Les formules d'une somme ou d'une différence de deux angles

Les fonctions trigonométriques ne sont pas additives. Les formules suivantes permettent de déterminer le sinus, le cosinus et la tangente de la somme ou de la différence de deux angles.

Sinus de la somme de deux angles

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

Sinus de la différence de deux angles

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

Cosinus de la somme de deux angles

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

Cosinus de la somme de deux angles

$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

Tangente de la somme de deux angles

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1-\tan A\tan B}, \text{ où } 1-\tan A\tan B \neq 0$$

Tangente de la différence de deux angles

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A\tan B}, \text{ où } 1+\tan A\tan B \neq 0$$

Exemples :

#1 Déterminer la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$

Comme $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$

alors
$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

#2 Déterminer la valeur exacte de $\cos\frac{11\pi}{12}$

comme $\cos\frac{11\pi}{12} = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$

alors $\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{3\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= -\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$

$= \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

À partir des formules précédentes, on peut déduire les formules qui permettent de déterminer le sinus, le cosinus et la tangente du double d'un angle.

Sinus du double de la mesure d'un angle

$\sin 2A = 2\sin A\cos A$

$\sin(A+A) = \sin A\cos A + \cos A\sin A$

$= 2\sin A\cos A$

Cosinus du double de la mesure d'un angle

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$\cos(A+A) = \cos A\cos A - \sin A\sin A$

$= \cos^2 A - \sin^2 A$

Tangente du double de la mesure d'un angle

$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ où $1-\tan^2 A \neq 0$

$\tan(A+A)$

$= \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A\tan A}$

$= \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

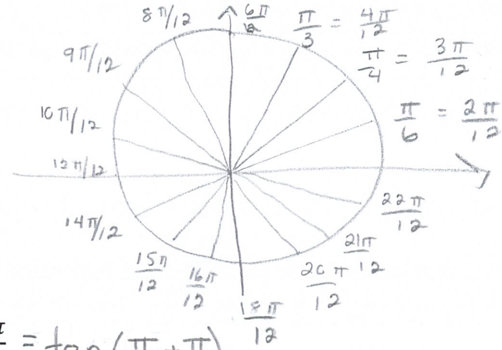
Exemple : Soit le point $P(\theta) = \left(-\frac{4}{5}\ ,\ \frac{3}{5}\right)$. On peut déterminer la valeur exacte de $\tan 2\theta$.

1) Détermine $\tan\theta = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{-4}{5}} = -\frac{3}{4}$

2) $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$= \frac{2 \cdot -3/4}{1 - (-3/4)^2}$

$= \frac{-\frac{6}{4}}{1 - 9/16} = \frac{-\frac{6}{4}}{7/16} = -\frac{24}{7}$



Exercices :

#1 Détermine la valeur exacte de chaque expression.

a) $\sin\frac{11\pi}{12} = \sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$

$= \sin\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{3\pi}{4}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) $\tan\frac{5\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$

$= \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}$

$= \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{3}{3-\sqrt{3}}$

$= \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$

$= \frac{9+6\sqrt{3}+3}{9-3} = 2+\sqrt{3}$

c) $\cos\frac{13\pi}{12} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos\frac{3\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{3\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

d) $\operatorname{cosec}\frac{19\pi}{12} = \operatorname{cosec}\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$

$\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right) = \sin\frac{4\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{4\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

$= \frac{-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\operatorname{cosec}\frac{19\pi}{12} = \frac{1}{\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \frac{-4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

$= \frac{-4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2} = -(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$= -\sqrt{6}+\sqrt{2}$

e) $\tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$

$= \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}$

$= \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}$

$= \frac{3-\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{3}{3+\sqrt{3}}$

$= \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

$= \frac{12-6\sqrt{3}}{6} = 2-\sqrt{3}$

f) $\sec\frac{17\pi}{12} = \sec\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$

$\cos\frac{17\pi}{12} = \cos\frac{5\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{5\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$= \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sec\frac{17\pi}{12} = \frac{1}{\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{4}{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}\cdot\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

$= \frac{-4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6-2}$

$= -\sqrt{6}-\sqrt{2}$

#2 Soit les points du cercle trigonométrique $A\left(\frac{2}{3},-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ et $B\left(-\frac{\sqrt{11}}{6},-\frac{5}{6}\right)$. Détermine la valeur exacte de chaque expression.

a) $sin(A+B)$

$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$= \frac{-\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{-\sqrt{11}}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{-5}{6}$

$= \frac{\sqrt{55}-10}{18}$

b) $\cos(2A)$

$= \cos^2 A - \sin^2 A$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{-5}{6}\right)^2$

$= \frac{4^{\cdot 4}}{9 \cdot 4} - \frac{25}{36}$

$= \frac{16-25}{36}$

$= \frac{-9}{36} = -\frac{1}{4}$

c) $\cos(A-B)$

$= \cos A \cos B + \sin A \sin B$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{-\sqrt{11}}{6} + \frac{-\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{-5}{6}$

$= \frac{-2\sqrt{11}+5\sqrt{5}}{18}$

d) $\sin(2B)$

$= 2 \sin B \cos B$

$= 2 \cdot \frac{-5}{6} \cdot \frac{-\sqrt{11}}{6}$

$= \frac{10\sqrt{11}}{36} = \frac{5\sqrt{11}}{18}$

#3 Soit les points du cercle trigonométrique $A\left(-\frac{5}{13},-\frac{12}{13}\right)$ et $B\left(\frac{24}{25},-\frac{7}{25}\right)$. Détermine la valeur exacte de chaque expression.

$\frac{-12}{13} \cdot \frac{-13}{5} = \frac{12}{5}$ $\qquad$ $\frac{-7}{25} \cdot \frac{25}{24} = \frac{-7}{24}$

a) $\tan(A+B)$

$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

$= \frac{\frac{12}{5} - \frac{7}{24}}{1 - \frac{12}{5} \cdot \frac{-7}{24}} = \frac{\frac{288-35}{120}}{\frac{120}{120} + \frac{84}{120}}$

$= \frac{253}{120} \cdot \frac{120}{204}$

$= \frac{253}{204}$

b) $\tan(A-B)$

$= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

$= \frac{\frac{12}{5} + \frac{7}{24}}{1 + \frac{12}{5} \cdot \frac{-7}{24}} = \frac{323}{120} \cdot \frac{120}{36}$

$= \frac{323}{36}$

c) tan $2A$

$$= \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{12}{5}}{1-\left(\frac{12}{5}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{24}{5}}{1-\frac{144}{25}} = \frac{24}{5} \cdot \frac{25}{-119}$$

$$= \frac{-120}{119}$$

d) tan $2B$

$$= \frac{2\tan B}{1-\tan^2 B}$$

$$= \frac{2 \cdot {-7/24}}{1-\left(-7/24\right)^2}$$

$$= \frac{-14}{24}$$