure, aide le mécanicien à déterminer la mesure du rayon de la roue.

ΔDGE

1) Trouvons $m\overline{GE}$ avec Pyt. :



$a^2 = b^2 + c^2$

$4,6^2 = 2^2 + m\overline{GE}^2$

$m\overline{GE} = 4,14$ dm

2) Trouvons $m\overline{OG}$: ΔODE

$\frac{m\overline{DG}}{m\overline{OG}} = \frac{m\overline{GE}}{m\overline{DG}}$

Car dans un Δ rectangle la hauteur relative à l'hyp. est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hyp.

$\frac{2}{m\overline{OG}} = \frac{4,14}{2}$

$m\overline{OG} = \frac{2 \cdot 2}{4,14} = 0,97$ dm

3) Trouvons $m\overline{OD}$ avec Pyt : ΔODG

$a^2 = b^2 + c^2$

$m\overline{OD}^2 = 2^2 + 0,97^2$

$m\overline{OD} = 2,22$ dm

Rep : Le rayon mesure 2,22 dm.

Devoir : Ai-je bien compris : p. 98 #1a)
p. 103 # 7 c) g) # 8 # 9 p. 105 # 5

Cours 13 : Document d'exercices préparatoires

Cours 14 : Examen sur la partie 2 du chapitre 2 (p.16 à 23)