Réciproque d'une fonction valeur absolue :

Exemple : Trace le graphique de la fonction suivante ainsi que celui de sa réciproque :

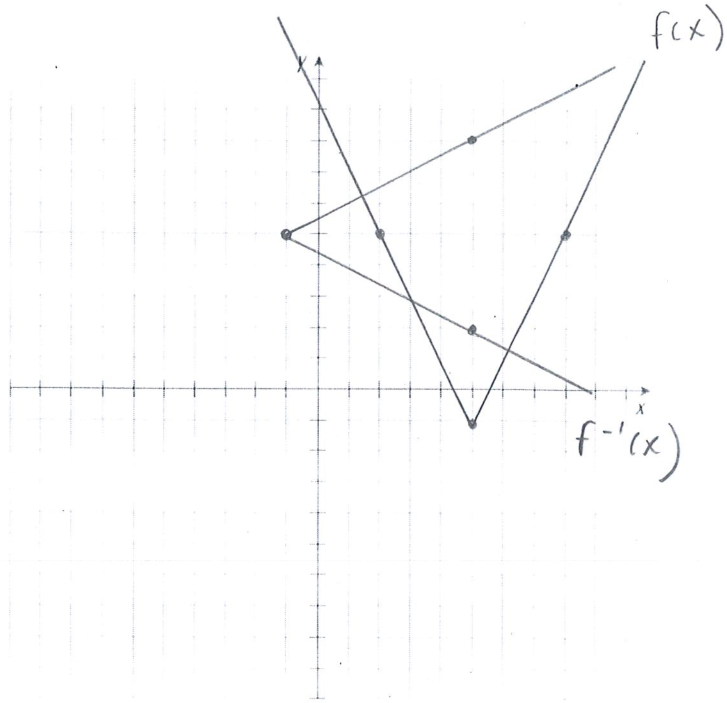
$$f(x) = 2|x - 5| - 1$$

$f(x)$

x	$f(x)$
0	9
2	5
5	-1
8	5
10	9

$f^{-1}(x)$

x	$f^{-1}(x)$
9	0
5	2
-1	5
5	8
9	10



Note : La réciproque d'une fonction valeur absolue n'est pas une fonction, vous n'aurez donc pas à trouver sa règle.

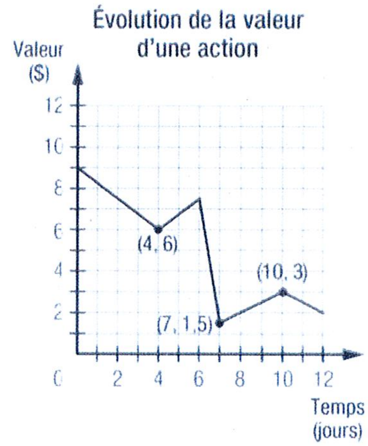
Résolution de problèmes :

Rappel :

1. Identifier les variables
2. Trouver la règle ou l'équation
3. Tracer l'esquisse du graphique
4. Définir les restrictions s'il y a lieu
5. Répondre aux questions

Exercices

#1 Le graphique ci-dessous fournit les renseignements concernant la valeur d'une action en bourse.



L'évolution de la valeur de l'action dans les intervalles [0, 6] et [7, 30] peut être modélisée par deux fonctions valeurs absolues.

a) Quelle était la valeur de l'action au 6^e jour ?

1) Règle : [0, 6]
Sommet (4, 6) et Pt (0, 9)

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9-6}{0-4} = \frac{3}{4}$

$f(x) = \frac{3}{4}|x-4| + 6$

2) $f(6) = \frac{3}{4}|6-4| + 6$

$= 7{,}50$ $

Donc 7,50 $ au 6^e jour

b) À quels moments la valeur de l'action sera-t-elle de 2 $?

1) Règle : [6, 7)
(6, 7,50 $) et (7, 1,5)

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1{,}5 - 7{,}50}{7-6} = -6$

$y = -6x + b$

$1{,}5 = -6 \cdot 7 + b$

$1{,}5 = -42 + b$

$43{,}5 = b$

Donc $g(x) = -6{,}25x + 45{,}25$

2) $2 = -6x + 43{,}5$

$\frac{-43{,}25}{-6{,}25} = \frac{-6{,}25x}{-6{,}25}$

$6{,}92 = x$ la réponse reste bonne

3) Règle [7, 30] a −

$a = \frac{3-1{,}5}{10-3} = \frac{1{,}5}{3} = 0{,}5$

Donc $h(x) = -0{,}5|x-10| + 3$

4) $-0{,}5|x-10| + 3 - 3 = 2 - 3$

$\frac{-0{,}5|x-10|}{-0{,}5} = \frac{-1}{-0{,}5}$

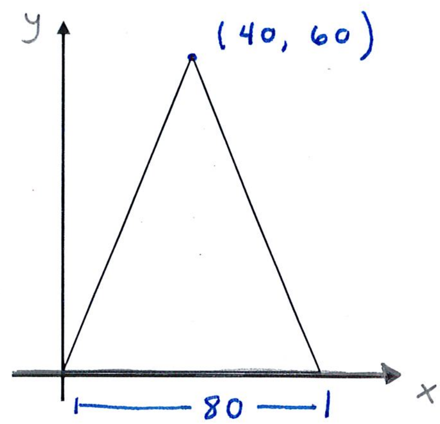
$|x-10| = 2$

$x - 10 + 10 = 2 + 10$ $x - 10 + 10 = -2 + 10$

$x = 12$ $x = 8$

Rép : $x \in \{6{,}92,\ 8,\ 10\}$

#2 Une coupe transversale d'une digue est représentée ci-contre. La largeur de la digue à sa base est de 80 m et sa hauteur maximale, de 60 m. Quelle est la largeur de la digue à une hauteur de 48 m ?



1) x : largeur de la digue (m)
y : hauteur de la digue (m)

2) Sommet :

$h = \frac{0+80}{2} = 40$ Donc (40, 60)

3) Trouve a : (0, 0) et (40, 60)

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{60-0}{40-0} = \frac{3}{2}$ comme $a < 0$ alors $-3/2$

Règle : $f(x) = -\frac{3}{2}|x - 40| + 60$

4) $f(x) = 48$

$-\frac{3}{2}|x - 40| + 60 \underset{-60}{=} 48 - 60$

$\cdot -2/3$

$-\frac{3}{2}|x - 40| = -12 \cdot -\frac{2}{3}$

$|x - 40| = 8$

$x - 40 \overset{+40}{=} 8 + 40$ $\qquad$ $x - 40 \overset{+40}{=} -8 + 40$

$x = 48$ $\qquad$ $x = 32$

Donc la largeur sera de $48 - 32 = 16$ m à une hauteur de 48 m.

#3 Lors d'une journée d'été particulièrement chaude, la température observée à l'extérieur est décrite par la règle suivante :

$$t(x) = -3|x-6| + 36$$

Où x est le nombre d'heures écoulées depuis le lever du soleil

t(x) est la température extérieure

Pour rendre plus confortable la température intérieure d'un centre d'achat un système de climatisation démarre lorsque la température extérieure atteint les 21° C et s'arrête lorsque la température extérieure est de 20 ° C. Pendant combien de temps le système de climatisation a-t-il été en opération durant cette journée ?

Sommet : (6, 36)

a − : ∧

1) $t(x) = 21$

$-3|x-6| + 36 \overset{-36}{=} 21 - 36$

$\frac{-3|x-6|}{-3} = \frac{-15}{-3}$

$|x-6| = 5$

$x - 6 \overset{+6}{=} 5 + 6$ $\quad$ $x - 6 \overset{+6}{=} -5 + 6$

$x = 11$ à rejeter $\quad$ $x = 1$

2) $t(x) = 20$

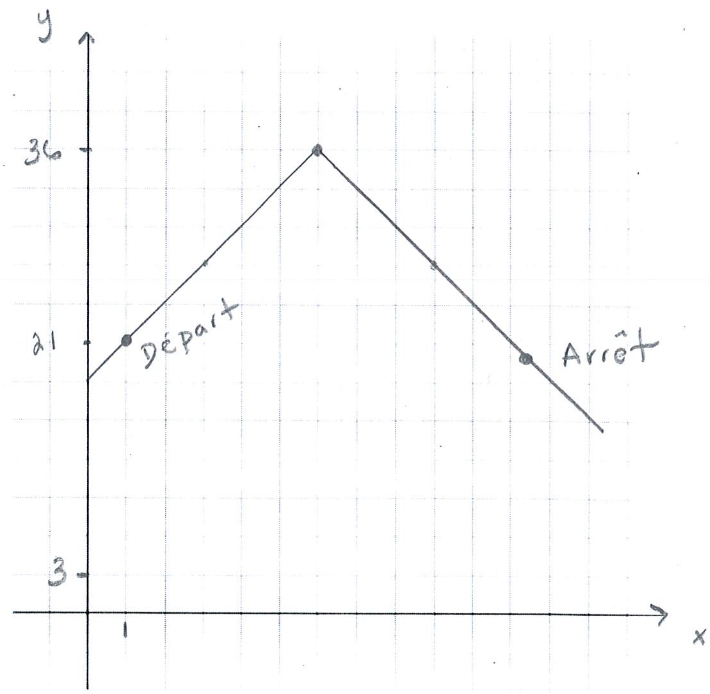
$-3|x-6| + 36 \overset{-36}{=} 20 - 36$

$\frac{-3|x-6|}{-3} = \frac{-16}{-3}$

$|x-6| = \frac{16}{3}$

$x - 6 \overset{+6}{=} \frac{16}{3} + 6$ $\quad$ $x - 6 \overset{+6}{=} -\frac{16}{3} + 6$

$x = \frac{34}{3}$ $\quad$ $x = \frac{2}{3}$ à rejeter



3) Durée $= \frac{34}{3} - 1$

$= \frac{31}{3} = 10,\bar{3}$

Donc 10 heures 20 minutes

Opérations sur les fonctions

Composition de fonctions :

Il est possible d'appliquer une fonction à une autre fonction. La composée de la fonction f suivie de la fonction g se note $g°f$ *ou* $g(f(x))$

La règle $g°f$ s'obtient en substituant à la variable indépendante de la fonction g l'expression représentant la variable dépendante de la fonction f.

Exemple : Si $f(x) = 3x + 4$ et $g(x) = 5x$

$alors\ g(f(x)) = 5(3x + 4)$

$= 15x + 20$

Exercices

#1 La fonction $v(t) = 331\sqrt{1 + \frac{t}{273}}$ permet de calculer la vitesse du son en fonction de la température de l'air en degrés Celsius. La fonction $K = t + 273$ permet de convertir cette température en degrés Kelvin pour certain gaz. Détermine une relation qui permet de convertir la vitesse du son en fonction de la température en degrés Kelvin.

Nous cherchons $V(k)$

$k = t + 273$ donc $t = k - 273$

$$V(k) = 331\sqrt{1 + \frac{k - 273}{273}}$$

$$V(k) = 331\sqrt{1 + \frac{k}{273} - \frac{273}{273}}$$

$$V(k) = 331\sqrt{\frac{k}{273}}$$

#2 La température observée à 6 heures à Rouyn entre le 1[er] et le 21 septembre est donnée par l'équation $t(x) = -\frac{5}{4}|x-9| + 12$ où x correspond au nombre de jours écoulés pendant le mois de septembre et *t(x)*, la température en degrés Celsius. La règle permettant de convertir des Celsius en degrés Fahrenheit est $f(t) = \frac{9}{5}t + 32$ où t est la température en degrés Celsius et F, la température en Fahrenheit. Trouve la règle qui donne la température en degrés Fahrenheit, observée à Rouyn.

Nous cherchons $F(t(x))$

$$F(t(x)) = \frac{9}{5}\left(\frac{-5}{4}|x-9| + 12\right) + 32$$

$$F(t(x)) = \frac{-9}{4}|x-9| + \frac{108}{5} + 32$$

$$F(t(x) = \frac{-9}{4}|x-9| + \frac{268}{5}$$

Fonction rationnelle

Une fonction dont la règle est de la forme $f(x) = \frac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2}$, où le numérateur et le dénominateur sont non nuls et $a_2 \neq 0$, est appelée une fonction rationnelle (en passant cette forme est appelée forme générale ou forme homographique). Comme pour toutes les autres fonctions, c'est la forme canonique qui nous intéresse ! Alors pour passer de la forme générale à cette forme : $f(x) = \frac{a}{b(x-h)} + k$, effectuons la division. Nous nous rapprochons ainsi de la forme canonique qui est $\boxed{f(x) = \frac{a}{x-h} + k}$

Exemple : Transforme la règle de la fonction $f(x) = \frac{3x+5}{x-1}$ sous sa forme canonique.

Exemple facile !

$$\begin{array}{r|l} 52 & 10 \\ -50 & 5 \text{ reste } 2 \\ \hline 2 & \end{array}$$

Donc $\frac{52}{10} = 5 + \frac{2}{10}$

$$\begin{array}{r|l} 3x+5 & x-1 \\ -(3x-3) & 3 \text{ reste } 8 \\ \hline 8 & \end{array}$$

Donc $\frac{3x+5}{x-1} = 3 + \frac{8}{x-1}$

ou

$f(x) = \frac{8}{x-1} + 3$

Exercices : Écrivez chacune des règles suivantes sous la forme canonique :

a) $f(x) = \frac{x+5}{x}$

$$\begin{array}{r|l} x+5 & x \\ -x & 1 \text{ reste } 5 \\ \hline 5 & \end{array}$$

Donc $f(x) = \frac{5}{x} + 1$

b) $f(x) = \frac{6x+12}{2x+5}$

$$\begin{array}{r|l} 6x+12 & 2x+5 \\ -(6x+15) & 3 \text{ reste } -3 \\ \hline -3 & \end{array}$$

$f(x) = \frac{-3}{2x+5} + 3$

Forme canonique :

$f(x) = \frac{-3}{2(x+5/2)} + 3$

donc $f(x) = \frac{-3/2}{x+5/2} + 3$

c) $f(x) = \dfrac{x}{2-3x}$

$$\begin{array}{r|l} x & -3x+2 \\ \hline -\left(x - \frac{2}{3}\right) & -\frac{1}{3} \text{ reste } \frac{2}{3} \\ \hline \frac{2}{3} & \end{array}$$

$$f(x) = \frac{\frac{2}{3}}{-3x+2} - \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \frac{2/3}{-3(x-2/3)} - \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \frac{-2/9}{x-2/3} - \frac{1}{3}$$

d) $f(x) = \dfrac{8-x}{7x+2}$

$$\begin{array}{r|l} -x+8 & 7x+2 \\ \hline -\left(-x - 2/7\right) & -1/7 \text{ reste } 58/7 \\ \hline 58/7 & \end{array}$$

$$f(x) = \frac{58/7}{7x+2} - \frac{1}{7}$$

$$f(x) = \frac{58/7}{7(x+2/7)} - \frac{1}{7}$$

$$f(x) = \frac{58/49}{x+2/7} - \frac{1}{7}$$

e) $f(x) = \dfrac{16-3x}{3x+1}$

$$\begin{array}{r|l} -3x+16 & 3x+1 \\ \hline -\left(-3x - 1\right) & -1 \text{ reste } 17 \\ \hline 17 & \end{array}$$

$$f(x) = \frac{17}{3x+1} - 1$$

$$f(x) = \frac{17}{3(x+1/3)} - 1$$

$$f(x) = \frac{17/3}{x+1/3} - 1$$

f) $f(x) = \dfrac{x+5}{0.75x+4}$

$$\begin{array}{r|l} x+5 & 0{,}75x+4 \\ \hline -\left(x + 16/3\right) & 4/3 \text{ reste } -1/3 \\ \hline -1/3 & \end{array}$$

$$f(x) = \frac{-1/3}{\frac{3}{4}x+4} - \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \frac{-1/3}{3/4\,(x+16/3)} - \frac{1}{3}$$

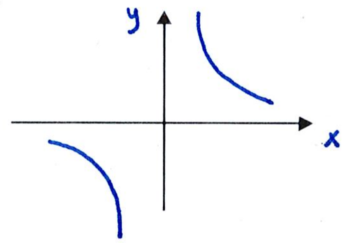
$$f(x) = \frac{-4/9}{x+16/3} - \frac{1}{3}$$

Représentation graphique d'une fonction rationnelle

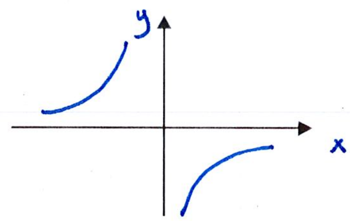
Dans la représentation graphique d'une fonction rationnelle dont la règle s'écrit

$f(x) = \frac{a}{x-h} + k$:

- La courbe, nommée hyperbole, est formée de deux branches symétriques.
- Les droites d'équations $x = h$ et $y = k$ constituent les asymptotes de la courbe. (Une droite de laquelle une courbe se rapproche de plus en plus sans jamais y toucher s'appelle une asymptote !)
- Les coordonnées du point d'intersection des deux asymptotes est (h, k)
- Si $a > 0$ alors la fonction est décroissante :



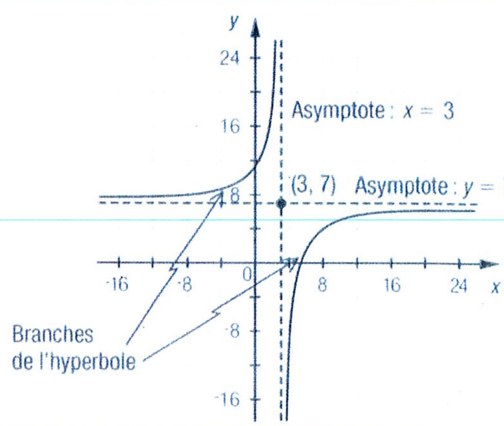
Si $a < 0$ alors la fonction est croissante :



Ex. :

<table>
<tr><th>Règle</th><th>Table de valeurs</th><th>Représentation graphique</th></tr>
<tr><td>$f(x) = \frac{-10}{x-3} + 7$</td><td>

x	y
-7	8
-2	9
3	Indéfinie
5	2
8	5
13	6

</td><td>
</td></tr>
</table>

Exercices : Dans chaque cas, déterminez les équations des asymptotes de la fonction rationnelle

a) $f(x) = \frac{8}{4x + 2}$

$f(x) = \frac{8}{4(x + 2/4)}$

Donc $x = -\frac{1}{2}$

$y = 0$

b) $g(x) = \frac{21}{7x - 3} - 4$

$g(x) = \frac{21}{7(x - 3/7)} - 4$

Donc $x = 3/7$

$y = -4$

c) $h(x) = \frac{5}{-3x + 2} + \frac{1}{3}$

$h(x) = \frac{5}{-3(x - 2/3)} + \frac{1}{3}$

donc $x = 2/3$

$y = 1/3$

d) $i(x) = \frac{2x}{x + 3} - \frac{1}{1} \cdot \frac{(x+3)}{(x+3)}$

$i(x) = \frac{2x - x - 3}{x + 3}$

$i(x) = \frac{x - 3}{x + 3}$

$$\begin{array}{r|l} x - 3 & x + 3 \\ \hline -(x + 3) & 1 \text{ reste } -6 \\ -6 & \end{array}$$

$i(x) = \frac{-6}{x + 3} + 1$

donc $x = -3$

$y = 1$

e) $j(x) = \frac{3x + 2}{x - 1}$

$$\begin{array}{r|l} 3x + 2 & x - 1 \\ \hline -(3x - 3) & 3 \text{ reste } 5 \\ 5 & \end{array}$$

$j(x) = \frac{5}{x - 1} + 3$

donc $x = 1$

$y = 3$

f) $k(x) = \frac{9 - 5x}{2x + 1}$

$$\begin{array}{r|l} -5x + 9 & 2x + 1 \\ \hline -(-5x - 5/2) & -5/2 \text{ reste } 23/2 \\ 23/2 & \end{array}$$

$k(x) = \frac{23/2}{2(x + 1/2)} - \frac{5}{2}$

donc $x = -1/2$

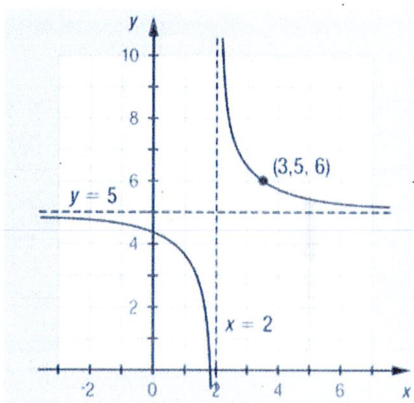
$y = -5/2$

Recherche de la règle d'une fonction rationnelle :

Étapes :

1. Trouver les coordonnées du point d'intersection des asymptotes et celles d'un point de la courbe.
2. Substituer les coordonnées du point d'intersection des asymptotes à h et à k ainsi que les coordonnées d'un point de la courbe à x et à y dans la règle $y = \frac{a}{x-h} + k$.
3. Résoudre l'équation formée afin de déterminer la valeur du paramètre a.
4. Écrire la règle de la fonction obtenue.

Exemple : Trouve la règle de cette fonction rationnelle :



(2, 5) et (3,5 , 6)
h k x y

$y = \frac{a}{x-h} + k$

$6^{-5} = \frac{a}{3,5-2} + 5^{-5}$

$1^{\cdot 1,5} = \frac{a}{1,5} \cdot 1,5$

$1,5 = a$

Donc $y = \frac{1,5}{x-2} + 5$

Exercice : Dans chaque cas, déterminez la règle de la fonction rationnelle à l'aide des renseignements donnés.

a) Les coordonnées du point d'intersection des asymptotes sont (-3, 2) et la courbe passe pas le point (1, 3).

h k

x y

$y = \frac{a}{x-h} + k$

$3^{-2} = \frac{a}{1+3} + 2^{-2}$

$1 = \frac{a}{4}$

$a = 4$

Donc $f(x) = \frac{4}{x+3} + 2$