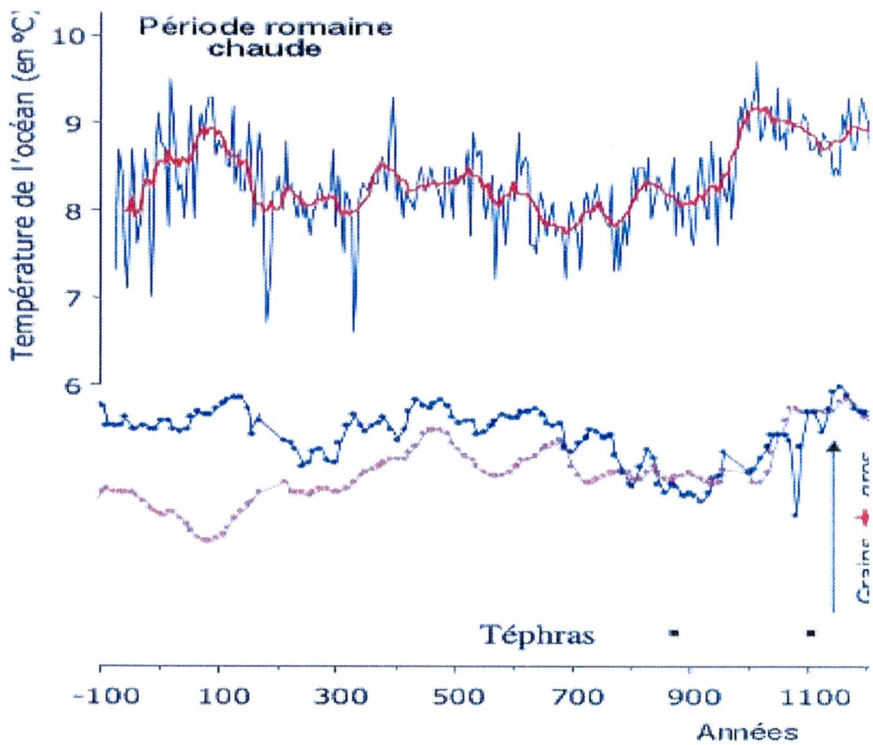
Les fonctions réelles
(Préalables)



ATHÉMATIQUE

Nom : ________________________________

Groupe : ______________

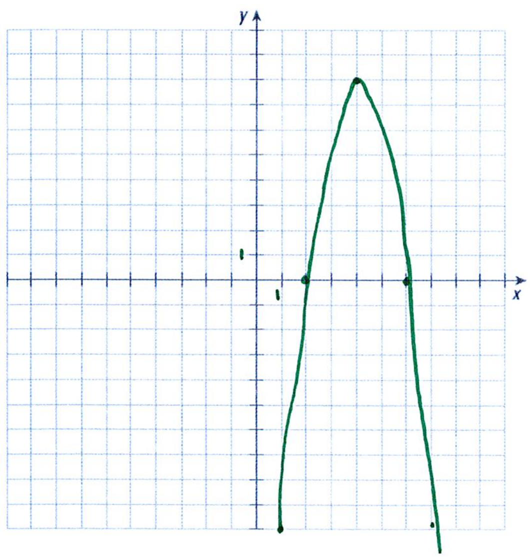
Rappels importants :

1-Rôle des paramètres :

Reprenons les fonctions vues l'an passé sous leur forme canonique

Fonction quadratique : $f(x) = a(b(x-h))^2 + k$ ou $f(x) = a(x-h)^2 + k$

Ex : $f(x) = -2(x-4)^2 + 8$



sommet : $(4, 8)$

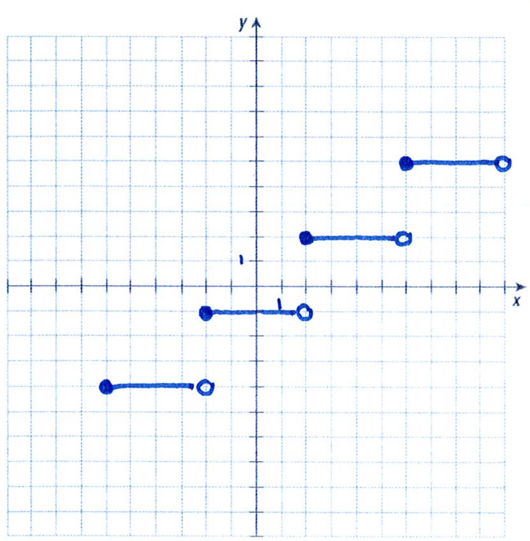
$a < 0$

table (voir calculatrice)

x	y
1	-10
2	0
4	8
6	0
7	-10

Fonction partie entière : $f(x) = a[b(x-h)] + k$

Ex : $f(x) = 3\left[\frac{1}{4}(x+2)\right] - 1$



1) Paramètres

$a = 3$

$b = 1/4$

$h = -2$

$k = -1$

2) Graphique

$a+$ $b+$ $\nearrow$

$b+$ •—o

$a = 3$ $\updownarrow = 3$

$b = \frac{1}{4}$ $\longleftrightarrow = 4$ $\left(\frac{1}{|b|}\right)$

• $(-2, -1)$

En résumé : (tiré du chapitre 1 en SN-4 !!)

Il existe deux variables : variables indépendantes : x

variables dépendantes : y

Il existe quatre paramètres : paramètres multiplicatifs : a et b

paramètres additifs : h et k

Influence des paramètres :

paramètre		modification
* h	h positif	translation vers la droite
	h négatif	translation vers la gauche
* k	k positif	translation vers le haut
	k négatif	translation vers le bas
* a	a négatif	Réflexion d'axe des x
* b	b négatif	Réflexion d'axe des y
a	$\lvert a \rvert > 1$	allongement vertical
	$0 < \lvert a \rvert < 1$	rétrécissement vertical
b	$\lvert b \rvert > 1$	rétrécissement horizontal
	$0 < \lvert b \rvert < 1$	allongement horizontal

Voici les fonctions que nous allons voir cette année :

- Fonction valeur absolue : $f(x) = a|x - h| + k$
- Fonction racine carrée : $f(x) = a\sqrt{\pm(x-h)} + k$
- Fonction rationnelle : $f(x) = \frac{a}{x-h} + k$
- Fonction sinusoïdale : $ex.:\ f(x) = a\ sin\ b(x-h) + k$
- Fonction exponentielle : $f(x) = a\ c^{b(x-h)} + k\ \ ou\ f(x) = ac^{x} + k$
- Fonction logarithmique : $f(x) = a\ log_c b(x-h) + k$
  $ou\ f(x) = log_c b(x-h)$

Ces fonctions ont toutes en commun les mêmes paramètres qui joueront le même rôle !!

2-La réciproque d'une fonction :

Une réciproque s'obtient en intervertissant les valeurs de chacun des couples d'une relation entre deux variables.

Ex. :

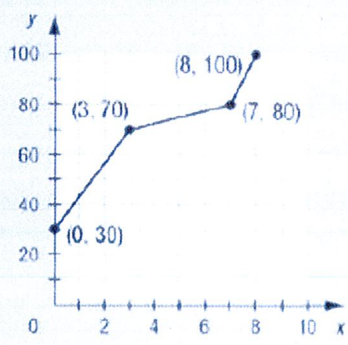
Relation A

x	0	3	7	8
y	30	70	80	100

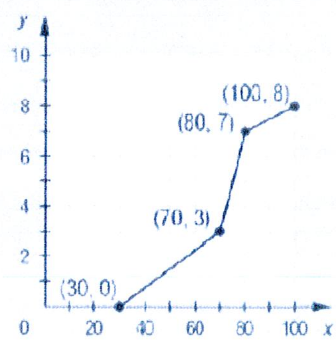
Relation B

x	30	70	80	100
y	0	3	7	8

Relation A



Relation B



La relation **B** est la réciproque de la relation **A** et vice versa.

Algébriquement, on obtient la règle de la réciproque d'une fonction en attribuant à la variable indépendante le rôle de la variable dépendante et vice versa. La réciproque de $f(x)$ est notée $f^{-1}(x)$

Exercices :

#1 Établissez la règle de la réciproque des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2x - 4$

$x \overset{+4}{=} 2y - 4 \quad {}^{+4}$

$\frac{x+4}{2} = \frac{2y}{2}$

$y = \frac{x}{2} + 2$

Donc $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + 2$

b) $g(x) = 0{,}1(3 - 5x) + 7$

$x \overset{-7}{=} 0{,}1(3-5y) + 7 \quad {}^{-7}$

$x - 7 \overset{-0,3}{=} 0{,}3 \overset{-0,3}{-} 0{,}5y$

$\frac{x - 7{,}3}{-0{,}5} = \frac{-0{,}5y}{-0{,}5}$

$y = -2x + 14{,}6$

Donc $g^{-1}(x) = -2x + 14{,}6$

c) $h(x) = x^2 + 5$

$x \overset{-5}{=} y^2 + 5 \ -5$

$\sqrt{x-5} = \sqrt{y^2}$

$y = \pm\sqrt{x-5}$

Donc $h^{-1}(x) = \pm\sqrt{x-5}$

d) $i(x) = \frac{4}{5}(x - \frac{1}{3})$

$x \overset{\cdot 5/4}{=} \overset{\cdot 5/4}{\frac{4}{5}}\left(y - \frac{1}{3}\right)$

$\frac{5x}{4} = y - \frac{1}{3}$

$y = \frac{5x}{4} + \frac{1}{3}$

Donc $i^{-1}(x) = \frac{5x}{4} + \frac{1}{3}$

e) $j(x) = \frac{-5}{x-3} - 6$

$x \overset{+6}{=} \frac{-5}{y-3} - 6 \quad {}^{+6}$

$\frac{x+6}{1} = \frac{-5}{y-3}$

$y - 3 \overset{+3}{=} \frac{-5}{x+6} + 3$

$y = \frac{-5}{x+6} + 3$

Donc $j^{-1}(x) = \frac{-5}{x+6} + 3$

f) $k(x) = \frac{2}{(3x+9)} + 1$

$x = \frac{2}{3y+9} + 1$

$x - 1 = \frac{2}{3y+9}$

$3y + 9 \overset{-9}{=} \frac{2}{x-1} - 9$

$\frac{3y}{3} = \frac{2}{x-1} \div 3 - \frac{9}{3}$

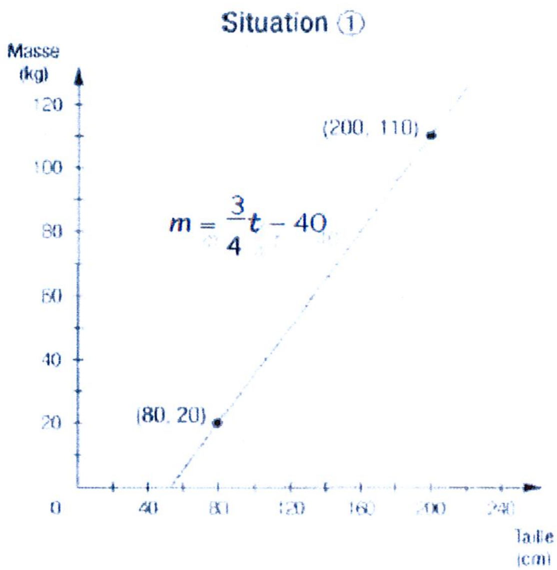
$y = \frac{2}{3(x-1)} - 3$

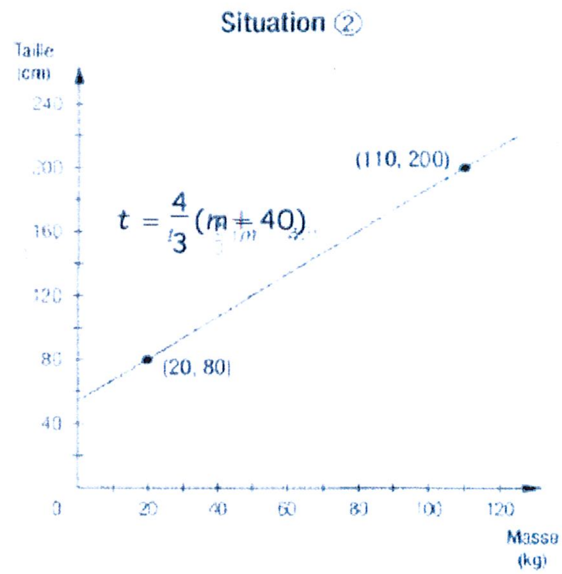
Donc

$k^{-1}(x) = \frac{2}{3(x-1)} - 3$

Attention, certaines réciproques de fonctions ne sont pas des fonctions, par exemple la fonction valeur absolue !!

#2 Il existe plusieurs façons de déterminer le poids santé d'une personne selon sa taille ou son âge, par exemple. L'une d'elles est la relation de Lorentz. Cette relation permet de déterminer, pour une taille donnée, le poids santé d'une personne. Voici deux règles et la représentation graphique de chacune, où m représente la masse et t, la taille d'un homme, selon la relation de Lorentz.





a) Quelle est la variable indépendante dans :

1) la situation #1 : taille (cm)

2) la situation #2 : Masse (kg)

b) Vérifiez algébriquement que les règles des 2 situations sont des réciproques l'une de l'autre.

① $m = \frac{3}{4}t - 40$

$t \overset{+4}{=} \frac{3}{4}m - 40 \; {}^{+4}$

$(t + 40) \overset{\cdot 4/3}{=} \frac{3}{4}m \; {}^{\cdot 4/3}$

$\frac{4}{3}(t + 40) = m$

c) Chez les femmes, la relation de Lorentz est donnée par la règle $m = \frac{3}{4}t - 62{,}5$. Établissez la règle qui permet d'exprimer la taille d'une femme en fonction de sa masse. Donc isole t :

$m \overset{+62.5}{=} \frac{3}{4}t - 62.5 \; {}^{+62.5}$

$(m + 62.5) \overset{\cdot 4/3}{=} \frac{3}{4}t \; {}^{\cdot 4/3}$

Donc $t = \frac{4}{3}(m + 62.5)$

3-Opérations sur les fonctions

Il est possible d'effectuer des opérations sur les fonctions telles que l'addition, la soustraction, la multiplication et la division.

Exercice : Dans chaque cas, effectuez les opérations indiquées à l'aide des fonctions suivantes :

$$f(x) = 5x - 4 \quad g(x) = x^2 + 3x \quad h(x) = 5x^2 + 6x - 8 \quad j(x) = \sqrt{x}$$

a) $f + g$

$(5x - 4) + (x^2 + 3x)$

$5x - 4 + x^2 + 3x$

$x^2 + 8x - 4$

b) $g - h$

$(x^2 + 3x) - (5x^2 + 6x - 8)$

$x^2 + 3x - 5x^2 - 6x + 8$

$-4x^2 - 3x + 8$

c) $\frac{h}{f} = \dfrac{5x^2 + 6x - 8}{5x - 4}$

Num: $\left.\begin{array}{l} S = 6 \\ P = -40 \end{array}\right\}$ $5x^2 + 10x - 4x - 8$

$5x(x + 2) - 4(x + 2)$

$(5x - 4)(x + 2)$

Donc : $\dfrac{(\cancel{5x - 4})(x + 2)}{(\cancel{5x - 4})} = (x + 2)$

d) $g \times h$

$(x^2 + 3x)(5x^2 + 6x - 8)$

$5x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 15x^3 + 18x^2 - 24x$

$5x^4 + 21x^3 + 10x^2 - 24x$

f) $f \times (g + h)$

$(5x - 4)\left((x^2 + 3x) + (5x^2 + 6x - 8)\right)$

$(5x - 4)(6x^2 + 9x - 8)$

$30x^3 + 45x^2 - 40x - 24x^2 - 36x + 32$

$30x^3 + 21x^2 - 76x + 32$

g) $\frac{g}{f}$ $\dfrac{x^2 + 3x}{5x - 4}$

$\frac{3}{1} + \frac{4}{5} = \frac{15}{5} + \frac{4}{5}$

$x^2 + 3x \;\big|\; 5x - 4$

$-\;x^2 - 4/5\,x \qquad 1/5\,x + 19/25$

$19/5\,x$

$-\;19/5\,x - 76/25$

$76/25$

Restriction
$5x - 4 \neq 0$
$x \neq 4/5$

Donc $\frac{1}{5}x + \frac{19}{25}$ reste $\frac{76}{25}$ si $x \neq 4/5$

4-Composition de fonctions :

Il est possible d'effectuer une composition de fonctions, c'est-à-dire d'appliquer une fonction à une autre fonction. La composée de la fonction f suivie de la fonction g se note $g°f$ *ou* $g(f(x))$. La règle de cette composée s'obtient en substituant la variable indépendante de la fonction g par l'expression représentant la variable dépendante de la fonction f.

Exercice : Dans chaque cas, effectuez la composition indiquée à l'aide des fonctions suivantes :

$$f(x) = x + 12 \qquad g(x) = (3x - 6)^2 \qquad h(x) = 2^x \qquad j(x) = 2\sqrt{x} - 12$$

a) $f(g(x))$

$f(g(x)) = (3x-6)^2 + 12$
$= 9x^2 - 36x + 36 + 12$
$= 9x^2 - 36x + 48$

b) $g(f(x))$

$g(f(x)) = (3(x+12) - 6)^2$
$= (3x + 36 - 6)^2$
$= (3x + 30)^2$
$= 9x^2 + 180x + 900$

c) $j°f = j(f(x))$

$j(f(x)) = 2\sqrt{x+12} - 12$

d) $f°j = f(j(x))$

$f(j(x)) = 2\sqrt{x} - 12 + 12$
$= 2\sqrt{x}$

e) $j(g(x))$

$j(g(x)) = 2\sqrt{(3x-6)^2} - 12$
$= 2(3x-6) - 12$
$= 6x - 12 - 12$
$= 6x - 24$

f) $h°f = h(f(x))$

$h(f(x)) = 2^{x+12}$

Note : tant les opérations sur les fonctions que la composition de fonctions engendrent d'autres fonctions.

5-La factorisation:

La factorisation d'un polynôme consiste à écrire celui-ci comme un produit de polynômes.

Résumé

1-Mise en évidence simple → Ne l'oubliez pas !!

ex : $5x^2 - 20x - 105$

$5(x^2 - 4x - 21)$

2-Nombre de termes :

4 termes

Double mise en évidence :

$8xy - 10x + 12y - 15$

$2x(4y-5) + 3(4y-5)$

$(4y-5)(2x+3)$

3 termes

Trinôme :

Court : $x^2 - 4x - 21$ $\begin{cases} S: -4 \\ P: -21 \end{cases}$

$(x-7)(x+3)$

Long : $8x^2 + 2x - 15$ $\begin{cases} S = 2 \\ P = -120 \end{cases}$

$8x^2 + 12x - 10x - 15$

$4x(2x+3) - 5(2x+3)$

$(2x+3)(4x-5)$

Trinôme carré parfait :

$4x^2 + 12x + 9$

$\sqrt{4x^2} = 2x$

$\sqrt{9} = 3$

$2 \cdot 2x \cdot 3 = 12x$

$(2x+3)^2$

2 termes

Différence de deux carrés :

$16x^2 - 25$

$\sqrt{16x^2} = 4x$

$\sqrt{25} = 5$

$(4x-5)(4x+5)$

Notre but en cinquième secondaire : simplifier ce type d'expression !

$$\frac{sin^2x + 3sinx + 3}{sinx + 1}$$

Formule quadratique peu pratique !!!

Exercices :

#1 Factorise :

a) $8x^2 - 18$

$2(4x^2 - 9)$

$2(2x+3)(2x-3)$

b) $18x^3 + 27x^2 - 8x - 12$

$9x^2(2x+3) - 4(2x+3)$

$(2x+3)(9x^2-4)$

$(2x+3)(3x-2)(3x+2)$

c) $16x^2 + 8x + 1$

$\sqrt{16x^2} = 4x$

$\sqrt{1} = 1$

$2 \cdot 4x \cdot 1 = 8x$

$(4x+1)^2$

d) $(x+1)^2 - 36$

$((x+1)-6)((x+1)+6)$

$(x-5)(x+7)$

e) $x^2 + 5xy + 6x + 30y$

$x(x+5y) + 6(x+5y)$

$(x+5y)(x+6)$

f) $2x^2 - 13x + 15$

$S = -13$

$P = 30$

$2x^2 - 10x - 3x + 15$

$2x(x-5) - 3(x-5)$

$(x-5)(2x-3)$

g) $12x^2 - 14x - 10$

$2(6x^2 - 7x - 5)$

$S = -7$

$P = -30$

$2(6x^2 - 10x + 3x - 5)$

$2(2x(3x-5) + 1(3x-5))$

$2(3x-5)(2x+1)$

h) $9 - (3x-1)^2$

$(3 - (3x-1))(3 + (3x-1))$

$(-3x+4)(3x+2)$

#2 Résous

T.C.P. a) $x^2 + 4x + 4 = 0$

$\sqrt{(x+2)^2} = \sqrt{0}$

$x + 2 = 0$

$x = -2$

b) $3x^2 - x - 10 = 0$

$S = -1$

$P = -30$

$3x^2 - 6x + 5x - 10 = 0$

$3x(x-2) + 5(x-2) = 0$

$(x-2)(3x+5) = 0$

$x - 2 = 0$ $\quad$ $3x + 5 = 0$

$x = 2$ $\quad$ $x = -5/3$

c) $2(6x^2 + 7) = 7(3x^2 - 5)$

$12x^2 + 14 = 21x^2 - 35$

$9x^2 - 49 = 0$

$(3x-7)(3x+7) = 0$

$3x - 7 = 0$ $\quad$ $3x + 7 = 0$

$x = 7/3$ $\quad$ $x = -7/3$

c) $\frac{x^2}{2} \cdot 2 + 9x \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 0 \cdot 2$

$x^2 + 18x - 6 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - (4 \cdot 1 \cdot -6)}}{2}$

$x_1 = -18{,}327$ $\quad$ $x_2 = 0{,}327$

6-Réduction d'expression algébrique :

Pour réduire des expressions algébriques, il faut d'abord factoriser le numérateur et le dénominateur pour ensuite pouvoir simplifier.

- Multiplication : Factoriser, poser les restrictions, simplifier
- Division : Reviens à multiplier par l'inverse multiplicatif du diviseur
- Addition et soustraction : Factoriser, trouver le plus petit commun multiple (dénominateur commun), poser les restrictions, etc

Exercice : Simplifiez les expressions rationnelles suivantes :

a) $\frac{x^2+10x+25}{x^3+5x^2}$

Num: $(x+5)(x+5)$

Dén: $x^2(x+5)$

Rest. $x \neq 0$ $\quad$ $x \neq -5$

Donc $\frac{(x+5)\cancel{(x+5)}}{x^2\cancel{(x+5)}} = \frac{x+5}{x^2}$ pour $x \neq 0$ et $x \neq -5$

b) $\dfrac{12x^3y-12x^2y}{x^2-5x-14}\cdot\dfrac{4x^4-28x^3-16x^2+112x}{8x^2-16x+8}$ N1, D1, N2, D2 $= \dfrac{12x^2y\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-7)}\cancel{(x+2)}}\cdot\dfrac{4x\cancel{(x-7)}(x-2)\cancel{(x+2)}}{8\cancel{(x-1)}(x-1)}$

$= \dfrac{6x^3y(x-2)}{(x-1)}$ pour $x \neq -2$, $x \neq 1$, $x \neq 7$

N_1 : $12x^2y(x-1)$

D_1 : $(x-7)(x+2)$

$S=-5$

$P=-14$

Rest. $x \neq 7$

$x = -2$

N_2 : $4x(x^3-7x^2-4x+28)$

$4x(x^2(x-7)-4(x-7))$

$4x(x-7)(x^2-4)$

$4x(x-7)(x-2)(x+2)$

D_2 : $8x^2-16x+8$

$8(x^2-2x+1)$

$8(x-1)^2$

$8(x-1)(x-1)$

Rest $x \neq 1$

c) $\dfrac{4x^2-20x+25}{15xy+5y-6x-2}\div\dfrac{4x^2-25}{25x^2-20x+4}$ N1, D1 $= \dfrac{4x^2-20x+25}{15xy+5y-6x-2}\cdot\dfrac{25x^2-20x+4}{4x^2-25}$ N2, D2

$= \dfrac{\cancel{(2x-5)}(2x-5)}{(3x+1)(5y-2)}\cdot\dfrac{(5x-2)(5x-2)}{\cancel{(2x-5)}(2x+5)}$

$= \dfrac{(2x-5)(5x-2)^2}{(3x+1)(5y-2)(2x+5)}$ pour $x \neq -1/3$, $x \neq -5/2$, $x \neq 2/5$, $x \neq 5/2$, $y \neq 2/5$

N_1 : $(2x-5)^2 = (2x-5)(2x-5)$

D_1 : $5y(3x+1)-2(3x+1)$

$(3x+1)(5y-2)$

Rest : $x \neq -1/3$ $y \neq 2/5$

N_2 : $(5x-2)^2 = (5x-2)(5x-2)$

Rest : $x \neq 2/5$

D_2 : $(2x-5)(2x+5)$

Rest : $x \neq 5/2$

$x \neq -5/2$

c) $\frac{1}{x+2}^{(x-3)} + \frac{4}{x-3}(x+2)$

$$\frac{(x-3)+4(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

$$\frac{x-3+4x+8}{(x+2)(x-3)}$$

$$\frac{5x+5}{(x+2)(x-3)}$$ si $x \neq -2$, $x \neq 3$

d) $\frac{5}{x}^{(x+1)} + \frac{3}{x+1}x$

$$\frac{5x+5+3x}{x(x+1)}$$

$$\frac{8x+5}{x(x+1)}$$ si $x \neq 0$, $x \neq -1$

c) $\frac{4}{x^2-25} - \frac{2x}{x^2-x-20}$

$$\frac{4}{(x-5)(x+5)}(x+4) - \frac{2x}{(x-5)(x+4)}(x+5)$$

$$\frac{4x+16-2x^2-10x}{(x-5)(x+5)(x+4)}$$

$$\frac{-2x^2-6x+16}{(x-5)(x+5)(x+4)}$$ si $x \neq \pm 5$, $x \neq -4$

d) $\frac{2}{5x}^{(x-2)} + \frac{3}{x(x-2)} \cdot 5$

$$\frac{2x-4+15}{5x(x-2)}$$

$$\frac{2x+11}{5x(x-2)}$$ si $x \neq 0$, $x \neq 2$

7-Propriétés des exposants :

Les voici :

- $a^{-1} = \frac{1}{a} \quad pour\ a \neq 0$
- $a^0 = 1 \quad pour\ a \ \neq 0$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(ab^n)^m = a^m b^{nm}$

8-Propriétés des radicaux :

Les voici :

- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \ sauf\ si\ n\ est\ pair\ et\ a^m < 0$
- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} \ \ pour\ a \geq 0\ et\ b \geq 0$
- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad pour\ a \geq 0 \ \ et\ b \ > 0$

9-La rationalisation

Rationaliser une expression écrite sous la forme fractionnaire consiste à transformer le dénominateur irrationnel en un nombre rationnel. Lorsqu'une telle expression présente au moins un radical au dénominateur, il est possible de rationaliser ce dénominateur en multipliant par une **fraction unitaire appropriée**.

- $\frac{a}{\sqrt{b}} \ \ \boldsymbol{devient}\ \frac{a}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} \ \ \boldsymbol{pour\ b\ > 0}$
- $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \ \ \boldsymbol{devient}\ \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \times \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c} \ \boldsymbol{pour\ b \geq 0 \geq, c \geq 0\ et\ b \neq c}$
- $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} \ \ \boldsymbol{devient}\ \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} \times \frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b+c} \ \boldsymbol{pour\ b \geq 0 \geq, c \geq 0\ et\ b \neq c}$

Exercices

#1 Écrivez chacune des expressions ci-dessous à l'aide d'un seul radical dans lequel le radicande est réduit.

a) $2^{\frac{9}{2}}$

$= 2^{8/2} \cdot 2^{1/2}$

$= 2^4 \cdot 2^{1/2}$

$= 16\sqrt{2}$

b) $3^{\frac{2}{5}}$

$= \sqrt[5]{3^2}$

$= \sqrt[5]{9}$

c) $\frac{3^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{8}}{2^{\frac{1}{2}}}$

$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{8}{2}}$

$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{4}$

$= 2\sqrt{3}$

d) $(\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{3x}} \div \sqrt{x}) \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7x}}$

$\sqrt{\frac{2x}{3x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}x}$

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7x}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{21x^2}}$

$= \frac{2}{x\sqrt{21}} \cdot \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21x}$

e) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{8} - 2\sqrt{32}$

$= \sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{4 \cdot 2} - 2\sqrt{16 \cdot 2}$

$= 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 8\sqrt{2}$

$= -2\sqrt{2}$

#2 Rationalisez le dénominateur de chacune des expressions suivantes.

a) $\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{5}{\sqrt{15} \times \sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{90}}$

$= \frac{5}{3\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{3 \cdot 10}$

$= \frac{5\sqrt{10}}{30} = \frac{\sqrt{10}}{6}$

c) $\frac{1}{2-\sqrt{13}} \cdot \frac{2+\sqrt{13}}{2+\sqrt{13}}$

$= \frac{2+\sqrt{13}}{(2-\sqrt{13})(2+\sqrt{13})}$

$= \frac{2+\sqrt{13}}{4-13} = \frac{2+\sqrt{13}}{-9}$

$= \frac{-2-\sqrt{13}}{9}$

d) $\frac{5}{\sqrt{11}+\sqrt{17}} \cdot \frac{\sqrt{11}-\sqrt{17}}{\sqrt{11}-\sqrt{17}}$

$= \frac{5\sqrt{11} - 5\sqrt{17}}{11 - 17}$

$= \frac{5\sqrt{11} - 5\sqrt{17}}{-6}$

$= \frac{-5(\sqrt{11} - \sqrt{17})}{6}$