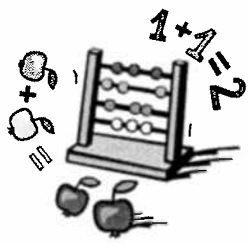
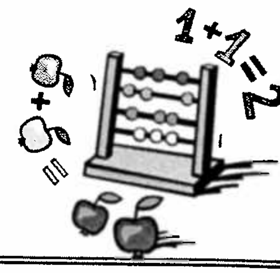


Chapitre 1 : L'étude des fonctions
Math CST 4^{e} secondaire

Nom :________________________

Groupe :______________________



1. Les propriétés d'une fonction:

Lorsque l'on vous demande de faire l'analyse d'une fonction vous devez en décrire ses propriétés.

Soit la représentation graphique de la fonction j ci-dessous :

Équation partie ① :
$(-4, 4)$ et $(-6, -12)$

$a = \frac{-12 - 4}{-6 - -4} = \frac{-16}{-2} = 8$

b: $y = 8x + b$

$4 = 8 \cdot -4 + b$

$36 = b$

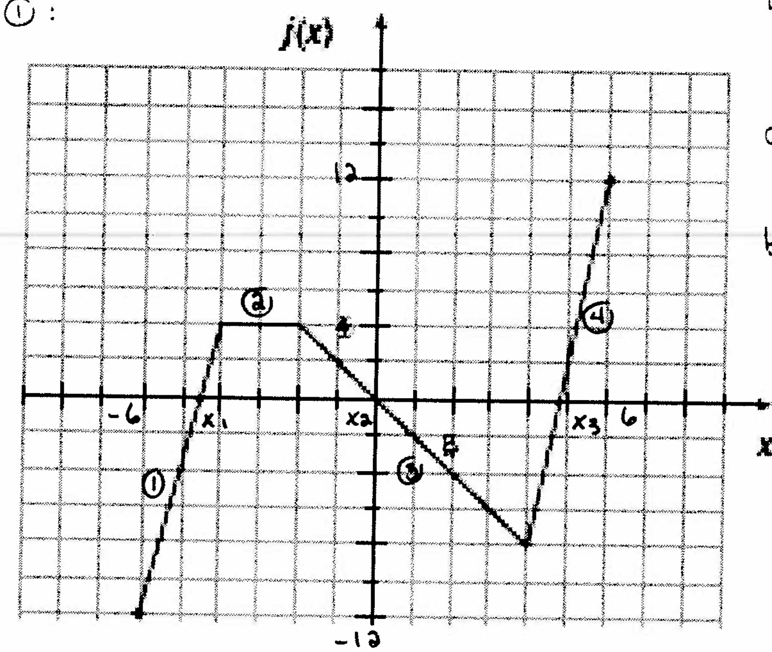
$y_1 = 8x + 36$

$x = ?$ si $y = 0$

$0 = 8x + 36$

$\frac{-36}{8} = \frac{8x}{8}$

$-4{,}5 = x$



Équation partie ② :
$(4, -8)$ et $(6, 12)$

$a = \frac{12 - -8}{6 - 4} = \frac{20}{2} = 10$

b : $y = 10x + b$

$12 = 10 \cdot 6 + b$
$-60 \qquad -60$

$12 = 60 + b$

$-48 = b$

$y_4 = 10x - 48$

$0 = 10x - 48$

$\frac{48}{10} = \frac{10x}{10}$

$4{,}8 = x$

Les propriétés en question sont définies dans les tableaux suivants. Chacune d'elles est accompagnée d'un exemple qui réfère à la fonction j.

Première propriété : Le domaine et l'image

	Définition	Exemple
Domaine	Ensemble des valeurs que prend la variable INDÉPENDANTE donc x	$x \in [-6, 6]$
Image	Ensemble des valeurs que prend la variable DÉPENDANTE donc y	$y \in [-12, 12]$

Deuxième propriété : Les coordonnées à l'origine

	Définition	Exemple
Abscisse(s) à l'origine ou zéro(s)	Valeur(s) de la variable indépendante (x) pour laquelle (lesquelles) la variable dépendante (y) vaut zéro. *C'est-à-dire* x = ? si y = 0. Une fonction peut ne pas avoir de zéro, en avoir un ou en avoir plusieurs.	$x_1 = -4{,}5$ $x_2 = 0$ $x_3 = 4.8$ ou $x \in \{-4.5, 0, 4.8\}$
Ordonnée à l'origine ou valeur initiale	Valeur de la variable dépendante (y) lorsque la variable indépendante (x) vaut zéro. *C'est-à-dire* y = ? si x = 0. Une fonction peut avoir une ou aucune valeur initiale.	$y = 0$

Troisième propriété : Le signe

	Définition	Exemple
Positive	Intervalle(s) du **domaine** pour lequel (lesquels) les valeurs de la variable dépendante sont positives.	$x \in [-4.5, 0] \cup [4.8, 6]$
Négative	Intervalle(s) du **domaine** pour lequel (lesquels) les valeurs de la variable dépendante sont négatives.	$x \in [-6, -4.5] \cup [0, 4.8]$

Remarque : Par convention, aux zéros, la fonction est considérée à la fois comme positive et négative. Pour exclure les zéros, il faut préciser, selon le cas, qu'on s'intéresse aux intervalles sur lesquels la fonction est *strictement* positive ou *strictement* négative.

Exemple : La fonction *j* est strictement positive pour $x \in]-4.5, 0[\cup]4.8, 6]$

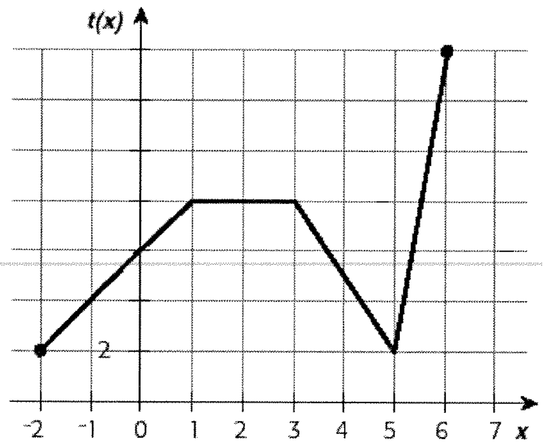
Quatrième propriété : Les extremums

	Définition	Exemple
Maximum	Valeur la plus élevée de la fonction sur tout son domaine.	$y = 12$
Minimum	Valeur la moins élevée de la fonction sur tout son domaine.	$y = -12$

Cinquième propriété : La variation

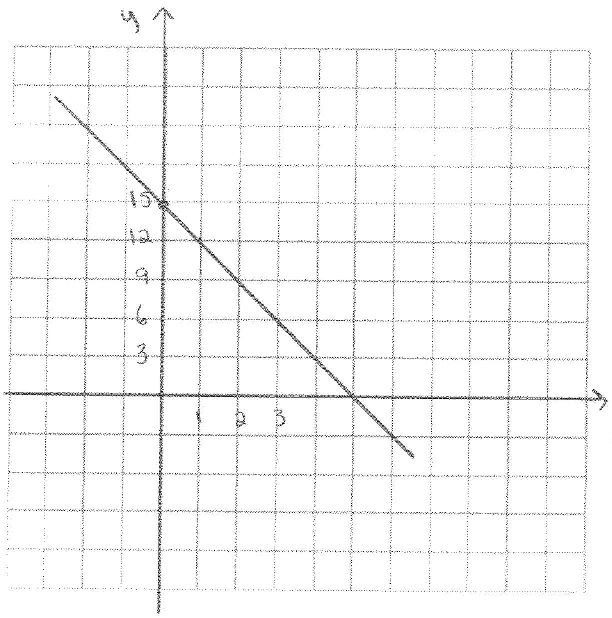
	Définition	Exemple
Croissance	Intervalle(s) du **domaine** sur lequel (lesquels) la fonction ne diminue jamais.	$x \in [-6, -4] \cup [4, 6]$
Décroissance	Intervalle(s) du **domaine** sur lequel (lesquels) la fonction ne n'augmente jamais.	$x \in [-2, 4]$
Constance	Intervalle(s) du **domaine** sur lequel (lesquels) la fonction ne subit aucune variation (variation nulle).	$x \in [-4, -2]$

Exercice : Fais l'analyse complète de ces fonctions :

1) 

- Le domaine et l'image : dom : $x \in [-2, 6]$
  ima: $y \in [2, 14]$
- Les coordonnées à l'origine : abscisse : aucune ordonnée : $y = 6$
- Le signe :
  toujours positive
- Les extremums : min : $y = 2$
  max: $y = 14$
- La variation : crois : $x \in [-2, 1] \cup [5, 6]$
  déc : $x \in [3, 5]$
  const : $x \in [1, 3]$

2) $h(x) = -3x + 15$



dom : $x \in \mathbb{R}$

ima : $x \in \mathbb{R}$

zéro : $x = 3$

ordonnée : $y = 15$

positive : $x \in]-\infty, 5]$

négative : $x \in [5, \infty[$

max : —

min : —

crois : —

déc : toujours

const : —

zéro : $x = ?$ si $y = 0$

$0 = -3x + 15$ -15 -15

$\frac{-15}{-3} = \frac{-3x}{-3}$

$5 = 3$

Devoir cours 2 : p. 11 la partie ai-je bien compris et

p. 13 le #1 de la partie ai-je bien compris

p.16 #1

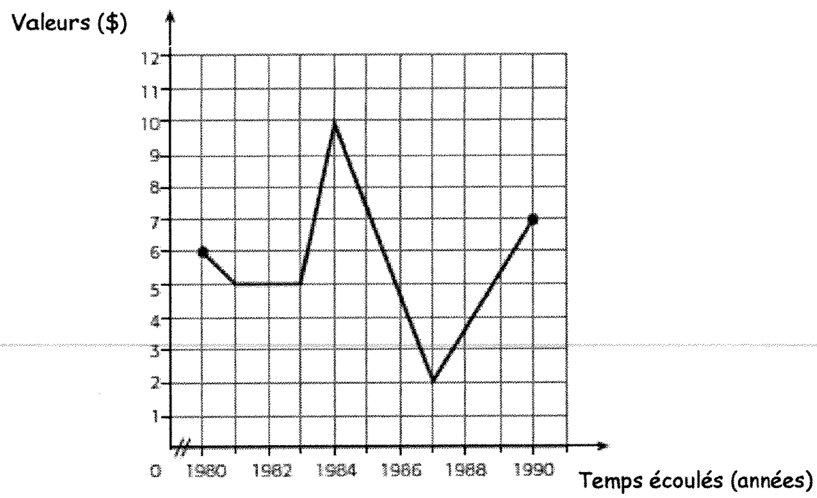
Cours 3 :

Exercices toute la période : Document plus de mise en pratique

Cours 4 :

Maintenant que nous connaissons les différentes propriétés d'un graphique, allons voir concrètement à quoi elles font référence :

Voici le graphique représentant la variation de la valeur d'une action de la compagnie Cosmoworld :



a) Détermine le domaine et explique ce qu'il représente. $x \in [1980, 1990]$

Les données ont été recueillies de 1980 à 1990

b) Détermine les extremums de cette situation et explique à quoi ils correspondent : min : $y = 2$ max $y = 10$

La valeur de l'action a été au minimum 2 $ et au maximum 10 $

c) Que se passe-t-il entre les années 1981 et 1983 ?

La valeur de l'action a été constante

d) Explique pourquoi cette fonction est toujours positive ? Parce que la valeur de l'action ne peut pas être inférieure à 0

e) Détermine les intervalles de décroissance et explique ce qu'ils représentent. $x \in [1980, 1981] \cup [1984, 1987]$

Les moments où la valeur de l'action a baissée

Exercices : p. 6 #1a)b)c)d)e), p. 8 A, B et C. p. 10 au complet, p. 11 F,G, H et I, p. 12 au complet, p.13 F et G, p. 18 #10, p.19 #12, p.20 #15

Mini-test #1 au prochain cours.

Cours 5

2. Les fonctions définies par parties

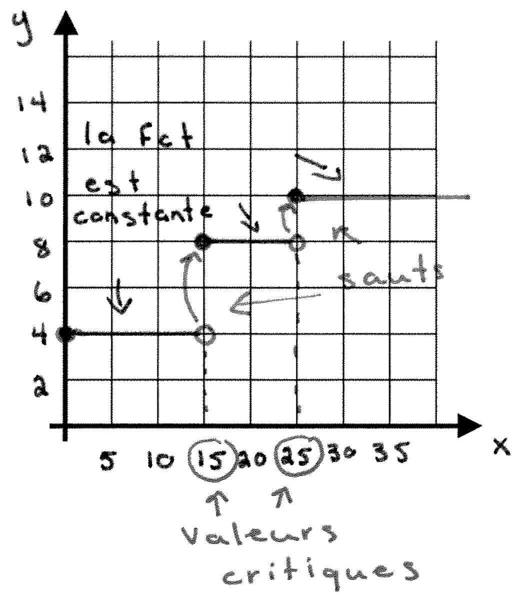
Une fonction définie par parties est une fonction dont la règle s'exprime comme un ensemble de règles définies sur différents intervalles de son domaine. Bien qu'elle soit formée de plusieurs parties, la fonction définie par parties est une seule fonction.

2.1 La fonction en escalier

La fonction en escalier est une fonction définie par parties. Voici les caractéristiques d'une fonction en escalier.

Caractéristique	Manifestation dans le graphique
La fonction est constante sur chaque intervalle du domaine.	Le graphique est formé de segments horizontaux. Généralement, les segments ont un point fermé si la valeur est incluse à une extrémité et un point ouvert à l'autre si la valeur n'est pas incluse.
La fonction possède des valeurs critiques.	Aux valeurs critiques, la fonction varie par saut.
La fonction est discontinue.	Le graphique de la fonction ne peut pas être tracé sans lever le crayon.

Le graphique suivant permet de visualiser les manifestations des différentes caractéristiques.



Les modes de représentation d'une fonction en escalier :

Voici les modes de représentation les plus appropriés pour une fonction en escalier :

- Les mots
- Le graphique
- La règle. La règle s'écrit comme un ensemble de règles de fonctions constantes définies sur différents intervalles du domaine.

Remarque :

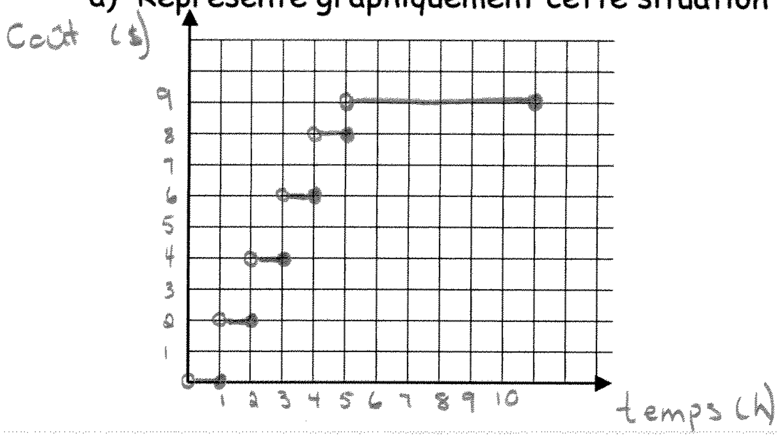
1. La table de valeurs n'est pas un mode de représentation utile pour ce type de fonction.
2. La réciproque d'une fonction en escalier n'est pas une fonction.

Exercices :

#1 Le stationnement du marché de la gare du parc Jacques Cartier est ouvert tous les jours de 8h à 18h. Voici le tarif du stationnement.

- La première heure est gratuite;
- Chaque heure supplémentaire partielle ou complète coûte 2 $;
- Le tarif maximal pour une journée est de 9 $;

a) Représente graphiquement cette situation et fais-en l'analyse complète :



dom : $x \in]0, 10]$

ima : $y \in \{0, 2, 4, 6, 8, 9\}$

signe : positive sur tout son domaine

zéro : $x \in]0, 1]$

ordonnée : aucune

extremums : min : $y = 0$

max : $y = 9$

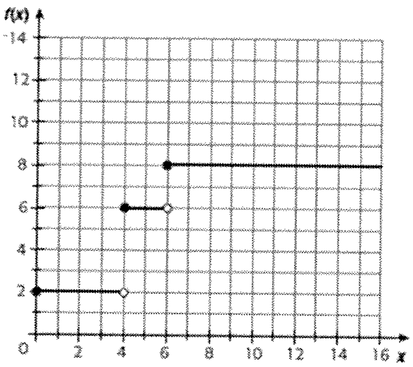
variation : toujours croissante

b) Détermine la règle de cette fonction :

$$C(x) = \begin{cases} 0 & x \in]0,1] \quad \text{ou} \quad 0 < x \leq 1 \\ 2 & x \in]1,2] \quad\quad 1 < x \leq 2 \\ 4 & x \in]2,3] \quad\quad 2 < x \leq 3 \\ 6 & x \in]3,4] \quad\quad 3 < x \leq 4 \\ 8 & x \in]4,5] \quad\quad 4 < x \leq 5 \\ 9 & x \in]5,10] \quad\quad 5 < x \leq 10 \end{cases}$$

#2 Détermine la règle du graphique suivant et fais-en l'analyse complète :

2



$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in [2, 4[\\ 6 & x \in [4, 6[\\ 8 & x \in [6, \infty \end{cases}$$

dom : $x \in [0, \infty[$

ima : $y \in \{2, 6, 8\}$

zéro : aucun

ord : $y = 2$

signe : toujours positive

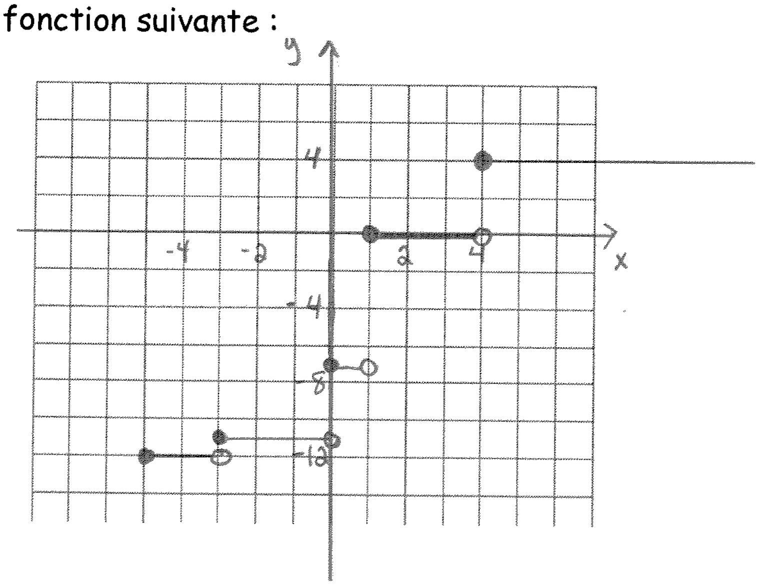
variation : toujours croissante

extremums : min : $y = 2$

max : $y = 8$

#3 Représente graphiquement la fonction suivante :

$$m(x) = \begin{cases} -12 \, pour -5 \leq x < -3 \\ -11 \, pour -3 \leq x < 0 \\ -7 \, pour \, 0 \leq x < 1 \\ 0 \, pour \, 1 \leq x < 4 \\ 4 \, pour \, x \geq 4 \end{cases}$$



Devoir : p. 22 au complet et p. 23 E et F
p. 25 # 1 et 2 du ai-je bien compris
p. 28 # 1 et #2 a)b)d) et #4

<u>**Mini-test #2 au prochain cours**</u>

<u>Cours 6 :</u>

Exercices importants :

1. Léa et Gabriel achètent des jeux électroniques dans une boutique qui vend des jeux neufs et des jeux usagés. Dans cette boutique, chaque jeu coûte au minimum 20 $ avant les taxes.

Un rabais est annoncé à l'entrée de la boutique :

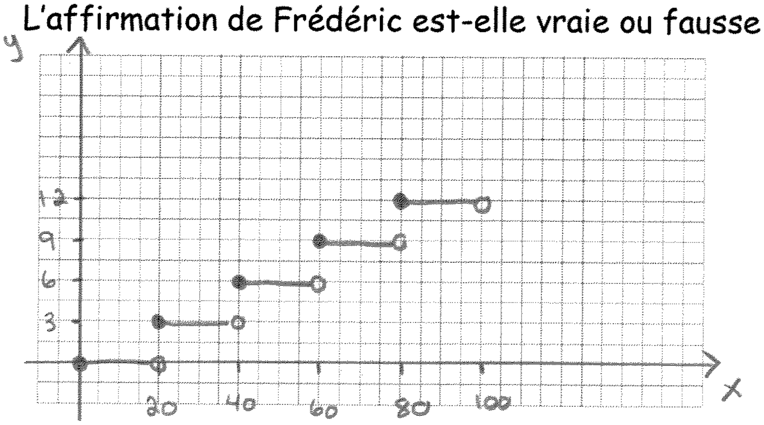
<u>Rabais de la semaine</u>
Obtenez un rabais de 3$ pour chaque tranche complète de 20 $ d'achat, avant les taxes.

Léa achète un seul jeu dont le coût, avant les taxes, est de 22,50$. Il obtient un rabais de 3 $.

Gabriel achète un seul jeu dont le coût, avant les taxes, est de 45 $. Il obtient un rabais de 6$.

Frédéric, un ami qui les accompagne, fait alors l'affirmation suivante :
Si un client double la valeur de ses achats, le rabais qu'il obtient double aussi.

L'affirmation de Frédéric est-elle vraie ou fausse ? Expliquez pourquoi



x: Montant dépensé

y: Rabais reçu

Frédéric n'a pas raison!

Prenons un achat de 30$: son rabais sera de 3$

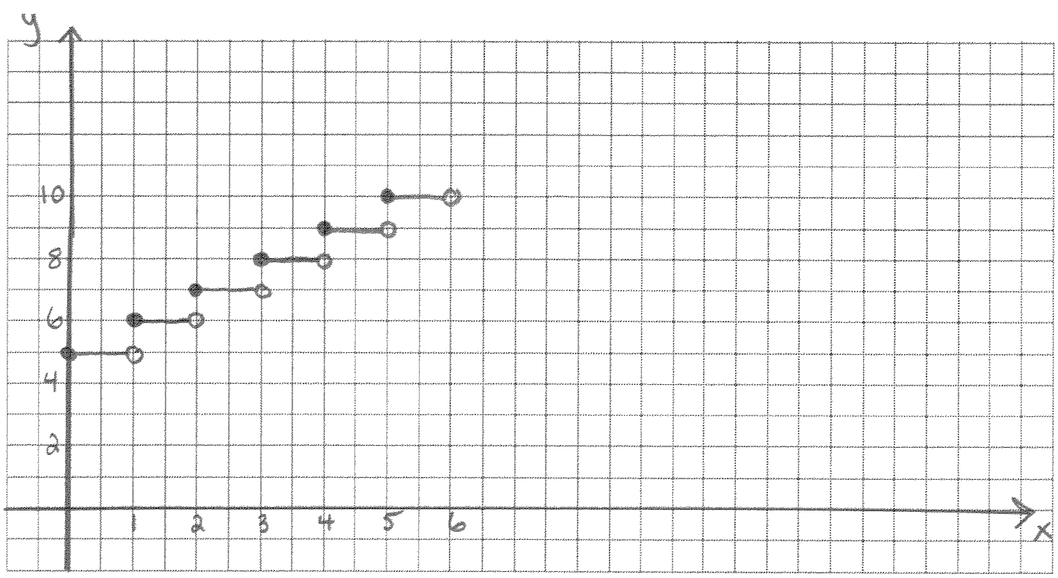
doublons l'achat : 60$: son rabais sera de 9$

Comme 9 n'est pas le double de 3, il est faux de conclure qu'en doublant la valeur de nos achats les rabais doublent aussi.

2. L'entreprise Autogare calcule ses tarifs de stationnement de la façon suivante, où *f*(*x*) représente les frais de stationnement et *x*, le nombre d'heures pendant lesquelles une voiture est garée.

$$f(X) = \begin{cases} 5\,pour\,0 \le x < 1 \\ 6\,pour\,1 \le x < 2 \\ 7\,pour\,2 \le x < 3 \\ 8\,pour\,3 \le x < 4 \\ 9\,pour\,4 \le x < 5 \\ 10\,pour\,5 \le x < 6 \end{cases}$$

a) Trace le graphique de la fonction qui modélise cette situation.



b) Combien doit-on payer pour garer sa voiture pendant 30 minutes ?

5 $

c) Combien doit-on payer pour garer sa voiture pendant 1 h ?

6 $

d) Combien doit-on payer pour garer sa voiture pendant 3 h 25 minutes ?

8 $

e) Combien doit-on payer pour garer sa voiture pendant 5 h 59 minutes ?

10 $

Devoir : p.30 #6, #8, #10 et document plus de mise en pratique

Cours 7

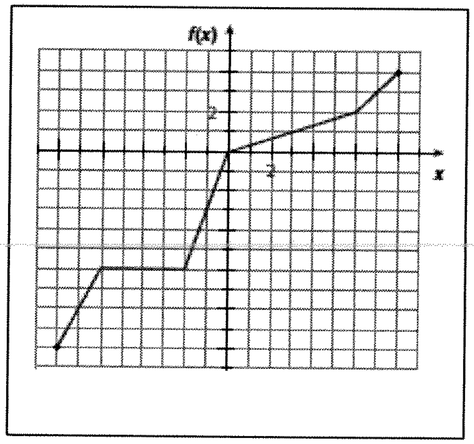
2.2 La fonction affine par parties

La fonction affine par parties est une fonction définie par parties. Il s'agit d'une fonction constituée de plusieurs fonctions affines définies sur différents intervalles de son domaine.

Exercices : * Analyse seulement ce que tu vois

#1 Soit la fonction affine par parties suivantes :

a) Fais l'analyse complète de cette fonction



dom : $x \in [-8, 8]$
ima : $y \in [-10, 4]$
zéro : $x = 0$
ord : $y = 0$
pos : $x \in [0, 8]$
nég : $x \in [-8, 0]$
crois : $x \in [-8, -6] \cup [-2, 8]$
déc : jamais
const : $x \in [-6, -2]$
min : $y = -10$ max : $y = 4$

b) Détermine la règle de cette fonction du type f(x) = ax + b

Pour répondre à cette question voici les étapes à respecter :

1. Numérote les différentes parties du graphique
2. Pour chaque partie calcule le taux de variation *a* à l'aide de **deux points** qui appartiennent à la bonne partie de la droite
3. Pour chaque partie trouve la valeur initiale *b* à l'aide d'un point et du taux de variation.
4. Écris autant de règle qu'il y a de parties sur le graphique en spécifiant l'intervalle du domaine.

pour $x \in [-8, -6]$

Partie ① : $(-6, -6)$ et $(-8, -10)$

1) $a = ?$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{-10 - -6}{-8 - -6} = \frac{-4}{-2} = 2$$

2) $b = ?$

$y = 2x + b$

$-10 = 2 \cdot -8 + b$

$-10 + 16 = b$

$6 = b$

3) $y_1 = 2x + 6$

Partie ② : $y_2 = -6$ pour $x \in [-6, -2]$

Partie ③ pour $x \in [-2, 0]$: $(-2, -6)$ et $(0, 0)$

1) $a = \frac{0 - -6}{0 - -2} = \frac{6}{2} = 3$ 2) $b = 0$ 3) $y_3 = 3x$

Partie ④ pour $x \in [0, 6]$: $(0, 0)$ et $(6, 2)$

1) $a = \frac{2 - 0}{6 - 0} = \frac{1}{3}$ 2) $b = 0$ 3) $y_4 = \frac{1}{3}x$

Partie ⑤ pour $x \in [6, 8]$: $(6, 2)$ et $(8, 4)$

1) $a = \frac{4 - 2}{8 - 6} = \frac{2}{2} = 1$

2) $b = ?$

$y = 1x + b$

$4 \overset{-8}{=} 8 \overset{-8}{} + b$

$-4 = b$

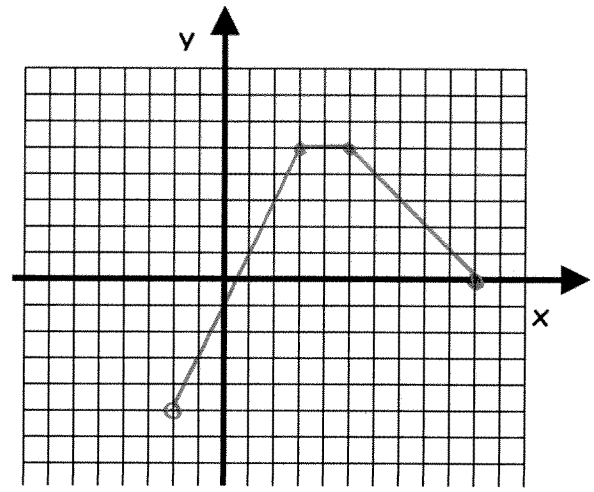
3) $y_5 = x - 4$

Rép:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 6 & x \in [-8, -6] \quad \text{ou} \quad -8 \leq x \leq -6 \\ -6 & x \in [-6, -2] \quad\quad -6 \leq x \leq -2 \\ 3x & x \in [-2, 0] \quad\quad -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{3}x & x \in [0, 6] \quad\quad 0 \leq x \leq 6 \\ x - 4 & x \in [6, 8] \quad\quad 6 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

#2 Trace le graphique de la fonction par parties suivante et fais-en l'analyse complète :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{pour } -2 < x \leq 3 \quad ① \\ 5 & \text{pour } 3 < x \leq 5 \quad ② \\ -x + 10 & \text{pour } 5 < x \leq 10 \quad ③ \end{cases}$$



① $y = 2x - 1$

x	y
-2	-5
3	5

② $y = 5$

x	y
3	5
5	5

③ $y = -x + 10$

x	y
5	5
10	0

* Faire remarquer que la fin d'une droite est le début de l'autre !

dom : $x \in]-2, 10]$

ima : $y \in]-5, 5]$

zéro : $x_1 = 1/2$ et $x_2 = 10$

ordonnée : $y = -1$

positive : $x \in [1/2, 10]$

négative : $x \in]-2, 1/2]$

min : pas de min

max : $y = 5$

crois : $x \in]-2, 3]$

déc : $x \in [5, 10]$

const : $x \in [3, 5]$

trouvons le premier zéro :

$x = ?$ si $y_1 = 0$

$y_1 = 2x - 1$

$0 = 2x - 1$

$\frac{1}{2} = \frac{2x}{2}$

$1/2 = x$

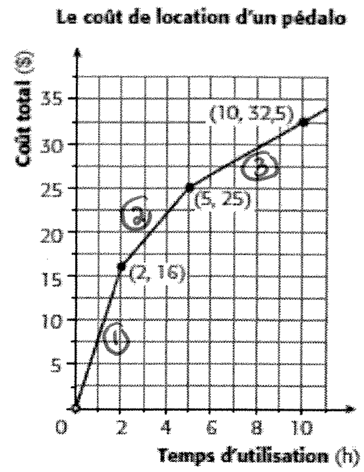
Devoir : p.35 #1 et 2 « ai-je bien compris »
p. 37 #1 et 2 « ai-je bien compris »
p. 42 # 6, 8, 9, 10 a)

<u>**Mini-test #3 au prochain cours**</u>

Cours 8

Exercices :

#1 Voici le graphique illustrant le coût de location d'un pédalo en fonction de son temps d'utilisation.



a) Quels sont les différents tarifs qui peuvent être appliqués à quelqu'un qui loue un pédalo ?

Partie 1 : $a = 8$ $/h

Partie 2 :

$a = \frac{25 - 16}{5 - 2} = 3$ $/h

Partie 3

$a = \frac{32,5 - 25}{10 - 5}$

$a = 1,50$ $/h

b) Quelle somme devra débourser quelqu'un qui compte faire du pédalo pendant 1 h 30 ? → Donc partie 1

$y = ?$ si $x = 1,5$

$y = 8x$

$y = 8 \cdot 1,5$

$y = 12$

il devra débourser 12 $

c) Si Jasmine a dû débourser 28 $, pendant combien de temps a-t-elle utilisé le pédalo ?

→ Donc partie 3

1) $a = 1,5$

2) b : $y = 1,5x + b$

$25 = 1,5 \cdot 5 + b$

$-7,5 \quad -7,5$

$25 = 7,5 + b$

$17,5 = b$

donc $y = 1,5x + 17,5$

3) $x = ?$ si $y = 28$

$-17,5 \quad -17,5$

$28 = 1,5x + 17,5$

$\frac{10,5}{1,5} = \frac{1,5x}{1,5}$

$7 = x$

Jasmin a fait 7 heures de pédalo.

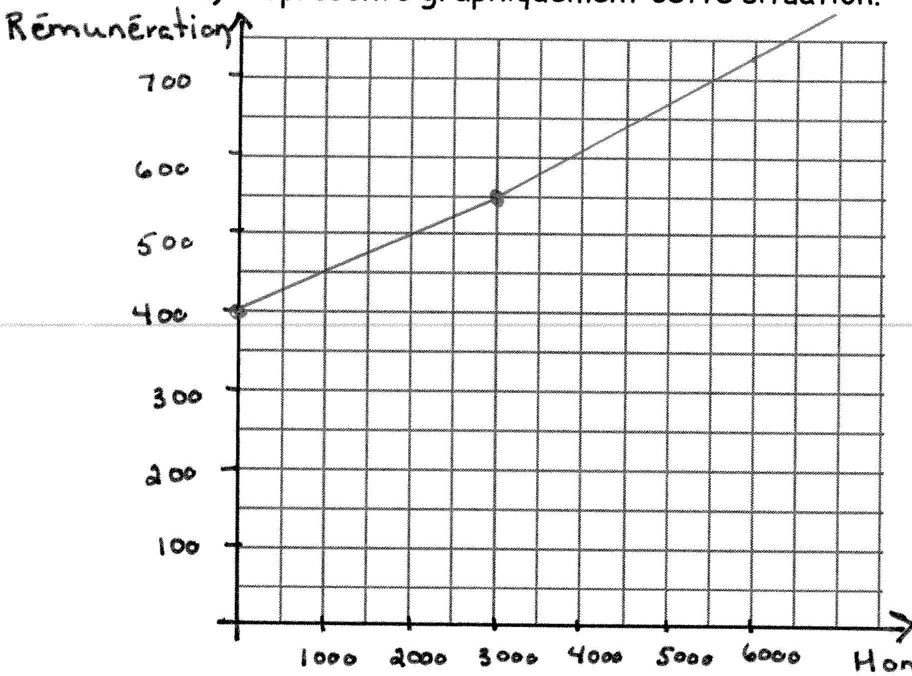
2 Maria vend du matériel de cinéma maison. Elle touche un salaire hebdomadaire en plus d'une commission proportionnelle aux ventes qu'elle effectue. On peut déterminer sa rémunération $r(v)$, en dollars, pour une semaine donnée à partir du montant total de ses ventes v, en dollars, au cours de la même semaine, cela, à l'aide des fonctions définies ci-dessous.

Lorsque le total de ses ventes est de 3 000 \$ ou moins, $r(v) = 0{,}05v + 400$.

Lorsque le total de ses ventes dépasse 3 000 \$, $r(v) = 0{,}06v + 370$.

a) Représente graphiquement cette situation.

$$r(v) = \begin{cases} 0{,}05v + 400 & x \in [0,\ 3000 \\ 0{,}06v + 370 & x \in [3000,\ \infty \end{cases}$$



Partie ①

x	y
0	400
3000	550

Partie ②

x	y
3000	550
6000	730

b) Donne le domaine et l'image de cette fonction.

dom : $x \in [0, \infty[$

ima : $y \in [400, \infty[$

c) Quelle est la rémunération de Maria pour une semaine au cours de laquelle le montant total de ses ventes s'établit à :

1) 2 500 \$?

Partie ①

$r(2\,500) = 0{,}05 \cdot 2500 + 400$

$= 525\$$

2) 4 500 \$?

Partie ②

$r(4500) = 0{,}06 \cdot 4500 + 370$

$= 640\$$

Devoir : p. 40 # 1, 2, 4, 11, 14
p. 46 # 1 et 5

Cours 9 et 10 :

Faire un résumé
Document d'exercices préparatoires
Voici des exercices supplémentaires : p. 46 # 2, 3, 7, 10, 13

Cours 11 :

Examen toute la période ! Tu peux te prévoir du travail personnel !!!