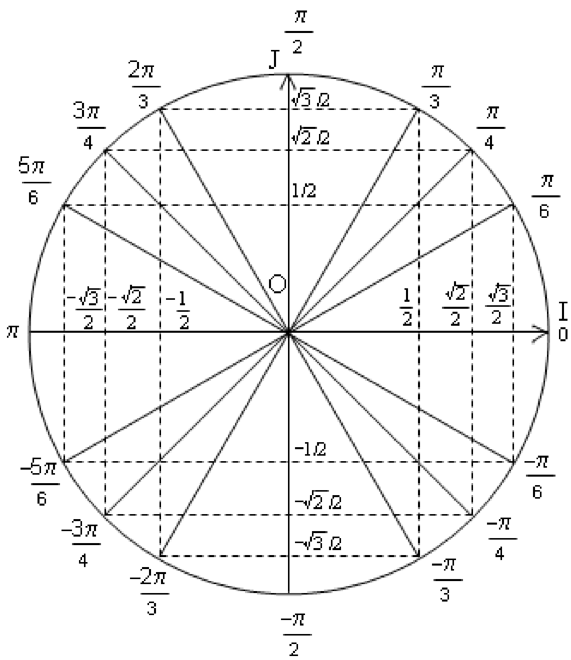
Les Sciences Naturelles V   Document principal

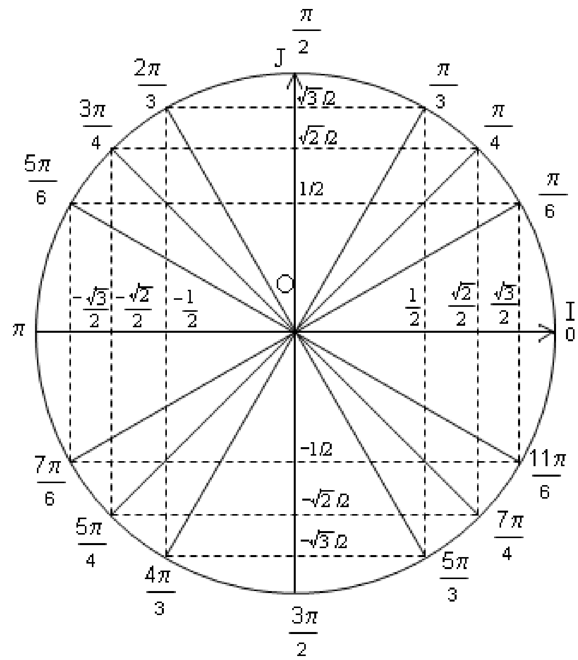
Les fonctions trigonométriques

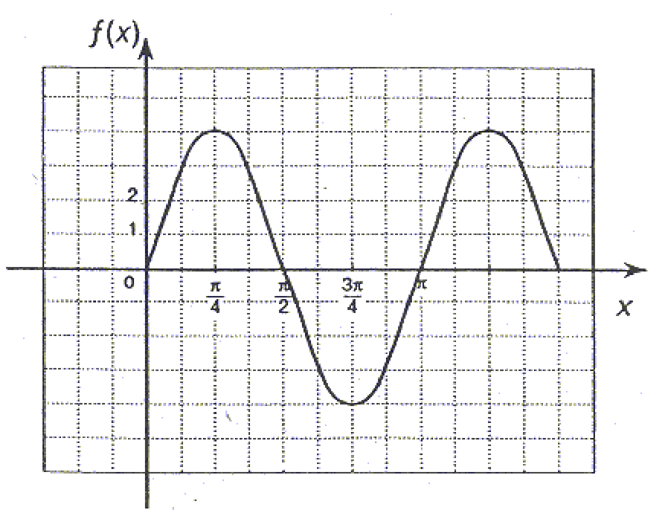
Nom ___________________________

$[-\pi;\ \pi]$



$[0;2\pi]$

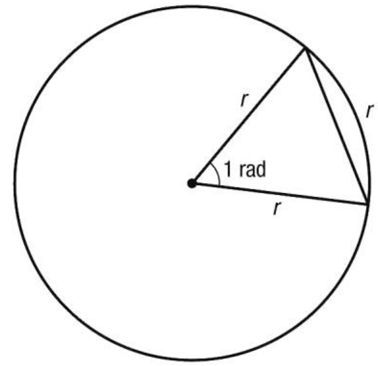




RADIAN

Tout comme le degré, le **radian**, noté rad, est une unité de mesure d'angle. Dans un cercle, un radian est la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc dont la longueur correspond au rayon du cercle.

Lorsque l'unité de mesure d'un angle n'est pas mentionnée, on considère qu'elle est donnée en radians. Un angle plein mesure 2π rad, soit $\approx 6{,}28$ rad.



Il est possible de passer d'une mesure d'angle, en radians, à une mesure d'angle, en degrés, et vice versa, à l'aide de l'équivalence suivante.

Ex. : 1) La mesure, en degrés, d'un angle de 5 rad est :

$$\frac{n^\circ}{360^\circ} = \frac{5\text{ rad}}{2\pi\text{ rad}} \Rightarrow n = \frac{5 \times 360}{2\pi} = \frac{1800}{2\pi} = \left(\frac{900}{\pi}\right)^\circ\text{, soit} \approx 286{,}48^\circ.$$

2) La mesure, en radians, d'un angle de 40° est :

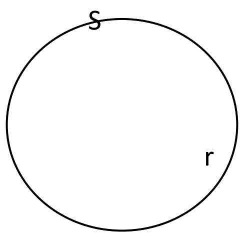
$$\frac{40^\circ}{360^\circ} = \frac{\theta\text{ rad}}{2\pi\text{ rad}} \Rightarrow \theta = \frac{40 \times 2\pi}{360} = \frac{80\pi}{360} = \frac{2\pi}{9}\text{ rad, soit} \approx 0{,}7\text{ rad.}$$

#1 Trouvez l'équivalence, en degrés ou en radians, selon le cas, de chacun des angles suivants.

a) 120° b) 2π rad c) 45°

d) $\frac{3\pi}{2}$ rad e) 30° f) $\frac{7\pi}{6}$ rad

Longueur d’un arc en unités de longueur



S : ____

r : ____

n : _____________________________________

On a vu en géométrie la formule suivante pour trouver la longueur d’un arc :

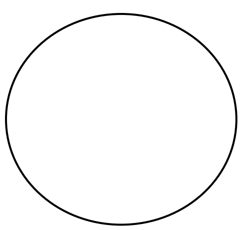
________=_______

Remplaçons α par ___ radians et 360º par _____

Et voici la relation qui permettra de trouver la longueur d’un arc si l’angle au centre est en radians :

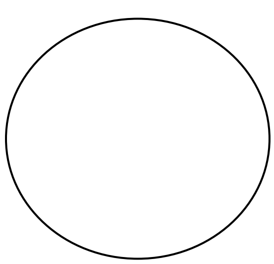
Exemple :

Un angle au centre de 120 º intercepte un arc dans un cercle de 24 cm de rayon. Quelle est la longueur de l’arc ?

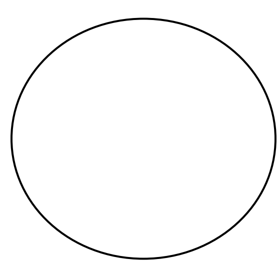


En résumé, un radian est la mesure d’un _________________au centre qui intercepte un arc qui vaut la même mesure que le _____________________

1. Dans un cercle trigonométrique



2.Hors du cercle trigonométrique



#2 Déterminez la longueur de l'arc intercepté par chacun des angles au centre suivants, en tenant compte de la mesure du rayon indiquée.

a) $\theta = \frac{11\pi}{6}$ rad
$r = 3$ cm

b) $\theta = \pi$ rad
$r = 21$ dm

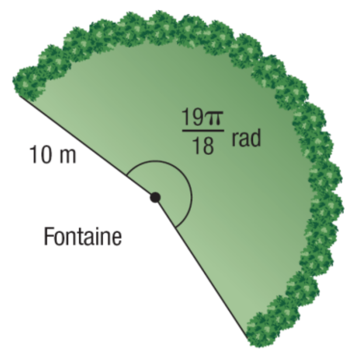
c) $\theta = \frac{3\pi}{4}$ rad
$r = 5{,}2$ mm

#3

L'aménagement paysager illustré ci-contre est tel que chaque cèdre qui compose la haie est situé à égale distance de la fontaine.

a) Quelle est la longueur de cette haie ?

b) Combien coûte l'aménagement de cette haie si un cèdre coûte 4,50 $ et qu'on plante un cèdre tous les 30 cm ?



CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

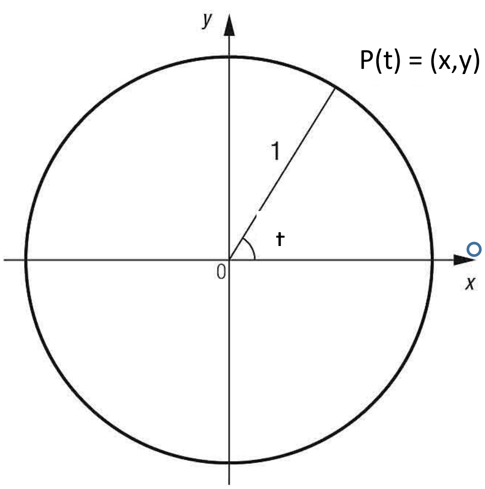
Le **cercle trigonométrique** est un cercle centré à l'origine du plan cartésien dont le rayon est de 1 unité. Son équation est :

Dans le cercle trigonométrique :

- lorsqu'on applique une rotation autour de l'origine de la partie positive de l'axe des abscisses, l'angle de rotation(t) correspond à un angle trigonométrique. L'angle de rotation (t) est exprimé en ______________. T est le mesure de l'angle au centre.

- un angle trigonométrique peut être _______________________(sens de rotation antihoraire) ou _______________________ (sens de rotation horaire) ;

- Le point P(t) =(x, y) est un point trigonométrique, car il est sur le cercle. On peut vérifier qu'un point quelconque est un point trigonométrique en vérifiant l'équation du cercle.



Un tour complet vaut 360° ou ____________________

Un demi-tour vaut 180° ou ______________________

Un quart de tour vaut 90° ou ________________________

#1 Vérifier si les points suivants sont des points trigonométriques ?

a) $\left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$ b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

#2 Sachant que le point suivant $\left(\frac{1}{3}, y\right)$ est un point trigonométrique trouve la valeur de y.

#3 Sachant que P(t) = (u, v) est un point trigonométrique. Détermine les coordonnées des angles suivants :

a) P(t + 2π)
b) P(t + 4π)
c) P(t + π)
d) P($\pi - t$)

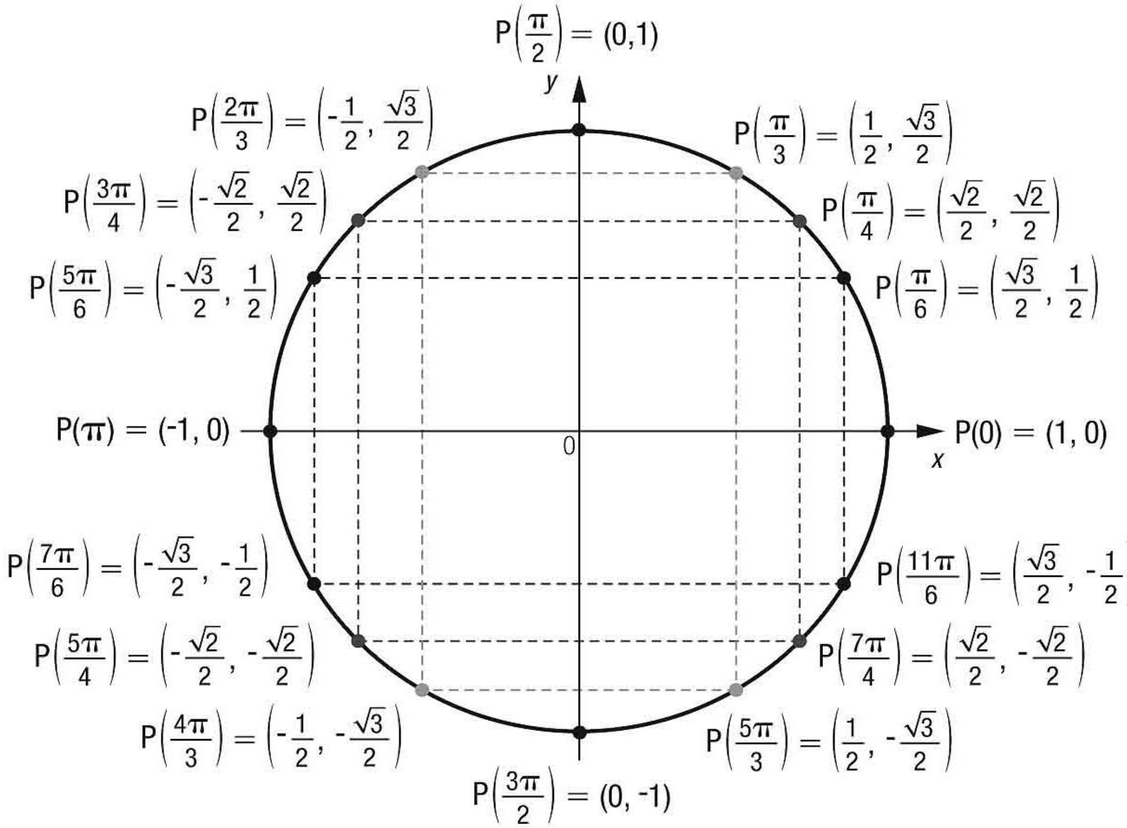
Coordonnées des points trigonométriques :

Avant de déterminer les points dits remarquables du cercle trigonométrique, regardons ces deux rappels :

Dans tout triangle rectangle, le côté opposé à l'angle de 30° vaut la moitié de l'hypoténuse.

Tout triangle rectangle ayant un angle de 45° est un triangle isocèle.

Il est possible de représenter dans un même cercle trigonométrique les principaux points trigonométriques ainsi que leurs coordonnées.



1. Indiquez le quadrant où se trouve chacun des points trigonométriques suivants :

a) $P\left(\frac{\pi}{6}\right)$

c) $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b) $P\left(\frac{\pi}{2}\right)$

d) $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2. Déterminez les coordonnées exactes des points trigonométriques suivants :

a) $P\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ b) $P\left(\frac{\pi}{4}\right)$ c) $P\left(\frac{\pi}{2}\right)$

d) $P\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$ e) $P\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ f) $P\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

g) $P\left(\frac{13\pi}{6}\right)$ h) $P\left(\frac{11\pi}{4}\right)$ i) $P\left(\frac{-9\pi}{4}\right)$

3. Déterminez la mesure de l'angle au centre qui passe par les points suivants :

a) $P(t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et 0 < t < 2π b) $P(t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et 0 < t < 4π

c) $P(t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et -$2\pi < t < 0$ d) $P(t) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et -$2\pi < t < 0$

4. Un plan cartésien est superposé à l'écran radar d'une contrôleuse aérienne où l'origine du plan correspond à la tour de contrôle. La contrôleuse aperçoit à l'écran deux avions situés sur des points respectivement associés aux points trigonométriques $P_1\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ et $P_2\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Quelle distance sépare les deux avions ?

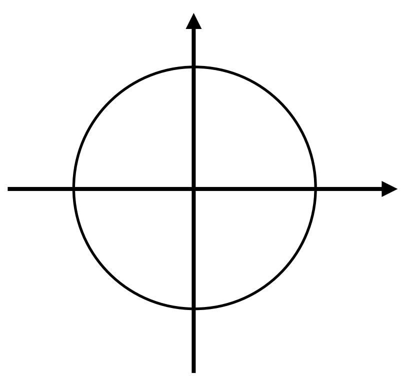
Les fonctions sinus, cosinus et tangente :

Fonction sinus :

Rappel : sin t =

Dans un cercle trigonométrique, comme l'hypoténuse vaut toujours 1, le sinus de l'angle vaut la mesure du ____ **donc la coordonnée en y du point trigonométrique !!**

P(t) = P(x, y) ⇒ y = ____________________ et ________________________



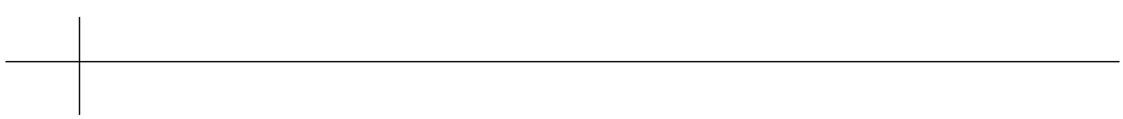
#1 Déterminez la valeur exacte des sinus suivants :

a) $sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)=$

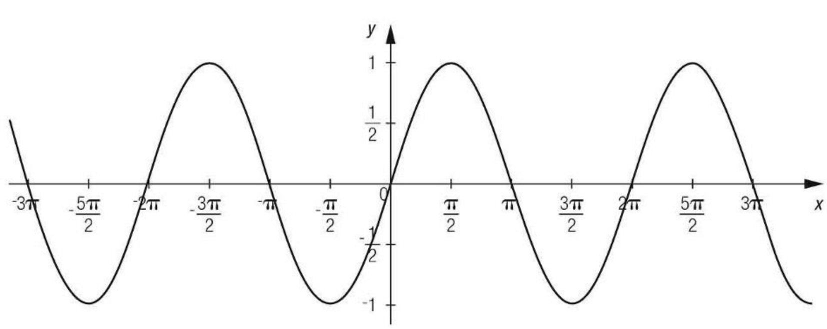
b) $sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=$

c) $sin\left(\frac{26\pi}{3}\right)=$

Pour tracer le graphique de la fonction sinus, il suffit de prendre des valeurs du cercle trigonométrique :



Voici le graphique de la fonction sinus



Propriétés de la fonction sinus :

Domaine : ________________ Image :___________________

Les zéros de la fonction dans l'intervalle $[0,2\pi]$:_____________________________

Le signe dans l'intervalle $[0,2\pi]$:

Les extrémums :

La variation dans l'intervalle $[0,2\pi]$:

La période :_______________(la longueur du cycle)

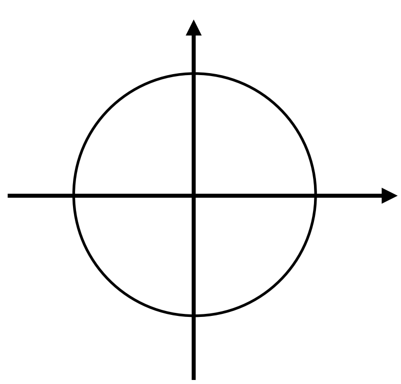
L'amplitude :______________ (« la hauteur de la bosse » donnée par valeur max – valeur min)

Fonction cosinus :

Rappel : cos t =

Dans un cercle trigonométrique, comme l'hypoténuse vaut toujours 1, le cosinus de l'angle vaut la mesure du ____ **donc la coordonnée en x du point trigonométrique !!**

P(t) = P(x, y) ⇨ x = ___________________ et ______________________



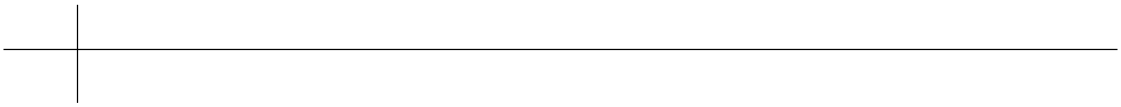
#1 Déterminez la valeur exacte des sinus suivants :

$a)\ cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$=

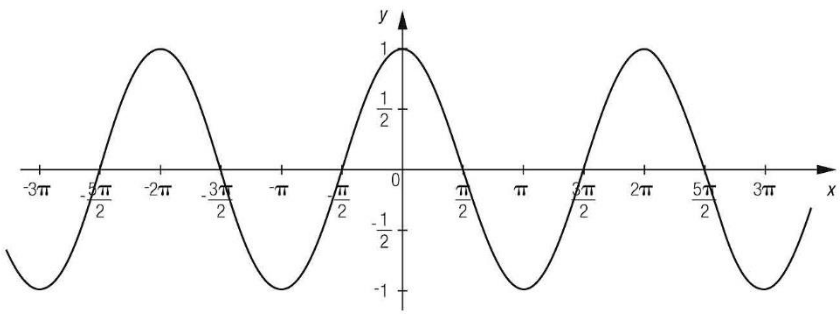
$b)\ cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$=

$c) cos\left(\frac{12\pi}{4}\right)$=

Pour tracer le graphique de la fonction cosinus, il suffit de prendre des valeurs du cercle trigonométrique :



Voici le graphique de la fonction cosinus



Propriétés de la fonction cosinus :

Domaine : ________________ Image :__________________

Les zéros de la fonction dans l’intervalle $[0,2\pi]$:____________________________

Le signe dans l’intervalle $[0,2\pi]$:

Les extrémums :

La variation dans l’intervalle $[0,2\pi]$:

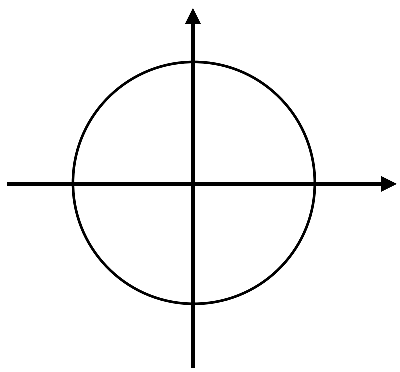
La période :_______________(la longueur du cycle)

L’amplitude :______________ (« la hauteur de la bosse » donnée par valeur max – valeur min)

Fonction tangente

Rappel : tan t =

Soit un point trigonométrique de coordonnées ______________________, alors tan t =



La valeur de la tangente correspond à la mesure du segment limité par l'axe des x et le prolongement du rayon !

#1 Déterminez la valeur exacte des tangentes suivantes :

a) $\tan(0) =$

b) $tan\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

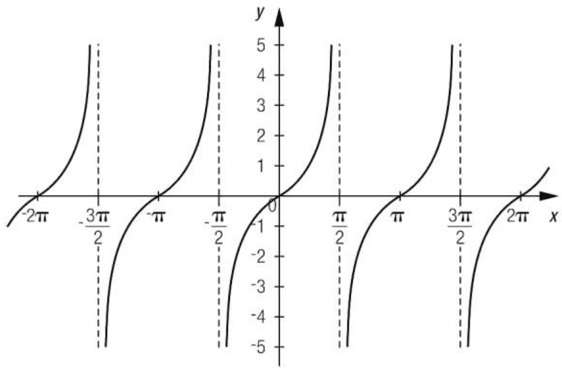
c) $tan\left(\frac{\pi}{4}\right) =$

d) $tan\left(\frac{\pi}{3}\right) =$

e) $tan\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

Nous avons donc

Voici le graphique de la fonction tangente



Propriétés de la fonction tangente :

Domaine : ________________ Image :___________________

Les zéros de la fonction dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$:__________________________

Le signe dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$:

Les extrémums :

La variation dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$:

La période :_______________(la longueur du cycle)

L'amplitude :______________ (« la hauteur de la bosse » donnée par valeur max – valeur min)

Les asymptotes dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$:

Opérations sur les fonctions :

On peut faire des opérations sur les fonctions trigonométriques. Soit le point $P\left(\frac{\pi}{6}\right)$, calcule :

a) $cos\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

b) $sin\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

c) $sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - cos\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

d) $sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2\,cos\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

Les réciproques :

La réciproque de la fonction sinus noté :____________________________

Permet de déterminer la valeur de l'angle si l'on connaît la valeur des ordonnées des points.

Ex : arcsin 1 = $\frac{\pi}{2}$ car $P\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$

La réciproque de la fonction cosinus noté :____________________

Permet de déterminer la valeur de l'angle si l'on connaît la valeur des abscisses des points.

Ex : arccos $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4}$ car $P\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $P\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

La réciproque de la fonction tangente noté : ______________________

Permet de déterminer la valeur de l'angle si l'on connaît la valeur du rapport des ordonnées et des abscisses des points.

Ex. arctan $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}\ ou\ \frac{7\pi}{6}$ car $P\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $P\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2}\right)$

Attention, la réciproque des fonctions sinus, cosinus et tangentes ne sont pas toujours des fonctions. Pour qu'elles le soient, nous devons limiter le domaine et le codomaine.

Fonction sinus : restrictions : $\boldsymbol{x} \in [\mathbf{-1}, \mathbf{1}]$ **et** $\boldsymbol{y} \in \left[-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right]$

Fonction cosinus : restrictions : $\boldsymbol{x} \in [\mathbf{-1}, \mathbf{1}]$ **et** $\boldsymbol{y} \in [\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$

Fonction tangente : restrictions : $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$ **et** $\boldsymbol{y} \in \left]-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right[$

#1 Déterminez la valeur exacte de :

a) $\tan(arc\ sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$=

b) $\sin(\arctan(-1) + arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$)=

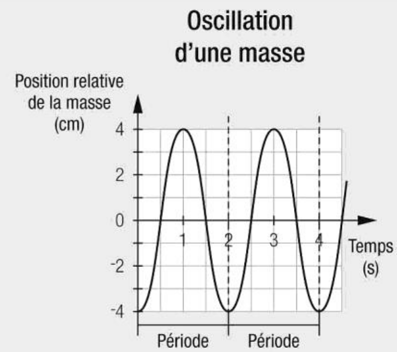
#2 Résous l'équation $\cos(\arctan x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

FONCTION PÉRIODIQUE

- Une fonction est dite périodique lorsque sa représentation graphique est constituée d'un « motif » qui se répète.
- L'écart entre les abscisses situées aux extrémités de ce « motif » correspond à la période de la fonction.
- Les fonctions sinus, cosinus et tangente sont des fonctions périodiques.

Ex. : Le comportement d'une masse suspendue à un ressort qui oscille verticalement sans friction peut être modélisé par une fonction périodique.

D'après ce graphique, on déduit que la masse revient à sa position initiale toutes les 2 s. La période de la fonction est donc de 2 s.

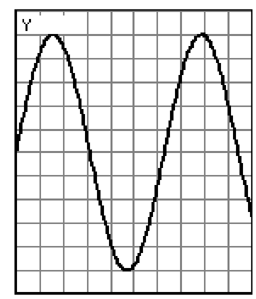


FONCTION SINUSOÏDALE

Une **fonction sinusoïdale** est une fonction périodique dont la règle peut s'écrire sous la forme $f(x) = \mathrm{a}\sin \mathrm{b}(x - \mathrm{h}) + \mathrm{k}$ ou $f(x) = \mathrm{a}\cos \mathrm{b}(x - \mathrm{h}) + \mathrm{k}$, où $\mathrm{a} \neq 0$ et $\mathrm{b} \neq 0$. Pour une fonction sinusoïdale :

- l'amplitude A est déterminée par $\frac{\max f - \min f}{2}$ et correspond à la valeur absolue du paramètre a ;
- la période p est déterminée par $\frac{2\pi}{|\mathrm{b}|}$;
- un cycle correspond graphiquement à la plus petite portion de la courbe associée au motif qui est répété.

Lorsque la courbe d'une fonction est continue, le point qui fait la transition entre une partie de la courbe qui monte (descend) de plus en plus rapidement et une autre partie de la courbe qui monte (descend) de moins en moins rapidement, ou vice versa, correspond à un **point d'inflexion.**



En vous basant sur les règles des fonctions trigonométriques suivantes, déterminez, dans chaque cas :

1) l'amplitude de la fonction ;
2) la période de la fonction ;
3) le minimum et le maximum de la fonction.

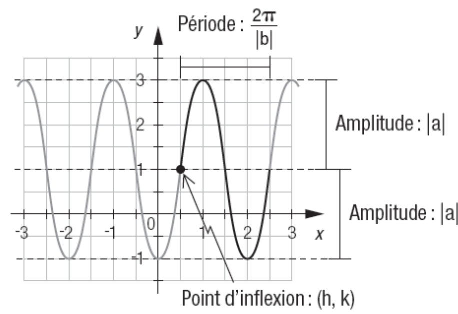
a) $f(x) = 3 \sin 2(x - \pi) + 4$

b) $g(x) = {}^{-}2 \cos \frac{\pi}{3}(x + 5) + 1$

Dans la représentation graphique d'une fonctions sinus dont la règle s'écrit

$f(x) = \mathrm{a} \sin b\,(x - h) + k$, *(h , k)* **sont les coordonnées d'un point d'inflexion de la courbe**

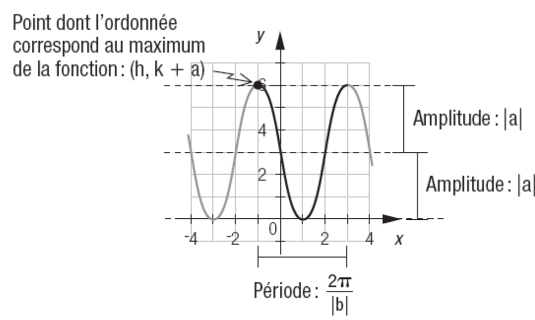
Ex. :

<table>
<tr><th>Règle</th><th>Table de valeurs</th><th>Représentation graphique</th></tr>
<tr>
<td>$f(x) = 2\sin \pi\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1$</td>
<td>
<table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>-3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>0</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td></tr>
</table>
</td>
<td>


La portion de courbe tracée en rouge correspond à un cycle de la fonction.
</td>
</tr>
</table>

Dans la représentation graphique d'une fonction cosinus dont la règle s'écrit $f(x) = \mathrm{a}\cos \mathrm{b}(x - \mathrm{h}) + \mathrm{k}$, $(\mathrm{h}, \mathrm{k} \pm \mathrm{a})$ sont les coordonnées d'un point associé à un extremum de la fonction.

Ex. :

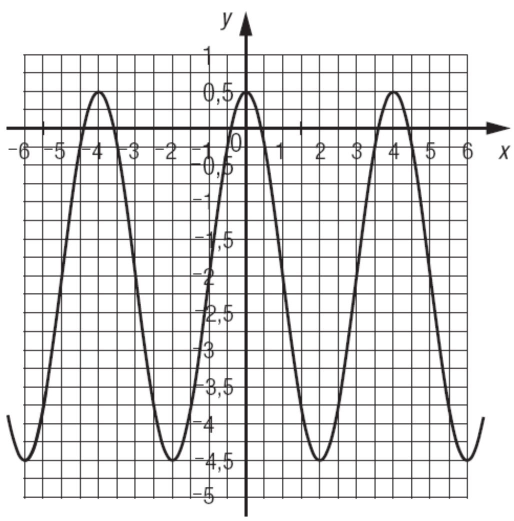
<table>
<tr><th>Règle</th><th>Table de valeurs</th><th>Représentation graphique</th></tr>
<tr>
<td>$f(x) = 3\cos\frac{\pi}{2}(x + 1) + 3$</td>
<td>
<table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>-3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>0</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td></tr>
</table>
</td>
<td>


La portion de courbe tracée en rouge correspond à un cycle de la fonction.
</td>
</tr>
</table>

Répondez aux questions suivantes en fonction de chacun des graphiques ci-dessous.

1) Quelle est la période (p) de cette fonction ?
2) À l'aide de l'égalité $p = \frac{2\pi}{|b|}$, déterminez la valeur du paramètre b.
3) Quelle est l'amplitude (A) de cette fonction ?
4) À l'aide de l'égalité $A = |a|$, déterminez la valeur du paramètre a.
5) Quelles sont les coordonnées d'un point (h, k) ?
6) Quelle est la règle de cette fonction ?

a)



1) ______________________

2) ______________________

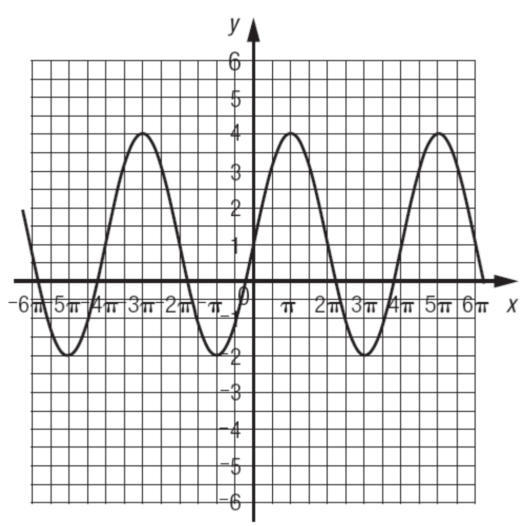
3) ______________________

4) ______________________

5) ______________________

6) ______________________

b)



1) ______________________

2) ______________________

3) ______________________

4) ______________________

5) ______________________

6) ______________________

En vous basant sur les fonctions trigonométriques suivantes, déterminez, dans chaque cas :

1) l'amplitude de la fonction ;
2) la période de la fonction ;
3) le minimum et le maximum de la fonction.

a) $f(x) = -6 \sin (3x - 21) + 9$

1) ______________________

2) ______________________

3) ______________________

____

b) $g(x) = {}^{-}\cos 4\pi(x - 1) + 5$

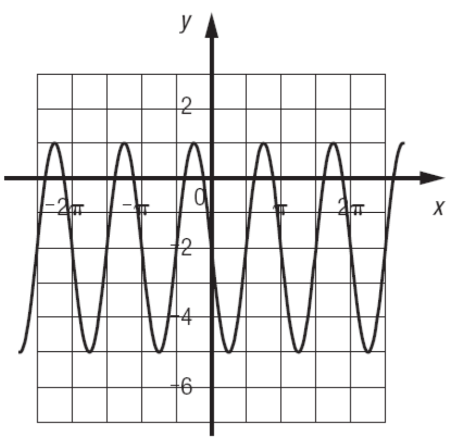
1) ______________________

2) ______________________

3) ______________________

____

e)



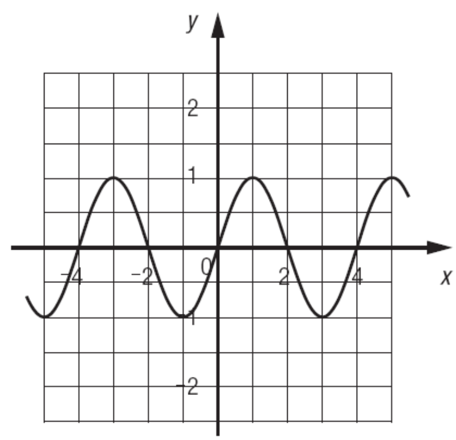
1) ______________________

2) ______________________

3) ______________________

____

f)



1) ______________________

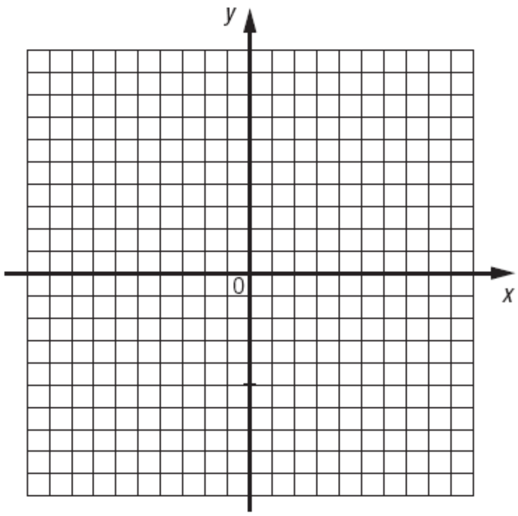
2) ______________________

3) ______________________

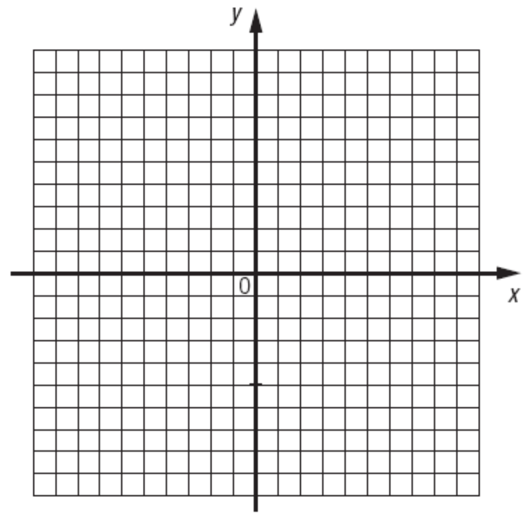
____

Tracez le graphique de chacune des fonctions trigonométriques suivantes.

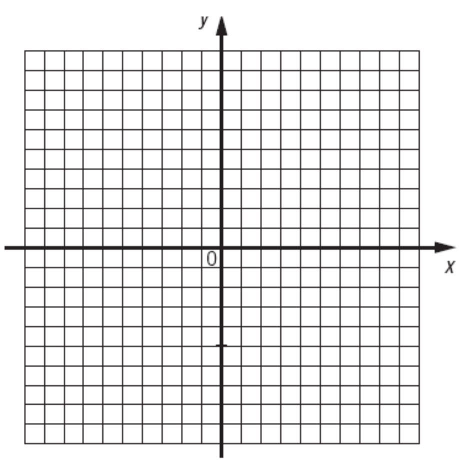
a) $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}(x - 4) - 1$



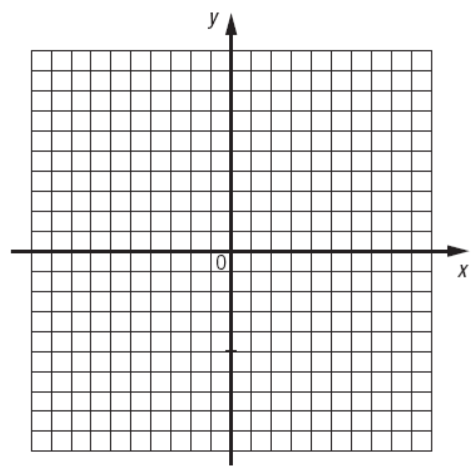
b) $g(x) = -2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$



d) $i(x) = 5\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 2$

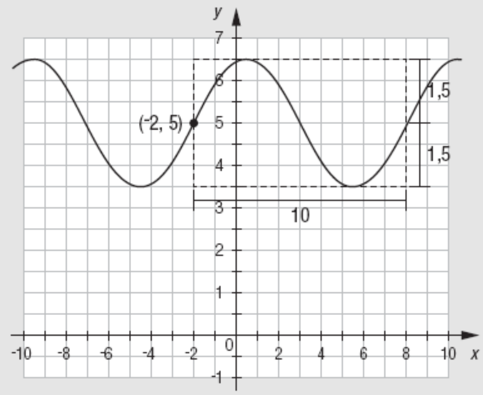


e) $j(x) = 1{,}5 \sin \pi(x - 0{,}25) + 3$



RECHERCHE DE LA RÈGLE D'UNE FONCTION SINUSOÏDALE

Il est possible de déterminer la règle d'une fonction sinusoïdale, dont la règle s'écrit $f(x) = \mathrm{a}\sin \mathrm{b}(x - \mathrm{h}) + \mathrm{k}$ ou $f(x) = \mathrm{a}\cos \mathrm{b}(x - \mathrm{h}) + \mathrm{k}$, de la façon suivante.

<table>
<tr><td>1. Identifier un cycle de la fonction dont le point de départ est associé aux paramètres h et k, et délimiter ce cycle à l'aide d'un rectangle dont la base correspond à la période p et la hauteur, au double de l'amplitude A.</td><td colspan="2">Ex. :


En considérant que la règle recherchée est celle d'une fonction sinus, les coordonnées du point de départ du cycle identifié sont (-2, 5), la période est 10 et l'amplitude est 1,5.</td></tr>
<tr><td>2. Déduire la valeur des paramètres a et b selon le cycle identifié.</td><td>$A = 1,5$
$|\mathrm{a}| = 1,5$
$\mathrm{a} = \pm 1,5$
D'après le cycle identifié, on déduit que a = 1,5.</td><td>$p = \frac{2\pi}{|\mathrm{b}|}$
$10 = \frac{2\pi}{|\mathrm{b}|}$
$\mathrm{b} = \pm\frac{\pi}{5}$
D'après le cycle identifié, on déduit que $\mathrm{b} = \frac{\pi}{5}$.</td></tr>
<tr><td>3. Déterminer la valeur des paramètres h et k.</td><td colspan="2">Puisque les coordonnées du point de départ du cycle identifié sont (-2, 5) la valeur de h est -2 et celle de k est 5.</td></tr>
<tr><td>4. Écrire la règle de la fonction obtenue.</td><td colspan="2">$f(x) = 1,5\sin\frac{\pi}{5}(x + 2) + 5$
On note que la règle de cette fonction pourrait aussi s'écrire $f(x) = 1,5\cos\frac{\pi}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right) + 5$.</td></tr>
</table>

<u>En résumé :</u>

1. Trouve l'amplitude et la période

2**. k** est sur la ligne au milieu des bosses

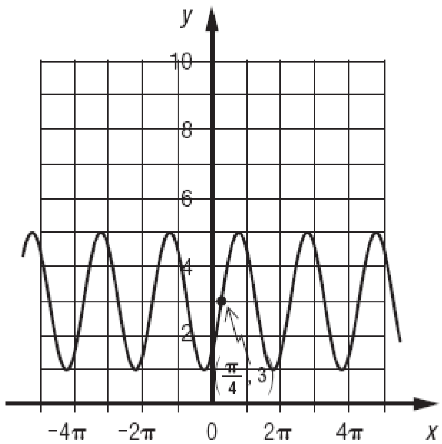
3. **h** est sur la courbe pour une **fonction sinus**. S'il précède une montée alors a +

h est vis-à-vis un max ou un min pour la **fonction cosinus** . S'il est vis-à-vis un max alors a +

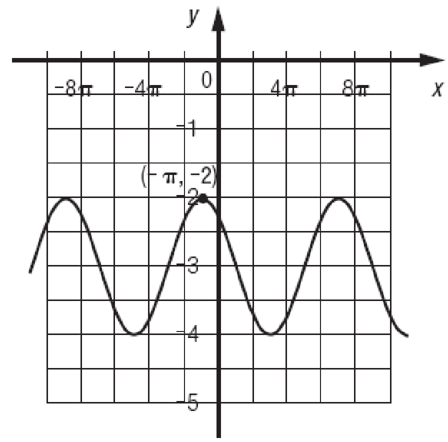
Il y a plusieurs réponses possibles, car la fonction dépend du (h, k) choisit !!

Établissez la règle de chacune des fonctions trigonométriques suivantes.

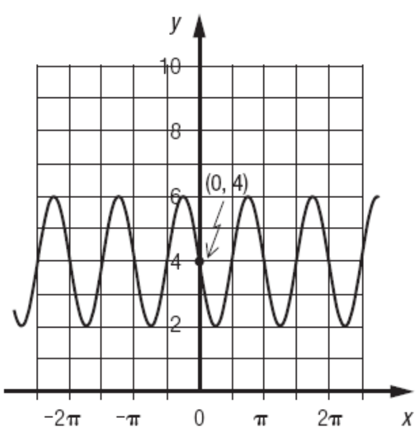
a)



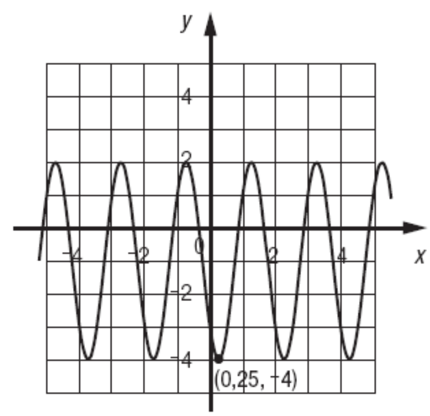
b)



d)



e)



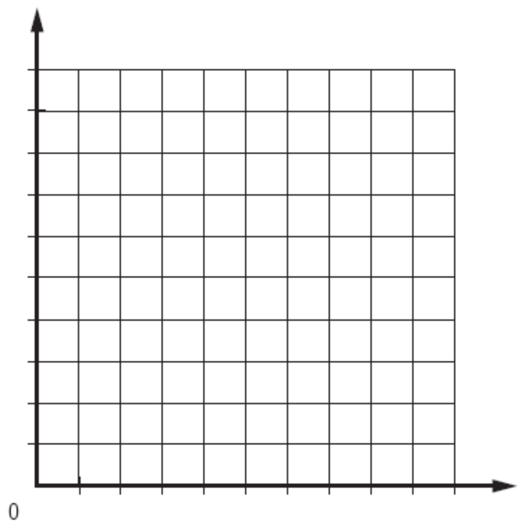
Problèmes écrits :

#1

Les pêcheurs d'un fjord du Canada ont remarqué que le niveau de la mer varie de façon cyclique au cours d'une journée. Voici les renseignements qu'ils ont relevés.

- Le niveau maximal est de 3,6 m.
- Le niveau minimal est de 2,4 m.
- Le temps entre deux maximums consécutifs est de 12 h.
- Le premier minimum est mesuré à 3 h 30.

a) Tracez le graphique qui représente cette situation.



b) Quelle est la règle de la fonction sinusoïdale qui représente cette situation ?

____

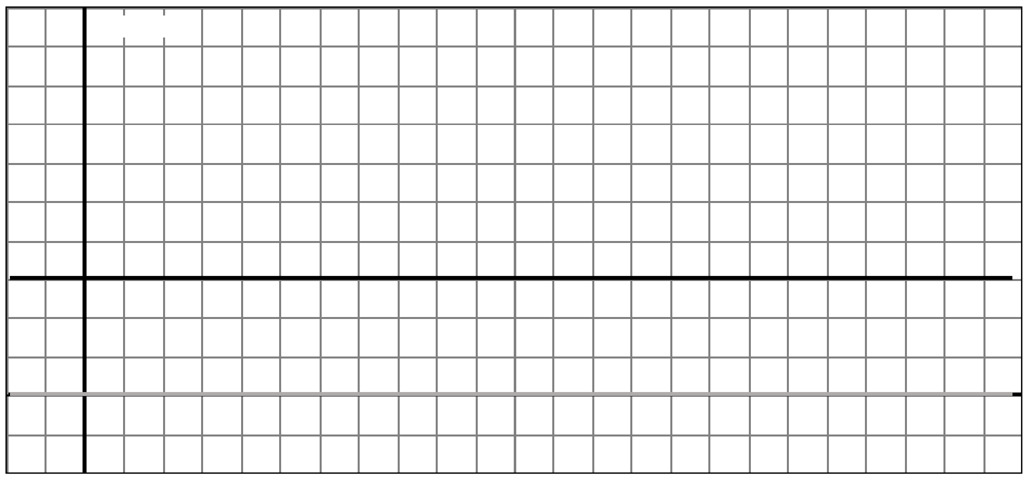
c) Quel est le niveau de la mer à 13 h 30 ?

____

#2

En étudiant les mouvements d'une bouée sur le fleuve St-Laurent, un observateur a déduit de ses expériences que la hauteur de la bouée en cm était donnée par $h(t) = -75\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$ où t représente le temps en secondes.

a) fais le graphique pour les 10 premières secondes



b) Quelle est la hauteur de la bouée à la 5^{e} seconde ?

c) À quel moment la fonction est-elle croissante (toujours pour les 10 premières secondes) ?

d) Dans combien de temps la bouée atteindra-t-elle sa hauteur maximale pour une troisième fois ?

#3

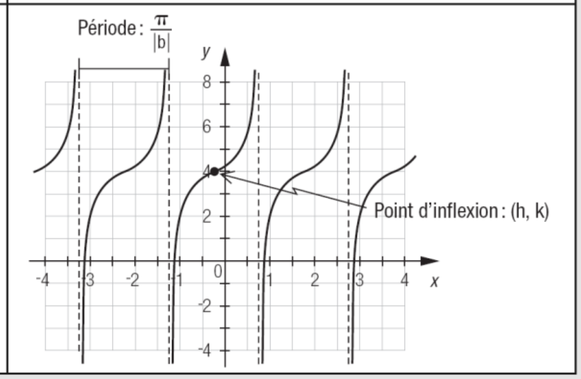
Les cabines d’une grande roue sont attachées à 10 m de son centre. Gabriel monte à bord d’une cabine alors que celle-ci est au bas de la grande roue. La distance entre le point d’attache de la cabine de Gabriel et le sol est alors de 2 m. Ensuite, la grande tourne sur elle-même à une vitesse constante. Elle fait un tour complet en 3 minutes. La distance entre le point d’attache de la cabine de Gabriel et le sol selon le temps écoulé depuis l’embarquement est représentée par une fonction sinusoïdale.

Quelle est la distance entre le point d’attache de la cabine de Gabriel et le sol, 7 minutes après l’embarquement ?

FONCTION TANGENTE

La **fonction tangente** est une fonction périodique dont la règle peut s'écrire sous la forme $f(x) = \text{a} \tan \text{b}(x - \text{h}) + \text{k}$, où $\text{a} \neq 0$ et $\text{b} \neq 0$. Dans la représentation graphique d'une fonction tangente :

- toutes les asymptotes verticales sont situées à égale distance les unes des autres ;
- la distance entre deux asymptotes verticales consécutives correspond à la période p de la fonction et est déterminée par $\frac{\pi}{|\text{b}|}$;
- (h, k) sont les coordonnées d'un point d'inflexion de la courbe.

Règle	Table de valeurs	Représentation graphique
$f(x) = 0{,}7 \tan \frac{\pi}{2}(x + 0{,}25) + 4$	see table below	

x	y
-1	0,5
0	-1
1	0,5
2	2
3	0,5

En résumé :

1. Trouve la période

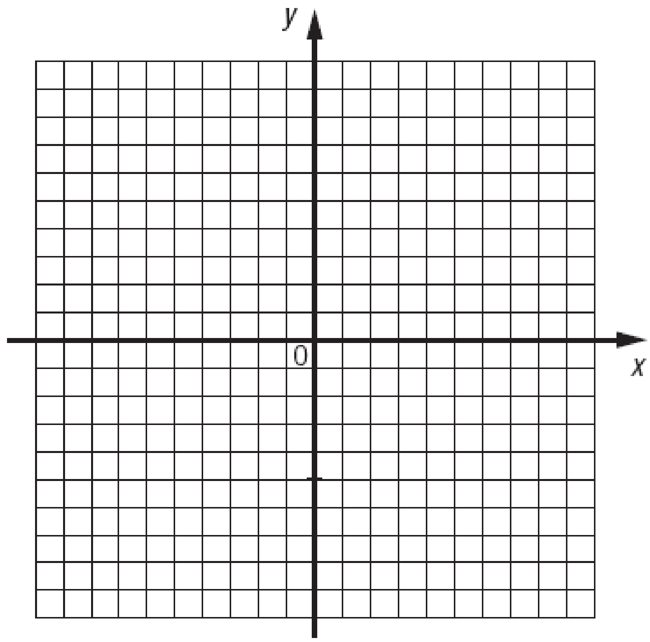
2. **(h, k) est toujours un point d'inflexion.** Si a et b sont de mêmes signes, il précède une montée!

3. **h** est toujours au milieu des asymptotes

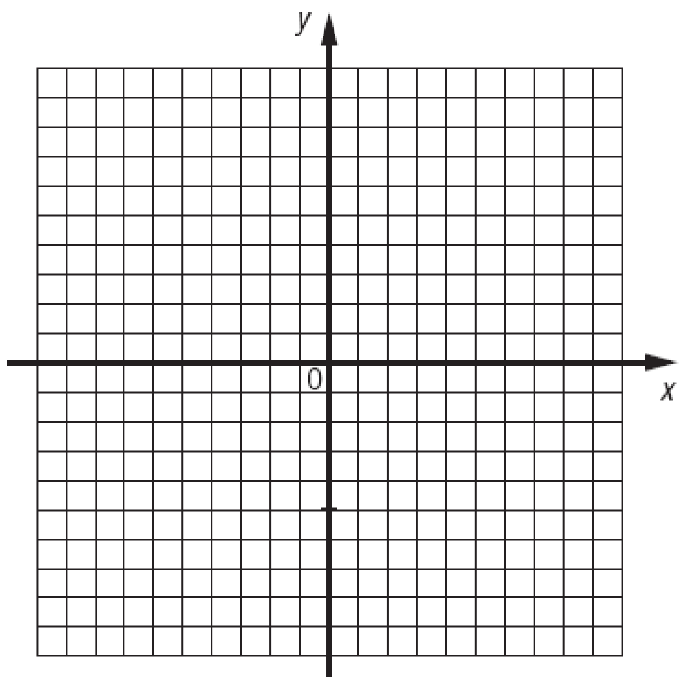
Il n'y a pas d'amplitude ni de min et de max dans une fonction tangente !! Il y a également plusieurs réponses possibles pour la fonction tangente !

Tracez le graphique de chacune des fonctions trigonométriques suivantes.

$h(x) = 3 \tan 2(x + \pi) - 4$

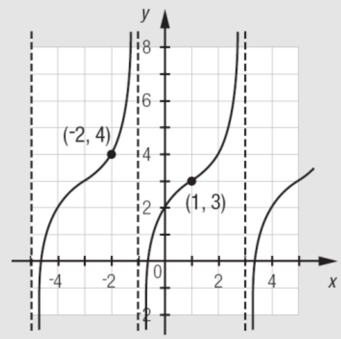


$k(x) = \tan \frac{\pi}{3}(x - 1) - 4$



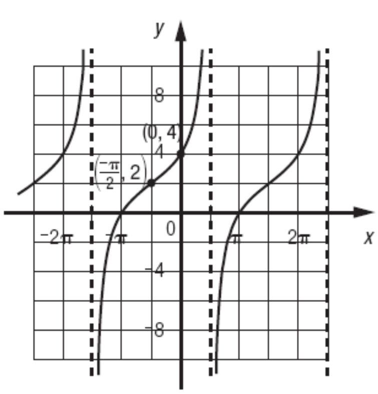
RECHERCHE DE LA RÈGLE D'UNE FONCTION TANGENTE

Il est possible de déterminer la règle d'une fonction tangente, dont la règle s'écrit $f(x) = \text{a}\tan \text{b}(x - \text{h}) + \text{k}$, de la façon suivante.

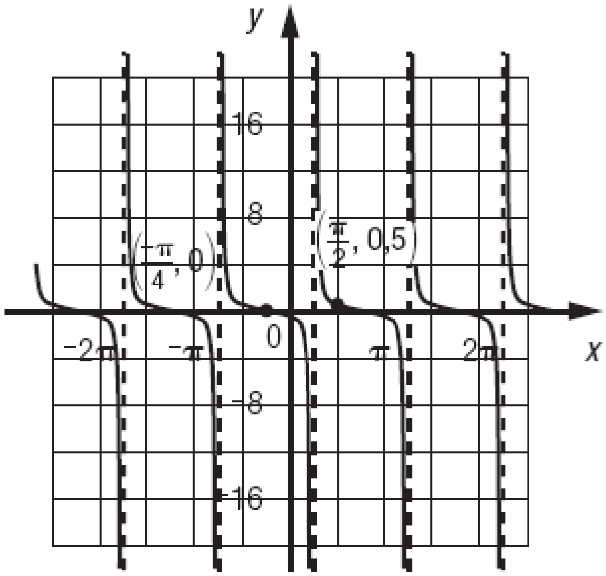
1. Trouver les coordonnées d'un point d'inflexion et d'un autre point de la courbe.	Ex. :  Les coordonnées d'un point d'inflexion de la courbe sont (1, 3) et la courbe passe par le point (⁻2, 4).
2. À l'aide du graphique, déduire la valeur du paramètre b.	Puisque la période de cette fonction est 4, on a : $p = \frac{\pi}{\lvert \text{b} \rvert} \Rightarrow 4 = \frac{\pi}{\lvert \text{b} \rvert} \Rightarrow \text{b} = \pm\frac{\pi}{4}$ D'après l'allure de la courbe, on déduit que $\text{b} = \frac{\pi}{4}$.
3. Substituer les coordonnées du point d'inflexion à h et à k, les coordonnées de l'autre point de la courbe à x et à $f(x)$, ainsi que la valeur du paramètre b dans la règle $f(x) = \text{a}\tan \text{b}(x - \text{h}) + \text{k}$.	$4 = \text{a}\tan\frac{\pi}{4}(^-2 - 1) + 3$
4. Résoudre l'équation obtenue afin de déterminer la valeur du paramètre a.	$4 = \text{a}\tan\frac{\pi}{4}(^-2 - 1) + 3$ $1 = \text{a}\tan\frac{^-3\pi}{4}$ $1 = \text{a} \times 1$ $\text{a} = 1$
5. Écrire la règle de la fonction obtenue.	$f(x) = \tan\frac{\pi}{4}(x - 1) + 3$

Déterminez la règle des fonctions suivantes :

a)

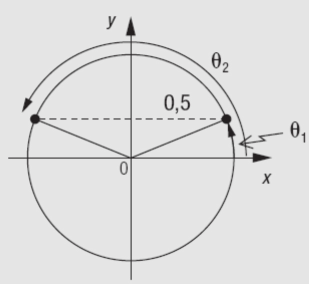
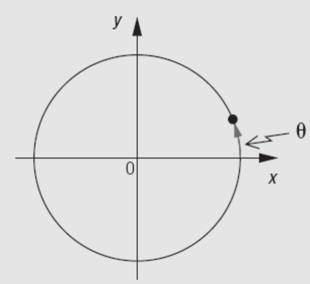


b)



RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION TRIGONOMÉTRIQUE À UNE VARIABLE

Il est possible de résoudre une équation trigonométrique à une variable, c'est-à-dire une équation sinus, une équation cosinus ou une équation tangente, de la façon suivante.

	Ex. : 1) Résoudre : $2\sin 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 5 = 6$	2) Déterminer les zéros de la fonction : $f(x) = \sqrt{3}\tan \pi x - 1$
1.	Obtenir une équation dans laquelle l'argument du sinus, du cosinus ou de la tangente est isolé.	
Ex. :	1) $2\sin 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 5 = 6$ $2\sin 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ $\sin 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ $3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \text{arc sin}\frac{1}{2}$	2) $\sqrt{3}\tan \pi x - 1 = 0$ $\sqrt{3}\tan \pi x = 1$ $\tan \pi x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\pi x = \text{arc tan}\frac{1}{\sqrt{3}}$
2.	Pour une équation sinusoïdale, déterminer la ou les deux valeurs de θ sur $[0, 2\pi[$ qui vérifient l'équation.	Pour une équation tangente, déterminer la valeur de θ sur $[0, \pi]$ qui vérifie l'équation.
Ex. :	1)  $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ $\theta_2 = \pi - \theta_1 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$	2)  $\theta = \frac{\pi}{6}$
3.	Former deux équations à partir des valeurs trouvées.	Former une équation à partir de la valeur trouvée.

ex1)

ex 2)

4.	Écrire l'ensemble solution en tenant compte de la périodicité et de l'intervalle demandé. Pour tenir compte de la périodicité ajoute $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}$	
Ex :	1)	2)

Résolvez les équations qui suivent dans l'intervalle [0, 2π[.

a) $\sin x = \frac{1}{2}$　　b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$　　c) $\tan x = 1$

d) $\cos x = -1$　　e) $\tan x = 0$　　f) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Isolez le rapport trigonométrique et son argument dans chacune des équations trigonométriques ci-dessous.

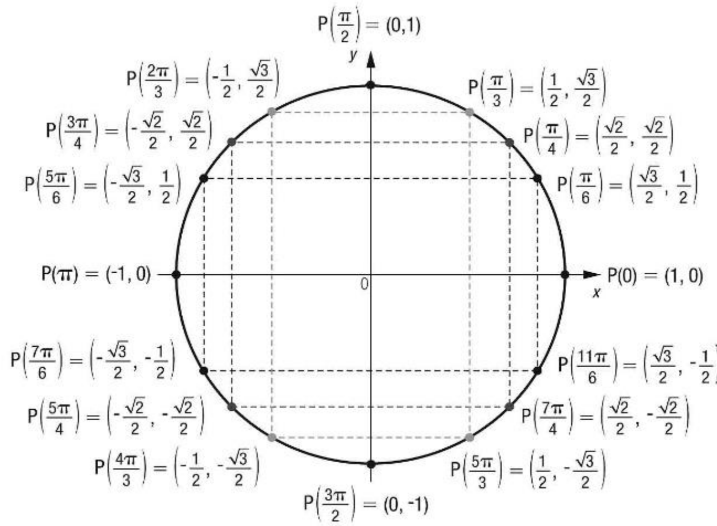
a) $4 \sin 6(x - 11) + 2 = \frac{1}{2}$

b) $9 \cos \pi(x + 14) - 5 = -1$

c) $7 \cos \frac{\pi}{2}(x + 6) + 7 = 0$

d) $-4 \tan \frac{\pi}{5}(x + 8) - 7 = -5$

Résolvez les équations suivantes dans l'intervalle $x \in [0, 2\pi[$



a) $2 \sin \frac{\pi}{3}(x + 1) + 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$

b) $-3 \cos 4\left(x + \frac{\pi}{5}\right) - \sqrt{2} = 2$

c) $1{,}5 \tan \frac{\pi}{2}(x - 2) + 1 = 4$

d) $4 \tan 0{,}5\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

e) $6 \sin \pi(x + 8) + 4 = 7$

f) $-0{,}5 \sin 4 \left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + 6 = -3$

g) $6\,cos\frac{2\pi}{5}(x-4)-3 = -1$

Déterminez l'ensemble-solution de chacune des équations trigonométriques ci-dessous :

a) $4\sin\frac{\pi}{2}x = 0 \;\; si\; x\epsilon\,[0,8]$

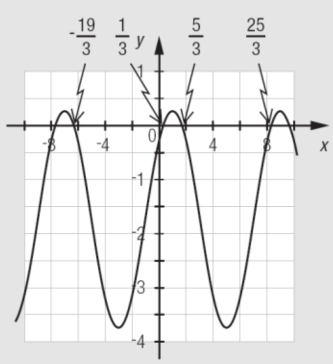
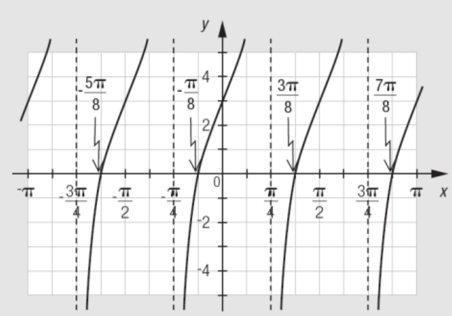
b) $2\cos 2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\ si\ x\in[-3\pi,3\pi]$

c) $3\tan\frac{\pi}{4}x-2=1\ si\ x\epsilon\ [-8,8]$

d) $-10\cos 0{,}5\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+4=-1\ si\ x\,\epsilon[-3\pi,3\pi]$

RÉSOLUTION D'UNE INÉQUATION TRIGONOMÉTRIQUE À UNE VARIABLE

Il est possible de résoudre une inéquation trigonométrique à une variable, c'est-à-dire une inéquation sinus, une inéquation cosinus ou une inéquation tangente, de la façon suivante.

	Ex. : 1) Résoudre : $2\sin\frac{\pi}{4}(x+1) - \sqrt{3} < 0$	2) Déterminer sur quels intervalles la fonction $f(x) = 3\tan 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3$ est positive.
1. Substituer un symbole d'égalité au symbole d'inégalité de l'inéquation.	$2\sin\frac{\pi}{4}(x+1) - \sqrt{3} = 0$	$3\tan 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3 = 0$
2. Résoudre l'équation.	$2\sin\frac{\pi}{4}(x+1) - \sqrt{3} = 0$ $\frac{\pi}{4}(x+1) = \text{arc sin}\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\pi}{4}(x+1) = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$ $x = \frac{1}{3} + 8n$ $\frac{\pi}{4}(x+1) = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$ $x = \frac{5}{3} + 8n$	$3\tan 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3 = 0$ $2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \text{arc tan}(-1)$ $2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} + n\pi$ $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$
3. Déduire l'ensemble-solution à l'aide du symbole d'inégalité de l'inéquation.	Puisque les équations obtenues sont $x = \frac{1}{3} + 8n$ et $x = \frac{5}{3} + 8n$, on a :  L'ensemble-solution est : $\ldots \cup \left[-\frac{19}{3}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{3}, \frac{25}{3}\right] \cup \left[\frac{29}{3}, \frac{49}{3}\right] \cup \ldots$	Puisque l'équation obtenue est $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$, on a :  L'ensemble-solution est : $\ldots \cup \left[-\frac{5\pi}{8}, -\frac{\pi}{4}\right[\cup \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left[\frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}\right[\cup \ldots$

Déterminez l'ensemble-solution de chacune des inéquations trigonométriques ci-dessous.

a) $8 \cos(x - \pi) + 4\sqrt{3} < 0$
si $x \in [-3\pi, 3\pi]$.

b) $5 \sin \frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geq -7$
si $x \in [-4\pi, 4\pi]$.

c) $6 \tan 2(x + \pi) + 2 > 8$ si $x \in [0, 2\pi]$.

d) $-3 \sin \frac{\pi}{6}(x - 2) + 5 \leq 1$ si $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

Voici maintenant des équations trigonométriques du second degré à résoudre (sauf*)! Résolvez chacune des équations suivantes pour $x \in [0, 2\pi]$

a) $4 (\sin x)^2 = 3$

b) $3 (\tan x)^2 = 1$

c) $\sin^2 x + 1 = 2\sin x$

d) $(\tan x)^2 + \tan x = 0$

e) $6cos^2x - 7\ cosx - 5 = 0$

*f) $4sin^3x - sinx = 0$

Le pendule de Galilée est un des plus anciens régulateurs de temps. Ce genre de pendule est encore utilisé aujourd'hui dans certains modèles d'horloge grand-père. Pour remonter le mécanisme de ce type d'horloge, on doit placer le pendule le plus près possible d'un des côtés du caisson pour le laisser ensuite osciller librement. La distance minimale entre un côté du caisson et le pendule est de 15 cm et la distance maximale est de 65 cm. Lorsqu'on lâche le pendule, il prend 6 s pour revenir à sa position initiale.

a) Quelle est la règle qui permet de trouver la position du pendule en fonction du temps ?

b) Combien de temps sépare deux moments où le pendule se trouve à 30 cm du côté du caisson ?

c) Avant de remonter le mécanisme de l'horloge, le pendule peut effectuer environ 40 000 oscillations complètes. Après combien de temps est-il nécessaire de remonter le mécanisme ?

Une masse est suspendue, au repos, à l'extrémité d'un ressort à 30 cm au-dessus d'une table. On tire la masse de 10 cm vers le bas, ce qui lui confère un mouvement d'oscillation régulier. La règle suivante permet de connaître la position de la masse par rapport à la table en fonction du temps : $f(x) = {}^{-}10 \cos \frac{2\pi}{3}x + 30$,
où x représente le temps (en s) et $f(x)$, la position (en cm).

a) À quelle distance de la table sera située la masse 3 s après le début des oscillations ?

b) Combien de temps après le début de l'oscillation, la masse sera-t-elle située à une hauteur de 25 cm ?

c) Combien de fois au cours des 15 premières secondes la masse sera-t-elle située à une hauteur de 35 cm ?

Une étude réalisée sur plusieurs années par des biologistes montre une étroite corrélation entre la population de lièvres d'une région donnée et celle de son principal prédateur, le lynx. La population P de lynx (en nombre d'individus) varie selon la règle $P = {}^{-}3 \cos \frac{\pi}{5}x + 5$, où x représente le temps écoulé (en années) depuis le début de l'étude. Durant l'étude, les spécialistes ont noté que la population de lièvres variait de 80 à 200 individus et que le graphique de cette population évoluait selon une fonction sinus ayant la même période que celle des lynx.

a) Quelle est la règle de la fonction qui met en relation la population de lièvres selon le temps ?

b) Quelle est la population des 2 espèces 8 ans après le début de l'étude ?

c) La deuxième fois, quelle était la population de lièvres alors que celle des lynx atteignait 5 individus ?

Les fonctions sécantes, cosécantes et cotangentes

1- Fonction sécante :

La sécante d'un nombre réel *t* est le rapport trigonométrique défini par :

Exemples :

1) Soit P(t) = $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ un point trigonométrique, calculez la valeur exacte :

a) sec t =

b) $\sec^2$ t =

c) 2 sec t =

2) Calculez la valeur exacte si possible :

a) $sec^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6}\right)$

b) sec (1,2)

1- Fonction cosécante:

La cosécante d'un nombre réel *t* est le rapport trigonométrique défini par :

Exemples :

1) Soit P(t) = $\left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$ un point trigonométrique, calculez la valeur exacte :

a) csc t =

b) 3 $\csc^2$ t =

c) $-\frac{csct}{3} =$

2) Calculez la valeur exacte si possible :

a) $csc\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$

b) csc (0)

1- Fonction cotangente :

La cotangente d'un nombre réel *t* est le rapport trigonométrique défini par :

Exemples :

1) Soit P(t) = $\left(-\frac{7}{25}, -\frac{24}{25}\right)$ un point trigonométrique, calculez la valeur exacte :

a) cot t =

b) 3 $\cot^2$ t =

2) Calculez la valeur exacte si possible :

a) $cot\left(\frac{\pi}{2}\right)$

b) cot (3)

c) $cot\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

En résumé : voici les équivalences des fonctions trigonométriques

Exercices : Simplifiez les expressions suivantes à l'aide de ces équivalences :

a) $\frac{1}{\cos t}$

b) $\frac{1}{2\,sec^2 t}$

c) $tan^2 t \cdot \frac{1}{sec^2 t}$

d) $\sin t \cdot \cos t \cdot sec^2 t$

e) $\frac{sin^2 t \cdot cot^2 t \cdot sec^2 t \cdot csc^2 t}{sec^2 t}$

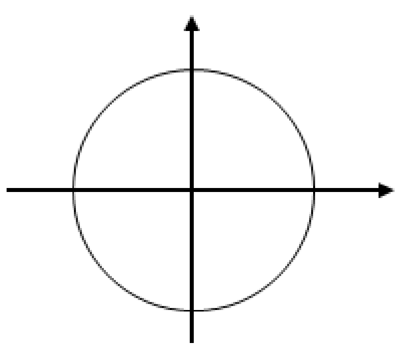
f) $\frac{cos^2t \cdot tant^2 \cdot csc^2t}{2sec^2t}$

Les identités trigonométriques

Une identité trigonométrique est une équation trigonométrique qui est toujours vraie quelles que soient les valeurs des variables. Les identités permettent, entre autres, de résoudre des équations trigonométriques, de réduire des expressions trigonométriques et de démontrer d'autres identités.

Première identité :

Sachant que le rayon du cercle trigonométrique vaut 1, on a le triangle suivant :



C'est un triangle rectangle, donc par Pythagore on obtient l'identité suivante :

Deuxième identité :

Partons de la première et divisons chaque membre de l'équation par $\cos^2 t$.

Troisième identité :

Partons de la première et divisons chaque membre de l'équation par $\sin^2 t$.

Exercices : Dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ si $\cos x = \frac{1}{2}$, déterminez la valeur exacte de

a) $\sin x =$

b) tan x =

c) $sec^2 x =$

d) csc x =

Utilisez les identités pour **simplifier** les expressions suivantes

a) $(1 - cos^2x)\ cot^2x$

b) $tan^2x\ cosec\ x \cos x$

c) $(sec^2x - 1)cot^2x$

d) $(1 + cot^2x)sinx$

e) $csc^2x(1 - sin^2x)$

f) $\tan x \cos x$

Démontrez les identités trigonométriques suivantes.

a) $\frac{\sin x \cot^2 x}{\cos x} = \cot x$

b) $(1 - \sin x + \cos x)^2 = 2(1 - \sin x)(1 + \cos x)$

c) $\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x} = \frac{\sin x}{\cos x}$

d) $(1 + \tan^2 x)(1 - \cos^2 x) = \sec^2 x - 1$

e) $\dfrac{\sin x + \tan x}{\operatorname{cosec} x + \cot x} = \sin x \tan x$

f) $\dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$

g) $\dfrac{secx}{sinx} - \dfrac{sinx}{cosx} = \cot x$

h) $\dfrac{1}{1-sinx} + \dfrac{1}{1+sinx} = 2sec^2x$

Les formules d'une somme ou d'une différence de deux angles

Les fonctions trigonométriques ne sont pas additives. Les formules suivantes permettent de déterminer le sinus, le cosinus et la tangente de la somme ou de la différence de deux angles.

Sinus de la somme de deux angles	**Sinus de la différence de deux angles**

Cosinus de la somme de deux angles	**Cosinus de la somme de deux angles**

Tangente de la somme de deux angles

Tangente de la différence de deux angles

Exemples :

#1 Déterminer la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$

#2 Déterminer la valeur exacte de $\cos \frac{11\pi}{12}$

À partir des formules précédentes, on peut déduire les formules qui permettent de déterminer le sinus, le cosinus et la tangente du double d'un angle.

Sinus du double de la mesure d'un angle

Cosinus du double de la mesure d'un angle

Tangente du double de la mesure d'un angle

Exemple : Soit le point $P(\theta) = \left(-\frac{4}{5}\ ,\ \frac{3}{5}\right)$. On peut déterminer la valeur exacte de $\tan 2\theta$.

Exercices :

#1 Détermine la valeur exacte de chaque expression.

a) $\sin\frac{11\pi}{12}$

b) $\tan\frac{5\pi}{12}$

c) $\cos\frac{13\pi}{12}$

d) $\operatorname{cosec}\frac{19\pi}{12}$

e) $\tan\frac{\pi}{12}$

f) $\sec\frac{17\pi}{12}$

#2 Soit les points du cercle trigonométrique $A\left(\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ et $B\left(-\frac{\sqrt{11}}{6}, -\frac{5}{6}\right)$. Détermine la valeur exacte de chaque expression.

a) $sin(A+B)$

b) $\cos(2A)$

c) $\cos(A-B)$

d) $\sin(2B)$

#3 Soit les points du cercle trigonométrique $A\left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$ et $B\left(\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}\right)$. Détermine la valeur exacte de chaque expression.

a) $\tan(A+B)$

b) $\tan(A-B)$

c) $\tan 2A$

d) $\tan 2B$