b) Les coordonnées du point d'intersection des asymptotes sont $(\overset{h}{7}, \overset{k}{-1})$ et la courbe passe pas le point $(\underset{x}{-5}, \underset{y}{-5})$.

$$y = \frac{a}{x-h} + k$$

$$-5^{+1} = \frac{a}{-5-7} - 1^{+1}$$

$$-4^{\cdot -12} = \frac{a}{-12} \cdot -12$$

$$a = 48$$

$$f(x) = \frac{48}{x-7} - 1$$

c) Les coordonnées du point d'intersection des asymptotes sont $(\overset{h}{11}, \overset{k}{0})$ et la courbe passe pas le point $(\underset{x}{9}, \underset{y}{4})$.

$$y = \frac{a}{x-h} + k$$

$$4 = \frac{a}{9-11}$$

$$4^{\cdot -2} = \frac{a}{-2} \cdot -2$$

$$-8 = a$$

Donc $f(x) = \frac{-8}{x-11}$

d) Les équations des asymptotes sont x = -5 et y = 2, et la courbe passe par le point (0, 0)

$$y = \frac{a}{x-h} + k$$

$$0 = \frac{a}{0+5} + 2$$

$$-2^{\cdot 5} = \frac{a}{5} \cdot 5$$

$$-10 = a$$

$$f(x) = \frac{-10}{x+5} + 2$$

e) Les équations des asymptotes sont x = 6 et y = -4, et la courbe passe par le point (-1,3)

$$y = \frac{a}{x-h} + k$$

$$3^{+4} = \frac{a}{-1-6} - 4^{+4}$$

$$7^{\cdot -7} = \frac{a}{-7} \cdot -7$$

$$-49 = a$$

Donc $f(x) = \frac{-49}{x-6} - 4$

Résolution d'une équation rationnelle

La résolution d'équations rationnelles s'effectue en tenant compte des règles habituelles de transformation des équations. N'oubliez pas les restrictions !

Exemple : Résoudre $4 \overset{+1}{=} \frac{3}{2x-1} - 1 \; {}^{+1}$

$5 = \frac{3}{2x-1}$

Restriction : $2x - 1 \overset{+1}{\neq} 0 \; +1$

$2x \neq 1$

$x \neq 1/2$

$5(2x-1) = 3$

$10x - 5 \overset{+5}{=} 3+5$

$10x = 8$

$x = 8/10$

$x = 4/5$

Rép : $x = 4/5$

Exercice : Résolvez chacune des équations suivantes.

a) $\frac{5}{x+4} = 3$

$5 = 3(x+4)$

$\overset{-12}{5} = 3x + 12 \; -12$

$\frac{-7}{3} = \frac{3x}{3}$

$x = -7/3$

Rép : $x = -7/3$

Rest : $x \neq -4$

b) $\frac{3}{2x-7} + \overset{-1}{1} = 16 - 1$

$3 = 15(2x-7)$

$3 \overset{+105}{=} 30x - 105 \; +105$

$\frac{108}{30} = \frac{30x}{30}$

$x = 3,6 \; (18/5)$

Rest :

$2x - 7 \neq 0$

$x \neq 7/2$

c) $\frac{x}{x+4} = 12$

$x = 12(x+4)$

Rest : $x \neq -4$

$\overset{-12x}{x} = 12x \overset{-12x}{+} 48$

$-11x = 48$

$x = -48/11$

d) $\frac{2x-7}{x+14} - \overset{+3}{3} = 19 + 3$

Rest : $x \neq -14$

$\frac{2x-7}{x+14} = 22$

$2x - 7 = 22(x+14)$

$\overset{-2x}{2x} \overset{-308}{-} 7 = 22x \overset{-2x}{+} 308 \; -308$

$\frac{-315}{20} = \frac{20x}{20}$

$-15,75 = x$

e) $\overset{-18}{\frac{1}{2}} = \frac{5x-1}{5x+1} + 18 \; -18$

Rest $x \neq -1/5$

$\frac{-35}{2} = \frac{5x-1}{5x+1}$

$-35(5x+1) = 2(5x-1)$

$\overset{-10x}{-175x} \; -35 \overset{+35}{=} 10x \overset{-10x}{} -2 +35$

$\frac{-185x}{-185} = \frac{33}{-185}$

$x = -33/185$

f) $8 = \frac{\frac{1}{3}x}{5x - \frac{2}{3}}$

Rest : $5x - \frac{2}{3} \neq 0$

$5x \neq \frac{2}{3}$

$x = 2/15$

$8\left(5x - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}x$

$\overset{-40x}{40x} - \frac{16}{3} = \frac{1}{3}x \; -40x$

$\frac{-16}{\cancel{3}} = \frac{-119x}{\cancel{3}}$

$\frac{-16}{-119} = x$

$x = 16/119$

g) $\frac{4x-3}{2x-8} = 5$

Rest $x \neq 4$

$5(2x-8) = 4x - 3$

$\overset{-4x}{10x} - \overset{+40}{40} = \overset{-4x}{4x} -3 +40$

$\frac{6x}{6} = \frac{37}{6}$

$x = 37/6$

h) $\frac{0{,}75x}{0{,}5x - 2} + \overset{-3}{3} = 13 - 3$

Rest $x \neq 4$

$\frac{0{,}75x}{0{,}5x-2} = 10$

$\overset{-5x}{0{,}75x} = 5x - 20 \; -5x$

$\frac{-4{,}25x}{-4{,}25} = \frac{-20}{-4{,}25}$

$x = \frac{80}{17}$

Résolution d'une inéquation rationnelle :

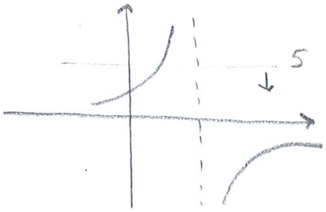
Étapes :

1. Tracer l'esquisse de la fonction
2. Remplacer le symbole d'inéquation par un symbole d'équation
3. Résoudre
4. Donner l'ensemble-solution en tenant compte des asymptotes

Exemple : Résoudre $\frac{6}{4-x} \leq 5$

$y = \frac{6}{-(x-4)}$

$y = \frac{-6}{x-4}$



$6 = 5(4-x)$

$6 \overset{-20}{=} \overset{-20}{20} - 5x$

$\frac{-14}{-5} = \frac{-5x}{-5}$

$x = 14/5$

Rép :

$x \in -\infty, \frac{14}{5}] \cup]4, \infty[$

Exercice : Résolvez chacune des inéquations suivantes.

a) $\frac{3}{6x + 18} < 5$

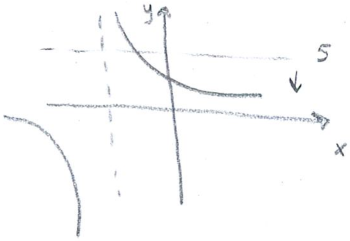
$3 = 5(6x+18)$

$\overset{-90}{3} = 30x + 90 \; {-90}$

$\frac{-87}{30} = \frac{30x}{30}$

$\frac{-29}{10} = x$

$y = \frac{3}{6(x+3)}$



Rép :

$x \in -\infty, -3[\cup]\frac{-29}{10}, \infty[$

b) $-26 \leq \frac{12}{5 - x} - 2$

$\overset{+2}{-26} = \frac{12}{5-x} - 2 + 2$

$-24 = \frac{12}{5-x}$

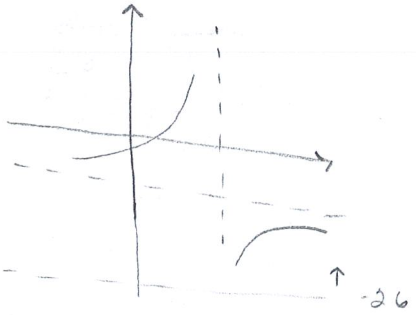
$-24(5-x) = 12$

$\overset{+120}{-120} + 24x = 12 + 120$

$\frac{24x}{24} = \frac{132}{24}$

$X = 5,5$

$y = \frac{12}{-(x-5)} - 2$



Rép :

$x \in -\infty, 5[\cup [5{,}5, \infty[$

c) $\frac{-8x}{x + 3} - 13 \leq 9$

$y = \frac{-8x - 13(x+3)}{x+3}$

$y = \frac{-8x - 13x - 39}{x+3} = \frac{-21x - 39}{x+3}$

$$\begin{array}{l|l} -21x - 39 & x + 3 \\ \hline -\;\; -21x - 63 & -21 \text{ reste } 24 \\ \hline \quad 24 & \end{array}$$

donc $y = \frac{24}{x+3} - 21$

$\frac{-8x}{x+3} - 13 \overset{+13}{=} 9 + 13$

$\frac{-8x}{x+3} = 22$

$22(x+3) = -8x$

$22x + 66 = -8x$

$\frac{66}{-30} = \frac{-30x}{-30}$

$x = -2,2$

Rép : $x \in -\infty, -3[\cup [-2,2, \infty[$

d) $\frac{-1}{-x+3{,}5}+\frac{5}{2}>\frac{1}{2}$

$y=\frac{-1}{-(x-3{,}5)}+\frac{5}{2}$

$\frac{-1}{-x+3{,}5}+2{,}5^{-2{,}5}=0{,}5-2{,}5$

$\frac{-1}{-x+3{,}5}=-2$

$-1^{+7}=2x-7^{+7}$

$\frac{6}{2}=\frac{2x}{+2}$

$x=3$

Rép : $-\infty,3[\ \cup\ ]3{,}5,\infty[$

e) $0<\frac{-2x}{0{,}25x+2}+3\frac{(0{,}25x+2)}{(0{,}25x+2)}$

$y=\frac{-2x+0{,}75x+6}{0{,}25x+2}$

$y=\frac{-1{,}25x+6}{0{,}25x+2}$

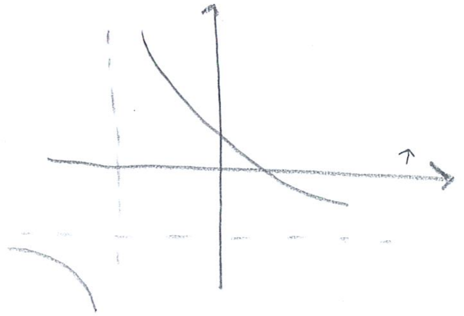
$-1{,}25x+6\ \underline{|0{,}25x+2}$

$-\ \underline{-1{,}25x-10}\quad -5$ reste 16

16

$y=\frac{16}{0{,}25(x+2/0{,}25)}-5$

$y=\frac{64}{x+8}-5$



$\frac{-2x}{0{,}25x+2}+3^{-3}=0-3$

$\frac{-2x}{0{,}25x+2}=-3$

$-2x=-3(0{,}25x+2)$

$\quad +0{,}75x \qquad +0{,}75x$

$-2x=-0{,}75x-6$

$\frac{-1{,}25x}{-1{,}25}=\frac{-6}{-1{,}25}$

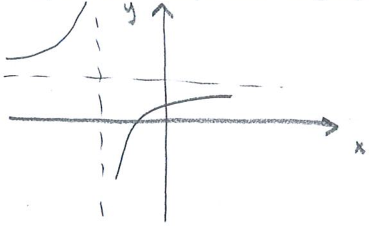
$x=4{,}8$

Rép : $x\in\ ]-8,\ 4{,}8[$

Faire l'étude d'une fonction rationnelle:

a) Soit la fonction suivante : $f(x) = \frac{-3}{x+5} + 4$

1) Trace l'esquisse du graphique



2) Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ Image : $\mathbb{R} \setminus \{4\}$

3) Variation : croissante

4) Extremum : ——

5) Ordonnée à l'origine : $f(0) = \frac{-3}{0+5} + 4$ $y = 17/5$

$f(0) = \frac{-3}{5} + 4$

$f(0) = 17/5$

6) Abscisse à l'origine :

$0 \overset{-4}{=} \frac{-3}{x+5} + 4 \; -4$

$-4 = \frac{-3}{x+5}$

$-4(x+5) = -3$

$\rightarrow -4x - 20 = -3$

$-4x = 17$

$x = -17/4$

7) Signe :

pos : $x \in -\infty, -5[\cup [\frac{-17}{4}, \infty[$

nég : $x \in]-5, \frac{-17}{4}]$

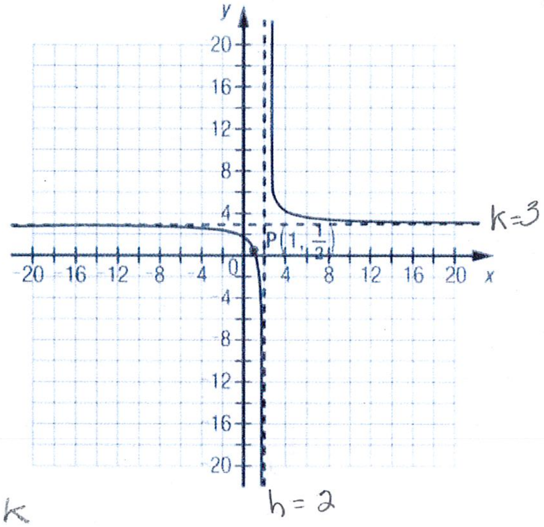
Réciproque de la fonction rationnelle

Étapes :

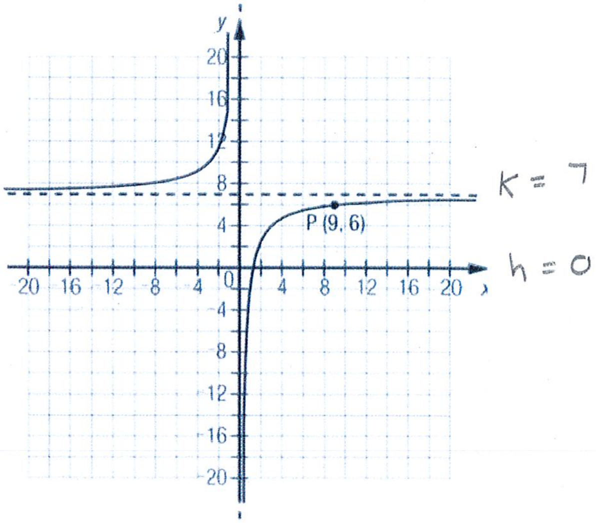
1. Détermine d'abord la règle de la fonction rationnelle
2. Détermine la règle de la réciproque en intervertissant le h et le k en conservant les signes d'origines.

Exercice : Dans chaque cas, déterminez la règle de la réciproque

a)



b)



Pt$(1, \frac{1}{2})$
x y

a)

$y = \frac{a}{x-h} + k$

$\frac{1}{2}^{-3} = \frac{a}{1-2} + 3^{-3}$

$-\frac{5}{2} = \frac{a}{-1}$

$a = 5/2$

$f(x) = \frac{5/2}{x-2} + 3$

$f^{-1}(x) = \frac{5/2}{x-3} + 2$

b) $y = \frac{a}{x-h} + k$

$6^{-7} = \frac{a}{9-0} + 7^{-7}$

$-1 = \frac{a}{9}$

$-9 = a$

donc $g(x) = \frac{-9}{x} + 7$

$g^{-1}(x) = \frac{-9}{x-7}$

c) $y = \dfrac{3x-2}{x+4}$

1) Trouve la forme canonique!

$3x - 2 \;\underline{|\, x+4}$
$\underline{-\;3x+12}$ 3 reste -14
-14

$y = \frac{-14}{x+4} + 3$ alors $y^{-1} = \frac{-14}{x-3} - 4$

La réciproque d'une fonction rationnelle est aussi une fonction rationnelle !

Résolution de problèmes

#1 Une maison d'édition publie un nouveau roman. Les coûts de mise en marché s'élèvent à 20 000$. Le coût unitaire d'impression est de 5 $. Le prix de vente est fixé à 14 $. Combien d'exemplaire du roman la compagnie d'édition devra-t-elle vendre avant de réaliser un profit unitaire de 4 $ l'unité ?

Note : $Profit\ à\ l'unité = \frac{Profit\ \ total}{nombre\ \ d'unité}$

x : Nb d'unité

Profit total = Profit − coût

$= (14-5)x - 20\,000$

$= 9x - 20\,000$

Donc profit à l'unité = $\frac{9x - 20\,000}{x}$

x = ? si profit à l'unité = 4

$$4 = \frac{9x - 20\,000}{x}$$

$$\begin{aligned} &{\scriptstyle -9x} \qquad\quad {\scriptstyle -9x} \\ &4x = 9x - 20\,000 \end{aligned}$$

$$\frac{-5x}{-5} = \frac{-20\,000}{-5}$$

$x = 4\,000$

Elle devra vendre 4000 unités.

#2 Un artisan soit investir 2000$ pour acheter l'équipement nécessaire à la fabrication de paniers d'osier. Par la suite, la production de chaque panier lui coûte 5 $.

a) Quelle est la règle de la fonction rationnelle qui permet de calculer le coût moyen de production par panier produit ?

x : Nombre de panier

y : Coût moyen par panier

$$y = \frac{2000 + 5x}{x}$$

$$y = \frac{2000}{x} + \frac{5x}{x}$$

$$y = \frac{2000}{x} + 5$$

b) Quelle est l'équation de l'asymptote horizontale de cette fonction ? Que représente-t-elle dans ce contexte ?

$y = 5$ le coût moyen par panier ne sera jamais inférieur ou égal à 5 $.

(Un panier ne coûtera jamais moins de 5 $ à produire!)

c) Si le coût moyen par panier produit est de 15 $, combien de paniers ont été produits ?

$$\overset{-5}{15} = \frac{2000}{x} + 5 \quad -5$$

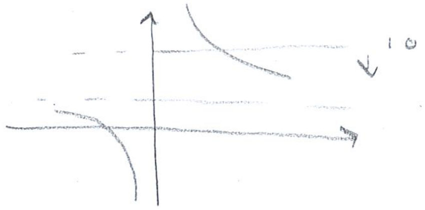
$$10 = \frac{2000}{x}$$

$$\frac{10x}{10} = \frac{2000}{10}$$

$$x = 200$$

Rép: 200 paniers.

d) Minimalement, combien de paniers l'artisan doit-il produire pour que le coût moyen de production par panier soit inférieur à 10 $?



$$\frac{2000}{x} + \overset{-5}{5} = 10 \quad -5$$

$$\frac{2000}{x} = 5$$

$$\frac{2000}{5} = \frac{5x}{5}$$

$$400 = x$$

Il doit produire plus de 400 paniers donc 401 paniers!

Opérations sur les fonctions

Exercices :

#1 Les règles des fonctions f et g sont $f(x) = 3x - 2$ et $g(x) = 5x + 7$. Déterminez la règle, sous la forme canonique, des nouvelles fonctions résultant de l'opération indiquée :

a) $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x - 2}{5x + 7}$

$$\begin{array}{r|l} 3x - 2 & 5x + 7 \\ \hline -\;3x + 21/5 & 3/5 \text{ reste } -31/5 \\ \hline -31/5 & \end{array}$$

$$h(x) = \frac{-31/5}{5(x + 7/5)} + \frac{3}{5}$$

$$h(x) = \frac{-31/25}{x + 7/5} + \frac{3}{5}$$

b) $j(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{5x + 7}{3x - 2}$

$$\begin{array}{r|l} 5x + 7 & 3x - 2 \\ \hline -\;5x - 10/3 & 5/3 \text{ reste } 31/3 \\ \hline 31/3 & \end{array}$$

$$j(x) = \frac{31/3}{3(x - 2/3)} + \frac{5}{3}$$

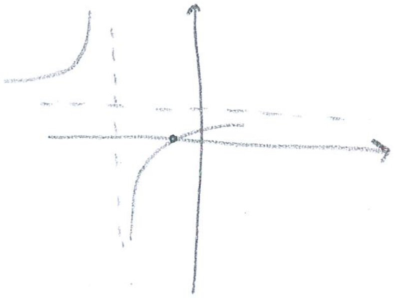
$$j(x) = \frac{31/9}{x - 2/3} + \frac{5}{3}$$

#2 Soit $g(x) = x + 3$ et $f(x) = x - 2$ si $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, pour quelles valeurs de x a-t-on $h(x) \leq 0$?

$$h(x) = \frac{x - 2}{x + 3}$$

$$\begin{array}{r|l} x - 2 & x + 3 \\ \hline -\;x + 3 & 1 \text{ reste } -5 \\ \hline -5 & \end{array}$$

$$h(x) = \frac{-5}{x + 3} + 1$$



$$\frac{x - 2}{x + 3} = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Donc $x \in]-3, 2]$

#3 Voici deux fonctions : $f(x) = \frac{-4}{x + 2}$ et $g(x) = \frac{3x}{2x + 4}$

Établissez la règle de la fonction correspondant à

a) $f + g$ $= \frac{-4 \cdot 2}{(x+2) \cdot 2} + \frac{3x}{2x+4}$

$= \frac{-8}{2x+4} + \frac{3x}{2x+4}$

$= \frac{3x - 8}{2x+4}$ ou $\frac{3/2\, x - 4}{x + 2}$

b) $f \cdot g$ $= \frac{-4}{x+2} \cdot \frac{3x}{2x+4}$

$= \frac{-4}{x+2} \cdot \frac{3x}{2(x+2)}$

$= \frac{-12x}{2(x+2)^2}$

$= \frac{-6x}{(x+2)^2}$