Culture, société et technique sec 4

Chapitre 3 : Faire le point

La géométrie analytique

Nom : Catherine Huppé

Groupe : ____________________

Cours 1

1.1 Les accroissements :

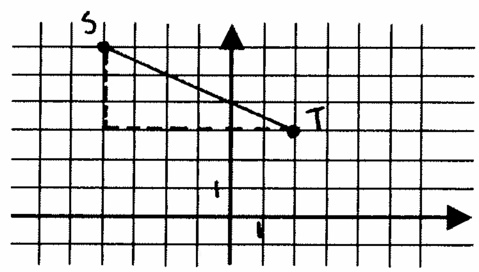
Pour un point $A(x_1, y_1)$ et un point $B(x_2, y_2)$:

- l'accroissement des abscisses de A vers B est : $\Delta x = x_2 - x_1$;
  (C'est la variation horizontale)
- l'accroissement des ordonnées de A vers B est : $\Delta y = y_2 - y_1$.
  (C'est la variation verticale)

Exercice : Soit les points S (-4, 6) et T (2, 3) détermine :

x_1, y_1 $\quad$ x_2, y_2

l'accroissement des abscisses :



$$\Delta x = x_2 - x_1$$
$$= 2 - -4$$
$$= 6$$

l'accroissement des ordonnées :

$$\Delta y = y_2 - y_1$$
$$= 3 - 6$$
$$= -3$$

1.2 La pente :

La pente d'une droite (aussi nommé taux de variation) est l'inclinaison qu'a cette droite par rapport à l'axe des abscisses dans un plan cartésien. En connaissant 2 points, on trouve la pente de la droite passant par ces deux points à l'aide da la formule suivante :

Soit $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

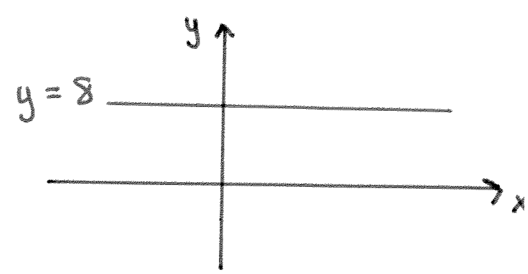
Exercices : Calculer la pente de la droite passant par les points suivants :

1. (-2, -3) et (4, -5)
   $x_1 \quad y_1 \qquad x_2 \quad y_2$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5 - -3}{4 - -2} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

2. (5, 8) et (2, 8)

$$a = \frac{8-8}{2-5} = 0 \quad \text{donc droite horizontale}$$



* 3. Accroissement des ordonnées = -15 => Δy
Accroissement des abscisses = 3 => Δx

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{15}{3} = -5$$

1.3 Déterminer l'équation d'une droite connaissant un point et la pente :

Nous recherchons une équation de la forme $y = ax + b$, c'est-à-dire l'équation d'une droite sous la forme fonctionnelle.

- a représente : la pente (le taux de variation)
- b représente : l'ordonnée à l'origine, la valeur initiale ou la valeur de y quand $x = 0$ $(0, b)$

Procédure :

Soit la droite : y = ax + b

1. Remplacer « a » par la pente donnée.
2. Remplacer le « x » et le « y » par les coordonnées du point donné.
3. Isoler « b ».

Exercices :

1. Trouver l'équation de la droite dont la pente est ½ et passant par le point (4,5).

$y = \frac{1}{2}x + b$

$5 = \frac{1}{2} \cdot 4 + b$

$5 - 2 = 2 - 2 + b$

$3 = b$

donc $y = \frac{1}{2}x + 3$

2. Trouver l'équation de la droite dont la pente est -4 et passant par le point (-4, 8).

$y = -4x + b$

$8 = -4 \cdot -4 + b$

$8 - 16 = 16 - 16 + b$

$-8 = b$

donc $y = -4x - 8$

Devoir : p. 131 a) du ai-je bien compris, p. 139 #1,
p. 144 #1a) du ai-je bien compris, p. 152 #1, 2, 3a), #4 et #5

Mini-test au prochain cours !

Cours 2 :

2.1 Déterminer l'équation d'une droite connaissant deux points :

Procédure :

Soit la droite : $y = ax + b$

1. Calculez la pente à l'aide de la formule : $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
2. Choisissez un des deux points. Remplacez le « x » et le « y » par les coordonnées du point choisi.
3. Isolez le « b ».
4. Validez votre réponse à l'aide de l'autre point.

Exercice : Trouvez l'équation de la droite passant par les points suivants :

a) $\underset{x_1\ y_1}{(-3, 4)}$ et $\underset{x_2\ y_2}{(3,5)}$

1) trouve a :

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \frac{5 - 4}{3 - -3} = \frac{1}{6}$

2) trouve b :

$y = \frac{1}{6}x + b$

$5 = \frac{1 \cdot 3}{6} + b$

$5 = \frac{3}{6} + b$

$\frac{5}{1} \overset{-1/2}{=} \frac{1}{2} \overset{-1/2}{+} b$

$\frac{10}{2} - \frac{1}{2} = b$

$\frac{9}{2} = b$

Donc

$y = \frac{1}{6}x + \frac{9}{2}$

b) (2,4) et (-3,1)

1) Trouve a:

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{1-4}{-3-2} = \dfrac{-3}{-5}$

$a = \dfrac{3}{5}$

2) trouve b:

$y = \dfrac{3}{5}x + b$

$4 = \dfrac{3}{5} \cdot 2 + b$

$-6/5 \quad -6/5$

$\dfrac{4}{1} = \dfrac{6}{5} + b$

$\dfrac{20}{5} - \dfrac{6}{5} = b$

$\dfrac{14}{5} = b$

Donc

$y = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{14}{5}$

2. Parmi les points suivants : A (3, 1) ; B (-1, 4) et C (-1, -8) , lequel appartient à la droite y = 2x – 6.

1) vérifions A : (3.1)

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad x \; y$

$1 \stackrel{?}{=} 2 \cdot 3 - 6$

$1 \neq 0$

donc le pt A n'appartient pas à la droite

2) Vérifions B : (-1, 4)

$4 \stackrel{?}{=} 2 \cdot -1 - 6$

$4 \neq -8$

donc B non plus !

3) Vérifions C : (-1, -8)

$-8 \stackrel{?}{=} 2 \cdot -1 - 6$

$-8 = -8$

Donc oui, le point C appartient à la droite !

2.2 Le passage d'une forme d'équation à une autre

L'équation d'une droite peut aussi s'écrire sous la forme générale, c'est-à-dire sous la forme $Ax + By + C = 0$. Pour la ramener sous la forme fonctionnelle, c'est-à-dire sous la forme $y = ax + b$, il vous suffit **d'isoler y.**

Exercices : Trouvez l'équation fonctionnelle des droites suivantes :

1. $3x - 4y - 12 = 0$

$\overset{-3x}{3x} - 4y - \overset{+12}{12} = 0 - 3x + 12$

$\frac{-4y}{-4} = \frac{-3x}{-4} + \frac{12}{-4}$

$y = \frac{3}{4}x - 3$

2. $x + 2y + 18 = 0$

$\overset{-x}{x} + 2y + \overset{-18}{18} = 0 - x - 18$

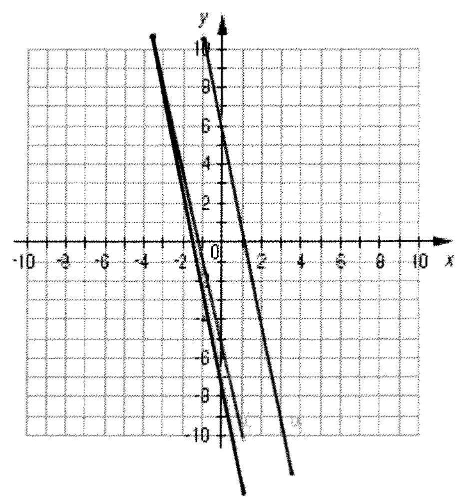
$\frac{2y}{2} = \frac{-x}{2} - \frac{18}{2}$

$y = \frac{-1}{2}x - 9$

2.3 Les droites parallèles

Deux droites parallèles ne se coupent jamais. Cette propriété géométrique se manifeste par le fait que les deux droites ont la même pente.

Exemple : La droite $y = -5x - 7$ est parallèle à la droite $10x + 2y - 12 = 0$, car ils ont la même pente.



<u>Remarque :</u> Deux droites qui ont la même pente et la même ordonnée à l'origine sont des **droites parallèles confondues**.

2.4 Les droites perpendiculaires :

Deux droites perpendiculaires se coupent à angle droit. Cette propriété géométrique se manifeste algébriquement par le fait que les pentes des deux droites sont opposés (de signe contraire) et inverses. Ainsi, en multipliant ces deux pentes le résultat est égale -1.

Exemple : Soit les deux droites suivantes : $y_1 = -5x - 4$ et $y_2 = \frac{1}{5} + 2$, sont-elles perpendiculaires ?

$a_1 = -5$

$a_2 = \frac{1}{5}$

$-5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{-5}{5}$

$= -1$

donc elles sont $\perp$

Exercices :

1. Détermine deux autres équations de droites parallèles à celle-ci $y = 3x - 8$

   Voici 2 exemples : $y = 3x$

   $y = 3x + 5$

2. Détermine deux autres équations de droites perpendiculaires à celle-ci $y = \frac{3}{4}x + 5$

   Voici 2 exemples

   $y = -\frac{4}{3}x$

   $y = -\frac{4}{3}x + 3$

Devoir : p. 144 #1b) et p. 146 a) du ai-je-bien compris
p. 152 #3b), #6, #7a), #8a), p. 159 le ai-je bien compris,
p. 162 # 1-2-3b)-4 et #6 (important)

Mini-test #2 au prochain cours

Cours 3

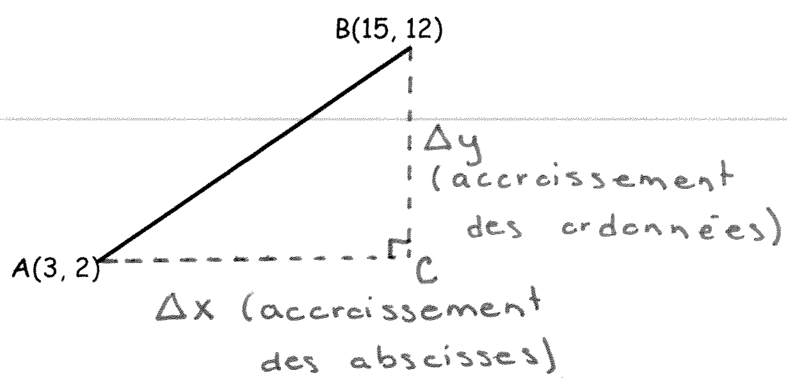
3.1 La distance entre deux points

La distance entre un point A et un point B correspond à la longueur du segment reliant ces deux points. Cette longueur s'exprime par un nombre positif. On peut calculer la distance *d* entre un point A (x_1, y_1) et B (x_2, y_2) à l'aide de la formule suivante.

$$\boxed{d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

ou $d(A,B) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

Voici d'où vient cette formule :



1) Formez un Δ rectangle

2) Trouvez :

$m\overline{BC} = y_2 - y_1$
$= 12 - 2$
$= 10$

$m\overline{AC} = x_2 - x_1$
$= 15 - 3$
$= 12$

3) Utilisez pythagore pour trouver $m\overline{AB}$:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$m\overline{AB}^2 = m\overline{AC}^2 + m\overline{BC}^2$$

$$d(A,B)^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

$$d(A,B) = \sqrt{12^2 + 10^2}$$

$$d(A,B) = 15{,}62$$

Exercices : Calculez la distance entre les points donnés.

1. A (8, 11) et B (-13, 11)
   x_1 y_1 x_2 y_2

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-13 - 8)^2 + (11 - 11)^2}$$
$$= 21$$

2. C (-6, -5) et D (9, 4)

$$d(C, D) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(9 - -6)^2 + (4 - -5)}$$
$$= \sqrt{15^2 + 9^2}$$
$$= 17,49$$

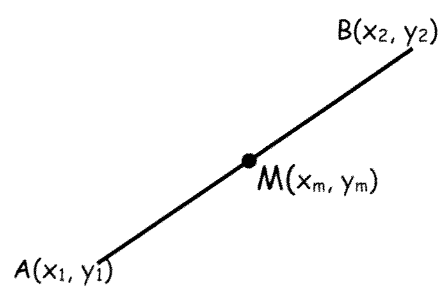
3. Sachant que l'accroissement des ordonnées est de 5,8 et l'accroissement des abscisses est de -6,3.

$$d(A, B) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$
$$= \sqrt{(-6,3)^2 + (5,8)^2}$$
$$= 8,56$$

3.2 Le point milieu

Les coordonnées du point milieu du segment AB sont données par les formules suivantes :

$$\boxed{x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{et} \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$



Exercice :

Trouvez le point milieu du segment AB si :

c) A(-6, 9) et B(1, -3)

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{et} \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$x_m = \frac{-6+1}{2} \qquad y_m = \frac{9 + -3}{2} \qquad \text{Rép: } \left(\frac{-5}{2}, 3\right)$$

$$x_m = \frac{-5}{2} \qquad y_m = 3$$

d) A(0, -5) et B (8, -9)

$$x_m = \frac{0+8}{2} \qquad y_m = \frac{-5 + -9}{2} \qquad \text{Rép: } (4, -7)$$

$$x_m = 4 \qquad y_m = -7$$

Devoir : **p. 133 # 1-2 du ai-je bien compris**

p. 139 #2-3-4-6a)b)c)d)

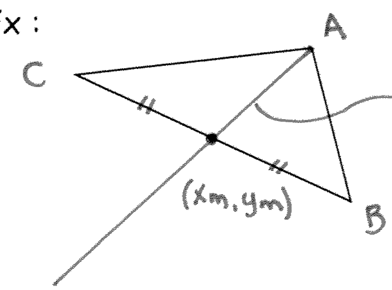
Mini-test # 3 au prochain cours

Cours 4

Rappel :

- Médiane : Dans un triangle, c'est un segment reliant un sommet au milieu du côté opposé.

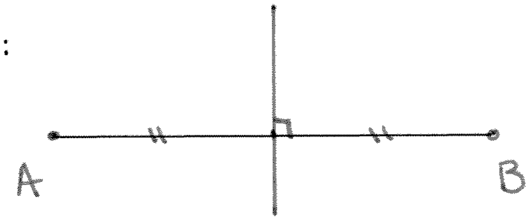
Ex :



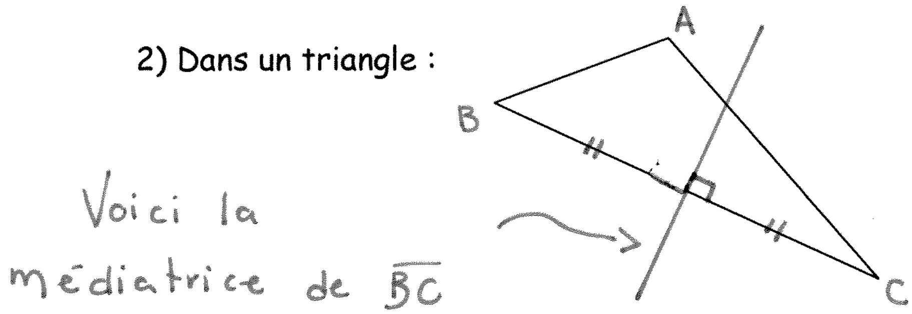
Voici la médiane du segment $\overline{BC}$

- Médiatrice : Droite perpendiculaire à un segment et passant par son milieu.

Ex : 1) sur un segment :

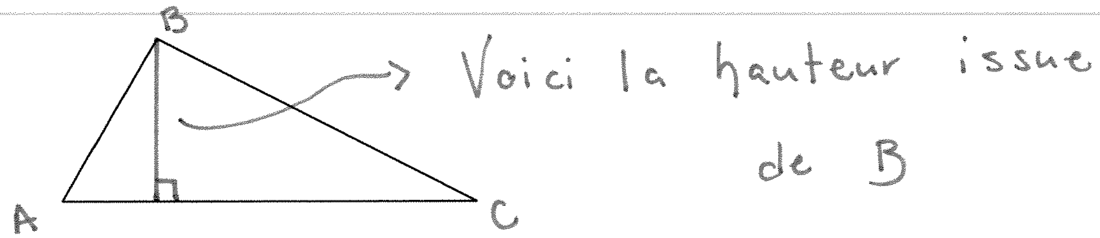


2) Dans un triangle :



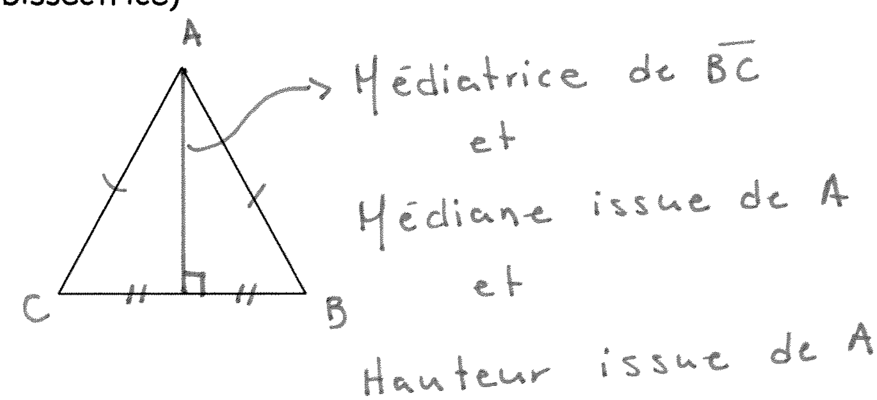
- Hauteur : Segment abaissé perpendiculairement d'un sommet à sa base.

Ex :



- Dans un triangle équilatéral ou isocèle, la hauteur est à la fois une médiane et une médiatrice (ainsi qu'une bissectrice)

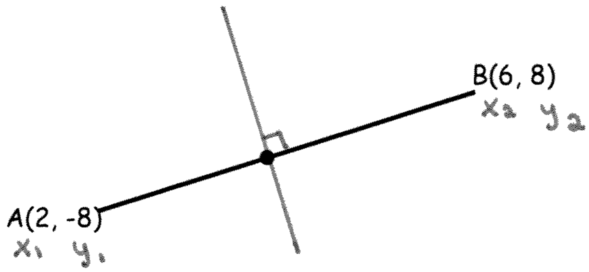
Ex : Voici un triangle isocèle :



Exercices :

perpendiculaire point milieu

#1 Trouvez l'équation de la médiatrice du segment AB ci-dessous :



1) Trouve le pt milieu de $\overline{AB}$ Donc $(4, 0)$

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$x_m = \frac{2 + 6}{2} = 4 \qquad y_m = \frac{-8 + 8}{2} = 0$$

2) Pente de $\overline{AB}$:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{8 - -8}{6 - 2}$$

$$a = \frac{16}{4} = 4$$

Donc la pente de la médiatrice est $\frac{-1}{4}$

3) Trouve l'équation de la médiatrice :

$$y = \frac{-1}{4}x + b$$

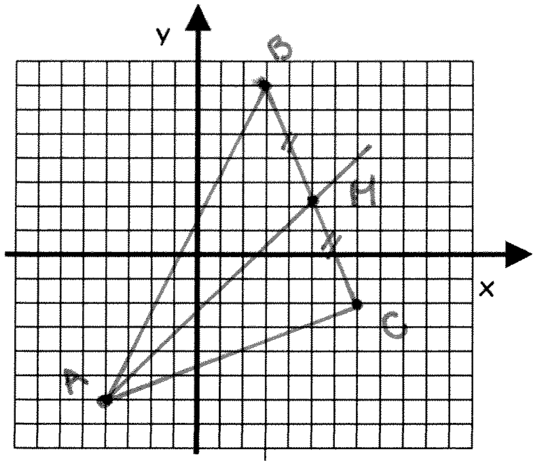
$$0 = \frac{-1}{4} \cdot 4 + b$$

$$0^{+1} = -1^{+1} + b$$

$$1 = b$$

Donc $y = \frac{-1}{4}x + 1$ représente l'équation de la médiatrice de $\overline{AB}$

#2 Dans le plan cartésien ci-contre, trace le triangle ayant comme sommets les points A(-4,-6), B(3,7) et C(7, -2) et détermine l'équation de la médiane issue de A.



1) Trouve le pt milieu de $\overline{BC}$

B(3, 7) et C(7, -2)

x_1 y_1 x_2 y_2

$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$

$x_m = \frac{3+7}{2}$ $y_m = \frac{7 + -2}{2}$

$x_m = 5$ $y_m = 5/2$

Rép: $\left(5, \frac{5}{2}\right)$

2) Trouve l'équation de la médiane issue de A : 2 pts A(-4, -6) et M $\left(5, \frac{5}{2}\right)$

i) $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \frac{\frac{5}{2} - \frac{6}{1}}{5 - -4}$

$a = \frac{\frac{-7}{2}}{9} = \frac{-7}{2} \cdot \frac{1}{9}$

$= \frac{-7}{18}$

ii) $y = \frac{-7}{18}x + b$

$-6 = \frac{-7}{18} \cdot -4 + b$

$\frac{-6}{1} - \frac{28}{18} = \frac{28}{18} - \frac{28}{18} + b$

$\frac{-108}{18} - \frac{28}{18} = b$

$\frac{-136}{18} = b$

$\frac{-68}{9} = b$

Donc $y = \frac{-7}{18}x - \frac{68}{9}$

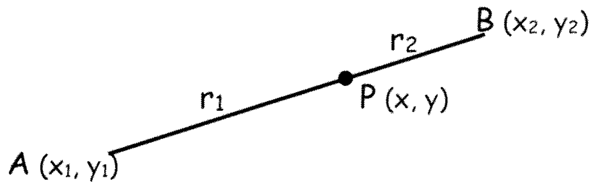
Devoir :

p. 140 # 5, 7, 8 et 9 p. 168 # 19 (important) p. 171 #27

Cours 5

5.1 Le point de partage

Soit le segment AB:



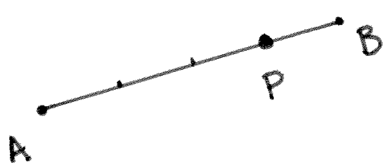
Le point P partage le segment AB dans un **rapport r** $= \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{m\,\overline{AP}}{m\,\overline{PB}}$

Alors les coordonnées du point P sont :

$$x = \frac{r_1 \cdot x_2 + r_2 \cdot x_1}{r_1 + r_2} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{r_1 \cdot y_2 + r_2 \cdot y_1}{r_1 + r_2}$$

Exercices :

1. Donnez le rapport $r = \frac{r1}{r2}$ sachant que P est situé aux $\frac{3}{4}$ à partir de A.

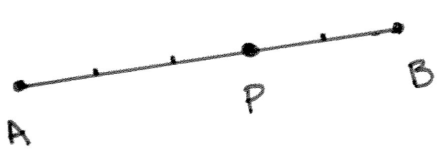


$r_1 = 3$

$r_2 = 1$

donc $r = \dfrac{3}{1}$

2. Donnez le rapport $r = \frac{r1}{r2}$ sachant que P est situé aux 3/5 à partir de A.



$r_1 = 3$

$r_2 = 2$

donc $r = \dfrac{3}{2}$

3. Trouvez les coordonnées du point qui partage le segment AB dans le rapport $\boxed{\frac{3}{4}}$ à partir de A. Voici les coordonnées des points A et B : A(-2, 5) et B(3, 8)

$x_1 \; y_1 \quad x_2 \; y_2$

donc $r_1 = 3$

$r_2 = 4$

$$x = \frac{r_1 \cdot x_2 + r_2 \cdot x_1}{r_1 + r_2} \qquad y = \frac{r_1 \cdot y_2 + r_2 \cdot y_1}{r_1 + r_2}$$

$$x = \frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot -2}{3 + 4} \qquad y = \frac{3 \cdot 8 + 4 \cdot 5}{3 + 4}$$

$$x = \frac{1}{7} \qquad y = \frac{44}{7}$$

Rép : $\left(\frac{1}{7}, \frac{44}{7}\right)$

4. Trouvez les coordonnées du point situé aux 2/3 du segment AB à partir de B.

Voici les coordonnées de A et B : A(-4, 6) et B(1, 2)

$x_2 \; y_2 \quad x_1 \; y_1$

Attention au point de départ

$r_1 = 2$

$r_2 = 1$

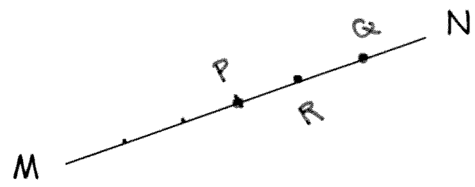
$$x = \frac{r_1 \cdot x_2 + r_2 \cdot x_1}{r_1 + r_2} \qquad y = \frac{r_1 \cdot y_2 + r_2 \cdot y_1}{r_1 + r_2}$$

$$x = \frac{2 \cdot -4 + 1 \cdot 1}{2 + 1} \qquad y = \frac{2 \cdot 6 + 1 \cdot 2}{2 + 1}$$

$$x = \frac{-7}{3} \qquad y = \frac{14}{3}$$

Rép : $\left(\frac{-7}{3}, \frac{14}{3}\right)$

5. Les points P, Q et R sont des points du segments de droite MN illustré ci-dessous.



- Le point P est situé à mi-chemin entre les points M et N.
- Le point Q est situé aux 5/6 du segment MN, et ce, à partir de M.
- La distance entre les points R et M est le double de la distance entre les points R et N.

Parmi les points P, Q et R, lequel est le plus près du point N ?

Rép: le pt Q

Devoir : **p. 133 #3 et p. 135 du ai-je bien compris**

p. 140 # 10, 11, 13 et 14

<u>Mini-test #4 au prochain cours</u>

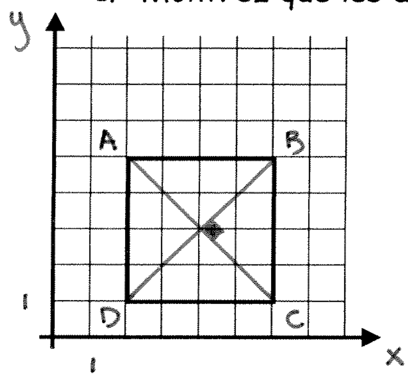
Cours 6

6.1 Les propriétés d'objets géométriques

La géométrie analytique permet de démontrer ou de vérifier certaines propriétés d'objets géométriques.

Exercices :

1. Montrez que les diagonales d'un carré sont isométriques et perpendiculaires.



1) $d(A,C)$: $A(2,5)$ et $C(6,1)$

$$d(A,C) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(6-2)^2 + (1-5)^2}$$
$$= \sqrt{32}$$

2) $d(B,D)$: $B(6,5)$ et $D(2,1)$

$$d(B,D) = \sqrt{(2-6)^2 + (1-5)^2}$$
$$= \sqrt{32}$$

Donc comme $d(A,C) = d(B,D)$ les diagonales du carré sont isométriques

3) Pente de $\overline{AC}$:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-5}{6-2} = \frac{-4}{4} = -1$$

4) Pente de $\overline{BD}$:

$$a_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-5}{2-6} = \frac{-4}{-4} = 1$$

5) Vérifions si

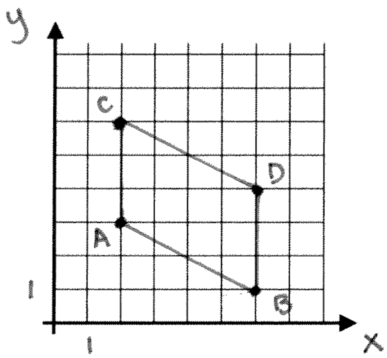
$a_1 \cdot a_2 = -1$

$-1 \cdot 1 = -1$

Vraie

donc les diagonale sont perpendiculaires

2. Montrez que le quadrilatère représenté par les points suivants A(2,3); B(6, 1) C(2, 6) et D(6, 4) est un parallélogramme:



↳ 2 paires de droites //

1) Montrez que $\overline{AC}$ // $\overline{BD}$

ce sont 2 segments verticaux donc nécessairement parallèles.

2) Montrez que $\overline{CD}$ // $\overline{AB}$

1) pente de $\overline{CD}$:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-6}{6-2} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

2) pente de $\overline{AB}$:

$$a_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-3}{6-2} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

Comme $a_1 = a_2$ alors $\overline{CD}$ // $\overline{AB}$

Donc ABCD est bien un parallélogramme car il possède 2 paires de droites parallèles.

Devoir : **p. 160 le ai-je bien compris**

p. 163 # 8

Commencer les exercices préparatoires : p.155 #16, #17, 18

Cours 7 et 8 :

Exercices préparatoires : p. 140 #12, 16, 17, 18, 19

p.164 # 1-2-3-4-5-6-8-10-11-12-13-16-17-20

Faire un résumé

Cours 9 :

Examen toute la période

Début des exercices préparatoires à l'examen d'étape 1 (vous aurez droit à une demi-feuille aide-mémoire pour l'examen d'étape 1)