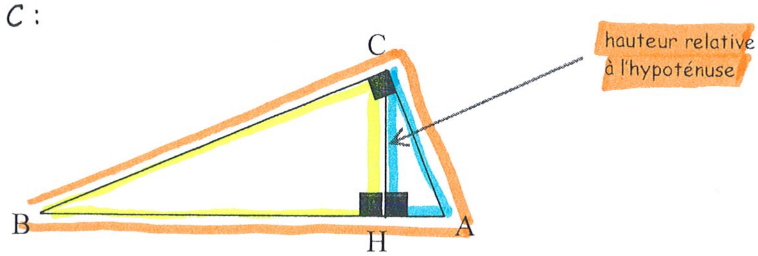
Chapitre 6 : Relations métriques et figures équivalentes

1. Définitions

Relations métriques : Ce sont trois relations qui, en plus de la relation de Pythagore, permettent de trouver des mesures manquantes dans les triangles rectangles.

Il est possible de montrer que dans tout triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse détermine deux triangles semblables au triangle ABC, d'où découlent les trois relations métriques.

Soit le triangle ABC rectangle en C :



Hauteur relative à l'hypoténuse ($\overline{CH}$): Dans un triangle rectangle, c'est la hauteur issue de l'angle droit.

Montrons que les trois triangles sont semblables :

- $\Delta ABC \sim \Delta ACH$
  $\angle A \cong \angle A$ Par réflexivité de la relation d'isométrie
  $\angle ACB \cong \angle AHC$ Par hypothèse
  $\Delta ABC \sim \Delta ACH$ Par AA (phrase !!)

- $\Delta ABC \sim \Delta CBH$
  $\angle B \cong \angle B$ Par réflexivité de la relation d'isométrie
  $\angle ACB \cong \angle CHB$ Par hypothèse
  $\Delta ABC \sim \Delta CBH$ Par AA

- Par la transitivité de la relation de similitude, $\Delta ACH \sim \Delta CBH$.
- **Donc**, $\Delta ABC \sim \Delta ACH \sim \Delta CBH$.

Moyenne proportionnelle : nombre obtenu en prenant la racine carrée du produit de deux nombres.

Exemple : Pour 4 et 9 la moyenne proportionnelle est 6
car $6 = \sqrt{4 \cdot 9}$
$6 = \sqrt{36}$

Ainsi, dans une proportion, lorsque les 2 extrêmes ou les 2 moyens ont la même valeur, cette valeur est dite moyenne proportionnelle.

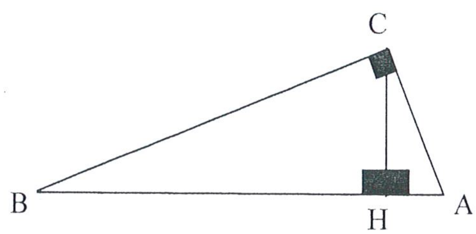
Exemple : $\frac{4}{10} = \frac{10}{25}$ $\quad 10^2 = 4 \cdot 25$
$10 = \sqrt{100}$

Donc 10 est moyenne proportionnelle de 4 et 25

En général, si $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

on dit que b est moyenne proportionnelle de a et c.

Soit le triangle rectangle suivant :



$\overline{AB}$: hypoténuse

$\overline{BC}$: grande cathète

$\overline{AC}$: petite cathète

$\overline{CH}$: hauteur relative à l'hypoténuse

$\overline{BH}$: projection sur l'hyp de la cathète $\overline{BC}$ ou segment de l'hypoténuse

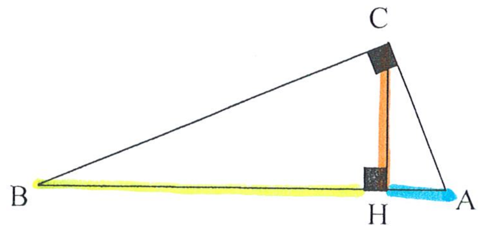
$\overline{AH}$: projection sur l'hyp de la cathète $\overline{AC}$ ou segment de l'hypoténuse

déterminés par la hauteur rel. à l'hyp.

* grande cathète => grande projection (sommet commun)

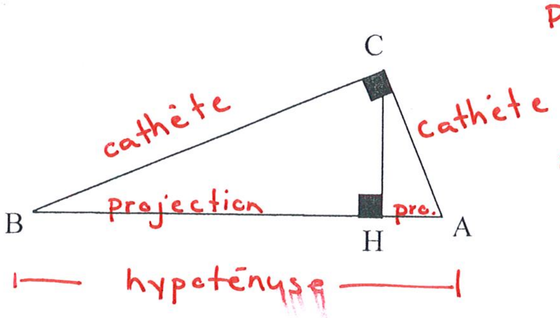
2. Les relations métriques

Relation 1 : Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.



$$\frac{m\overline{CH}}{m\overline{BH}} = \frac{m\overline{AH}}{m\overline{CH}}$$

Relation 2 : Dans un triangle rectangle, la mesure de chaque cathète est moyenne proportionnelle entre la mesure de sa projection sur l'hypoténuse et l'hypoténuse entière.



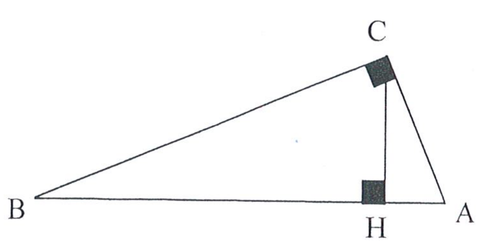
Pour $\overline{CB}$:

$$\frac{m\overline{CB}}{m\overline{BH}} = \frac{m\overline{AB}}{m\overline{CB}}$$

Pour $\overline{AC}$:

$$\frac{m\overline{AC}}{m\overline{AH}} = \frac{m\overline{AB}}{m\overline{AC}}$$

Relation 3 : Dans un triangle rectangle, le produit des cathètes est égal au produit de l'hypoténuse et de sa hauteur relative.

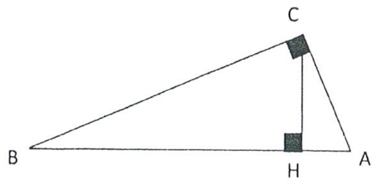


$$m\overline{BC} \cdot m\overline{AC} = m\overline{AB} \cdot m\overline{CH}$$

Démonstrations :

Relation 1: Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

Soit



$\triangle CBH \sim \triangle CAH$ Voir p. 1

$\dfrac{m\overline{CH}}{m\overline{AH}} = \dfrac{m\overline{BH}}{m\overline{CH}}$ Car dans les triangles semblables les côtés homologues sont proportionnels

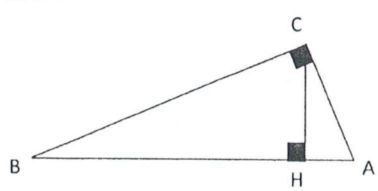
$(m\overline{CH})^2 = m\overline{AH} \cdot m\overline{BH}$ Dans une proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

$m\overline{CH} = \sqrt{m\overline{AH} \cdot m\overline{BH}}$

Donc la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle de $m\overline{AH}$ et $m\overline{BH}$

Relation 2 : Dans un triangle rectangle, la mesure de chaque cathète est moyenne proportionnelle entre la mesure de sa projection sur l'hypoténuse et l'hypoténuse entière.

Soit :



Pour $\overline{BC}$:

$\triangle CBH \sim \triangle ABC$ voir p. 1

$\dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{AB}} = \dfrac{m\overline{BH}}{m\overline{BC}}$ Car dans les triangles semblables les côtés homologues sont proportionnels

$m\overline{BC}^2 = m\overline{AB} \cdot m\overline{BH}$ Dans une proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens

$m\overline{BC} = \sqrt{m\overline{AB} \cdot m\overline{BH}}$

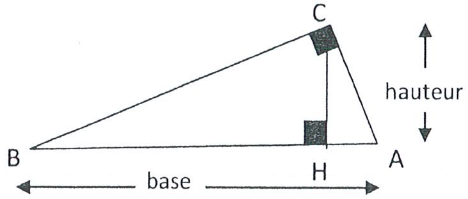
Donc la cathète $\overline{BC}$ est moyenne proportionnelle de $m\overline{AB}$ et $m\overline{BH}$

hyp projection

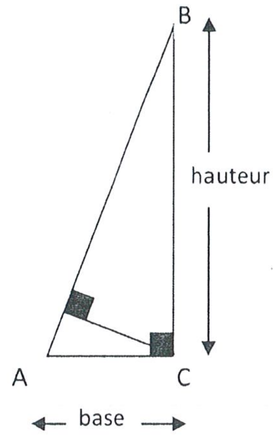
Relation 3 : Dans un triangle rectangle, le produit des cathètes est égal au produit de l'hypoténuse et de sa hauteur relative.

Calculons l'aire du triangle rectangle ABC de deux façons différentes :

$A = \frac{b \cdot h}{2}$



$A = \frac{m\overline{AB} \cdot m\overline{CH}}{2}$



$A = \frac{m\overline{AC} \cdot m\overline{BC}}{2}$

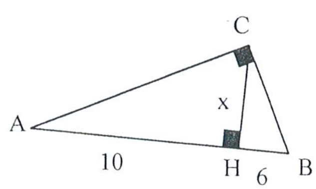
Ainsi, par **transitivité de la relation d'égalité**, on a :

$$\frac{m\overline{AB} \cdot m\overline{CH}}{\cancel{2}} \cdot 2 = \frac{m\overline{AC} \cdot m\overline{BC}}{\cancel{2}} \cdot 2$$

Donc $m\overline{AB} \cdot m\overline{CH} = m\overline{AC} \cdot m\overline{BC}$

Exemples : Déterminer la mesure manquante dans chacun des triangles suivants.
Justifier les étapes de ta démarche.

a)



Identifie ce que tu cherches et ce que tu connais !

$$\frac{m\overline{CH}}{m\overline{AH}} = \frac{m\overline{HB}}{m\overline{CH}}$$

Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse

$$\frac{x}{6} = \frac{10}{x}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{60}$$

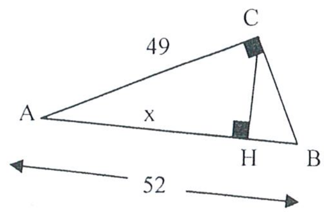
$$x = \pm\sqrt{60}$$

$x = -\sqrt{60}$ et $x = \sqrt{60}$

à rejeter $\quad x = 7,75$

Donc $m\overline{CH} = 7,75\ u$

b)



$$\frac{m\overline{AC}}{m\overline{AH}} = \frac{m\overline{AB}}{m\overline{AC}}$$

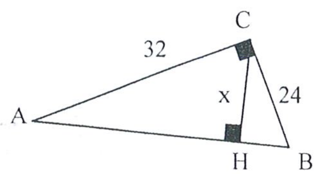
Car dans un triangle rectangle, chaque cathète est moyenne proportionnelle entre sa projection sur l'hypoténuse et l'hypoténuse entière.

$$\frac{49}{x} = \frac{52}{49}$$

$$x = \frac{49 \cdot 49}{52} = 46{,}17$$

Rép: $m\overline{AH} = 46{,}17\ u$

c)



1) Trouve $m\overline{AB}$:

$$m\overline{AB} = \sqrt{m\overline{AC}^2 + m\overline{BC}^2}$$

$$m\overline{AB} = \sqrt{32^2 + 24^2}$$

$$m\overline{AB} = 40$$

Car dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des cathètes.

2) Trouve $m\overline{CH}$:

$$m\overline{AB} \cdot m\overline{CH} = m\overline{AC} \cdot m\overline{BC}$$

$$40 \cdot x = 32 \cdot 24$$

$$x = \frac{32 \cdot 24}{40}$$

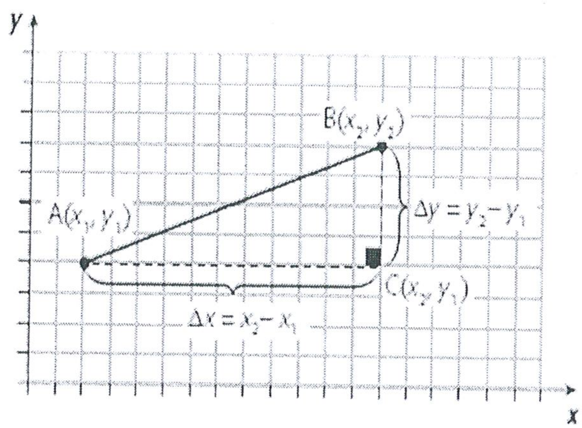
$$x = 19{,}2$$

Car dans un triangle rectangle, le produit des cathètes est égal au produit de l'hypoténuse et de sa hauteur relative.

Rép: $m\overline{CH} = 19{,}2\ u$

3. La distance entre deux points

La distance entre deux points $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$ dans un plan cartésien, notée d(A, B), est la longueur du segment **AB**. À partir de l'accroissement des abscisses (Δx) et de l'accroissement des ordonnées (Δy) entre ces deux points, on utilise la **relation de Pythagore** pour calculer d(A, B).



La distance entre deux points est nécessairement un nombre positif.

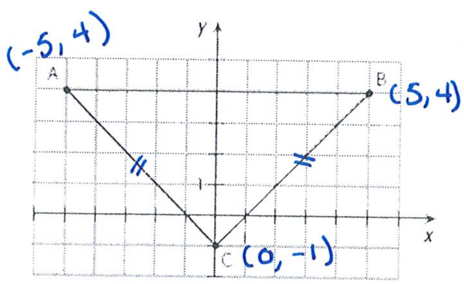
$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ou

$$m\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Exemples :

1. Déterminer le périmètre du triangle isocèle ci-dessous :



1) $m\overline{AC} = m\overline{BC}$ car un triangle isocèle possède deux côtés isométriques

2) $m\overline{AB} = 5 - -5 = 10$ unités

3) $d(A,C) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$d(A,C) = \sqrt{(-5-0)^2 + (4 - -1)^2}$

$= \sqrt{50}$

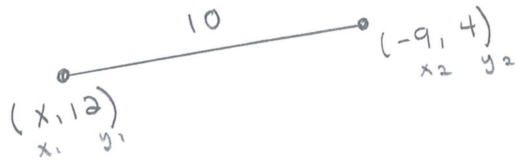
$= 7{,}07$

4) Périmètre :

$P = 10 + 2 \cdot 7{,}07$

$P = 24{,}14$ unités

2. Trouver les coordonnées possibles du point **A(x, 12)**, si la distance entre le point A et le point B est 10 unités et les coordonnées de B sont (-9, 4).



$(-9-x)(-9-x)$

$81+9x+9x+x^2$

$d(A,B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$10^2 = \left(\sqrt{(-9-x_1)^2+(4-12)^2}\right)^2$

$100 = \underbrace{(-9-x)^2}_{} + 64$ → binôme au carré !

$\overset{-100}{100} = 81+18x+x^2+64-100$

$0 = x^2+18x+45$ → factorise ou formule quadratique

$0 = (x+3)(x+15)$

$\Rightarrow \quad x+3=0 \quad$ ou $\quad x+15=0$

$x=-3 \quad$ ou $\quad x=-15$

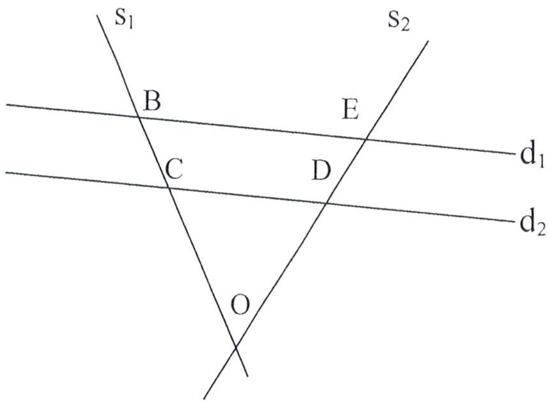
Rép : Les coordonnées possibles du point A sont $(-3, 12)$ et $(-15, 12)$

4. Énoncés en géométrie

Énoncé 1 : Des droites sécantes, coupées par des parallèles, sont partagées en segments de longueurs proportionnelles.

Théorème de Thalès

Démonstration :



Hypothèse : $d_1 \parallel d_2$

$s_1 \nparallel s_2$

Montrer que :

$$\boxed{\frac{m\overline{BC}}{m\overline{DE}} = \frac{m\overline{CO}}{m\overline{DO}} = \frac{m\overline{BO}}{m\overline{EO}}}$$

Montrer que $\Delta BOE \sim \Delta COD$

$\angle EBO \cong \angle DCO$ car, des angles correspondants formés par des parallèles et une sécante sont isométriques

$\angle BEO \cong \angle CDO$ car, des angles correspondants formés par des parallèles et une sécante sont isométriques

D'où $\Delta BOE \sim \Delta COD$ car, deux triangles ayant deux angles homologues isométriques sont semblables

Alors

$$\frac{m\overline{BO}}{m\overline{CO}} = \frac{m\overline{EO}}{m\overline{DO}}$$

car, dans les triangles semblables les côtés homologues sont proportionnels

De plus

$$\frac{m\overline{BO}}{m\overline{EO}} = \frac{m\overline{CO}}{m\overline{DO}}$$

car, dans une proportion on peut intervertir les moyens pour obtenir une nouvelle proportion.

Et

$$\frac{m\overline{BO}}{m\overline{EO}} = \frac{m\overline{CO}}{m\overline{DO}} = \frac{m\overline{BO} - m\overline{CO}}{m\overline{EO} - m\overline{DO}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{ED}}$$

procédure additive des proportions

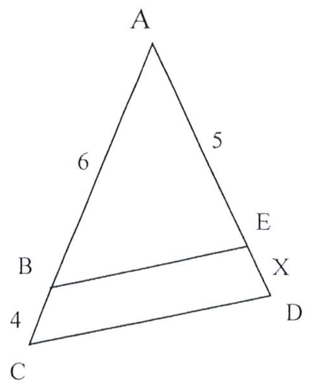
Donc

$$\frac{m\overline{BO}}{m\overline{EO}} = \frac{m\overline{CO}}{m\overline{DO}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{ED}}$$

par transitivité de la relation d'égalité.

Exemples :

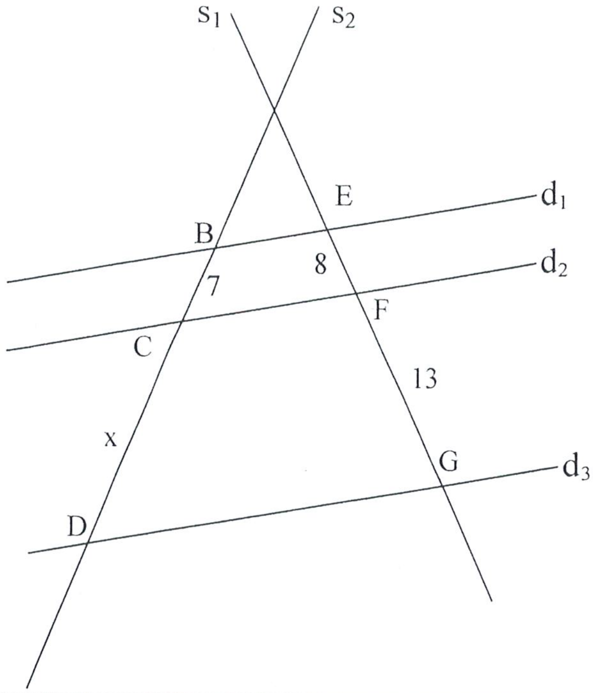
1. *Soit $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$, trouver $m\overline{DE}$ et justifier.*



Affirmations	Justifications
$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{AE}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{ED}}$	Car des sécantes coupées par des parallèles sont partagées en segment de longueurs proportionnelles
$\frac{6}{5} = \frac{4}{x}$	$x = \frac{4 \cdot 5}{6}$
	$x = 3,33$

Rép : $m\overline{ED} = 3,33$ u

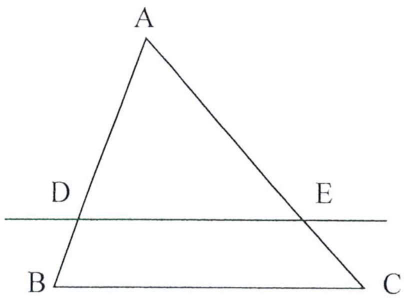
2. Soit $d_1 // d_2 // d_3$, trouver la valeur manquante.



Affirmations	Justifications
$\dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{EF}} = \dfrac{m\overline{CD}}{m\overline{FG}}$	Des sécantes coupées par des parallèles sont partagées en segments de longueurs proportionnelles
$\dfrac{7}{8} = \dfrac{x}{13}$	$x = \dfrac{7 \cdot 13}{11}$
	$x = 11,38$

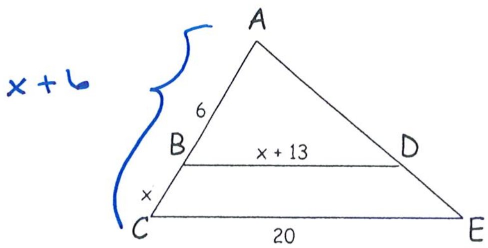
Rép. $m\overline{CD} = 11,38$ u.

Énoncé 2 : Toute droite sécante à deux côtés d'un triangle et parallèle au troisième côté forme des triangles semblables.



Si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, alors Δ ADE $\sim \Delta$ ABC

Exemple : Soit la figure ci-dessous où les segments BD et CE sont parallèles. Trouver la mesure du segment AC .



Affirmations	Justifications
$\Delta ABC \sim \Delta ADE$	Car toute droite sécante à deux côtés d'un triangle et parallèle au troisième forme des triangles semblables.
$\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AC}} = \dfrac{m\overline{BD}}{m\overline{CE}}$	Car dans les triangles semblables les côtés homologues sont proportionnels
$\dfrac{6}{x+6} = \dfrac{x+13}{20}$	$\Rightarrow$ $(x+6)(x+13) = 6 \cdot 20$ $x^2 + 13x + 6x + 78 = 120$

5. Propriétés des figures planes et des solides

A) Rappels

Isométries : Transformations qui conservent les distances entre deux figures.
Rotation, Réflexion, Translation

Similitudes : Transformation qui est le résultat d'une isométrie et d'une homothétie.

Par une similitude, l'une des figures est un **agrandissement**, une **réduction** ou une **reproduction exacte de l'autre.**

Figures et solides isométriques : Des figures ou des solides sont isométriques si :

- les côtés homologues sont isométriques
- les angles homologues sont isométriques

Figures et solides semblables : Des figures ou des solides sont semblables si :

- les côtés homologues sont proportionnels
- les angles homologues sont isométriques

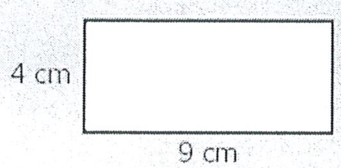
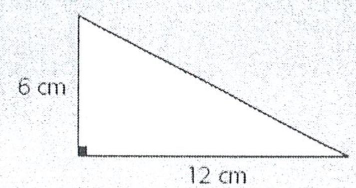
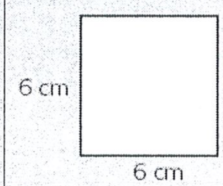
Rapport de similitude (K) : Rapport entre les mesures de segments homologues de figures ou solides semblables

- $K = \dfrac{\text{mesure grand}}{\text{mesure homologue petit}}$ ou $K = \dfrac{\text{mesure petit}}{\text{mesure homologue grand}}$

- Le rapport entre les mesures d'angles homologues est 1.
- Des figures ou des solides dont le rapport de similitude est 1, sont dits isométriques.

B) Figures équivalentes et solides équivalents

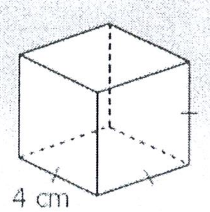
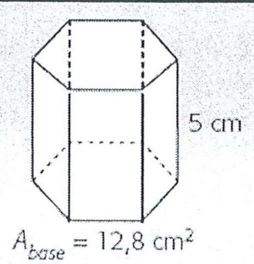
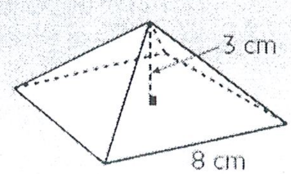
Deux dimensions : Deux figure sont équivalentes si elles ont la même aire.

Rectangle	Triangle rectangle	Carré
		
$A_{rectangle} = b \cdot h$ $A_{rectangle} = 9 \cdot 4$ $A_{rectangle} = 36\ cm^2$	$A_{triangle} = \frac{b \cdot h}{2}$ $A_{triangle} = \frac{12 \cdot 6}{2}$ $A_{triangle} = 36\ cm^2$	$A_{carré} = C^2$ $A_{carré} = 6^2$ $A_{carré} = 36\ cm^2$

Trois dimensions : Deux solides sont équivalents s'ils ont le même volume.

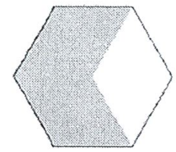
Pièges et astuces

Il ne faut pas comparer l'aire des faces de deux solides pour déterminer s'ils sont équivalents.

Cube	Prisme droit	Pyramide à base carré
		
$V_{cube} = C^3$ $V_{cube} = 4^3$ $V_{cube} = 64\ cm^3$	$V_{prisme} = A_{base} \cdot h$ $V_{prisme} = 12{,}8 \cdot 5$ $V_{prisme} = 64\ cm^3$	$V_{pyramide} = \frac{A_{base} \cdot h}{3}$ $V_{pyramide} = \frac{8^2 \cdot 3}{3}$ $V_{pyramide} = 64\ cm^3$

Exemples :

1. L'aire de la partie ombrée de l'hexagone régulier ci-contre est de 25 cm^2. Déterminer la mesure de la diagonale d'un carré équivalent à cet hexagone.



1) Partie ombrée $= \frac{2}{3}$ hexagone

$$\frac{2}{3} = \frac{25}{At}$$

$$At = \frac{25 \cdot 3}{2}$$

$$At = 37,5\ cm^2$$

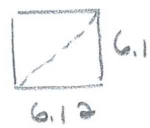
2) $A_{\square} = 37,5\ cm^2$ car les figures équivalentes ont la même aire

3) Dimension du carré :

$$A = c^2$$

$$\sqrt{37,5} = \sqrt{c^2}$$

$$6,12 = c$$

4) 

Car dans un triangle rectangle le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des cathètes

$$c^2 = a^2 + b^2$$

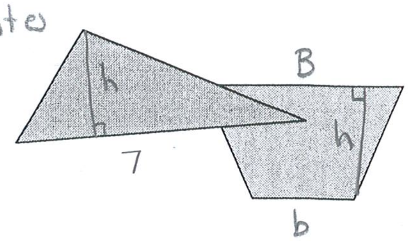
$$c^2 = \sqrt{37,5}^2 + \sqrt{37,5}^2$$

$$\sqrt{c^2} = \sqrt{75}$$

$$c = 8,66\ cm$$

Rép : La diagonale mesure 8,66 cm ou $\sqrt{75}$ cm.

2. Sachant que le triangle et le trapèze sont équivalents, déterminer des mesures entières possibles pour chacune des bases du trapèze, si la base du triangle mesure 7 cm et que la hauteur des deux polygones est la même.



$A_{\triangle} = A_{\text{trapèze}}$ car les figures équivalentes ont la même aire

$$\frac{b \cdot h}{2} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

$$\frac{7 \cdot h \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = \frac{(B+b) \cdot h \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}}$$

$$\frac{7 \cdot \cancel{h}}{\cancel{h}} = \frac{(B+b) \cdot \cancel{h}}{\cancel{h}}$$

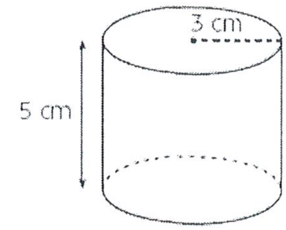
$$7 = B + b$$

Rép : B = 6 cm et b = 1 cm

ou B = 5 cm et b = 2 cm

ou B = 4 cm et b = 3 cm

3. Soit le cylindre ci-contre. Déterminer la mesure du rayon d'une boule qui lui est équivalentes.



1) Volume Cylindre :

$V = \pi r^2 h$

$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 5$

$V = 45\pi \text{ cm}^3$

2) $V_{boule} = V_{cylindre}$

car les solides équivalents ont le même volume

3) Rayon boule :

$V = \frac{4\pi r^3}{3}$

$\cdot 3 \quad 45\pi = \frac{4\pi r^3}{\cancel{3}} \cancel{\cdot 3}$

$\frac{135\pi}{4\pi} = \frac{4\pi r^3}{4\pi}$

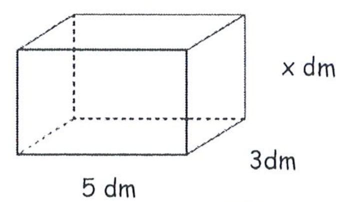
$\sqrt[3]{33,75} = \sqrt[3]{r^3}$

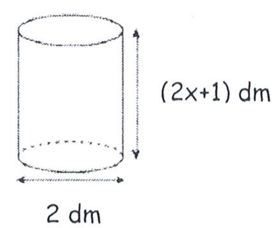
$3,23 = r$

Rép : La boule a un rayon de 3,23 cm.

4. Dans le cadre de son cours de sciences, Thomas doit transvider le contenu d'un bocal cylindrique, qui est rempli à moitié, dans un autre bocal en forme de prisme. Les deux bocaux sont équivalents. Déterminer la quantité de liquide, en millilitres, contenue dans le bocal cylindrique.

1) $V_{prisme} = V_{cylindre}$ Car les solides équivalents ont le même volume





r = 1dm

2) Trouve x :

$Ab \cdot h = \pi r^2 h$

$3 \cdot 5 \cdot x = \pi \cdot 1^2 \cdot (2x+1)$

$-2\pi x \qquad -2\pi x$

$15x = 2\pi x + \pi$

$\frac{x(15-2\pi)}{15-2\pi} = \frac{\pi}{15-2\pi}$

$x = 0,36 \text{ dm}$

3) hauteur du cylindre :

$h = 2 \cdot 0,36 \cdot 1$

$h = 1,72$

4) Volume du ½ cyl :

$V = \frac{\pi r^2 h}{2}$

$V = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 1,72}{2}$

$V = 2,70177 \text{ dm}^3$

5) Convertir

$2,70177 \text{ dm}^3 = 2,70177 \text{ L}$

donc 2 701,77 ml

Rép : Il y a 2701,77 ml dans le bocal