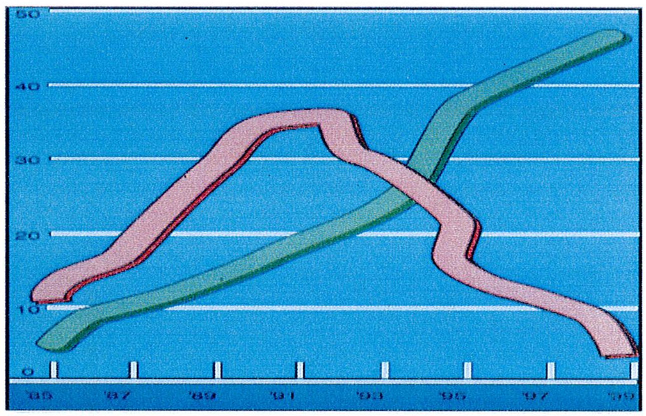
Les fonctions réelles



ATHÉMATIQUE SN5

Fonction racine carrée :

La réciproque d'une fonction polynomiale de degré 2 correspond à une relation définie par deux fonctions racines carrées

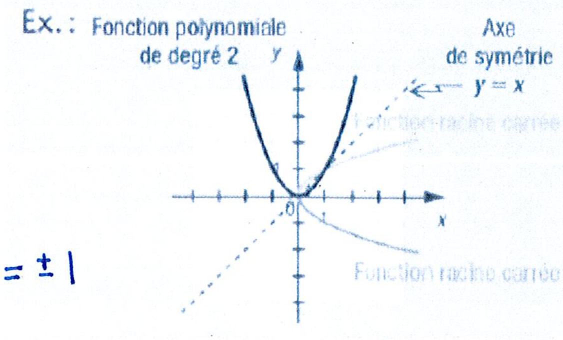
La règle d'une fonction racine carrée peut s'écrire sous la forme $f(x) = a\sqrt{b(x-h)}$ +k, où a $\neq 0$ *et* $b \neq 0$.

Toutefois, les propriétés des radicaux permettent de transformer cette règle sous **la forme canonique** :

$$\boxed{f(x) = a\sqrt{\pm(x-h)} + k}$$

$b = \pm 1$

Ex. :



Exercices :

Écrivez la règle sous la forme canonique, de chacune des fonctions racines carrées suivantes :

a) $f(x) = \sqrt{4x-2} + 3$

$f(x) = \sqrt{4(x - 2/4)} + 3$

$f(x) = \sqrt{4}\sqrt{x - \frac{1}{2}} + 3$

$f(x) = 2\sqrt{x - \frac{1}{2}} + 3$

b) $f(x) = 2\sqrt{-9x+18} - 5$

$f(x) = 2\sqrt{-9(x-2)} - 5$

$f(x) = 2\sqrt{9}\sqrt{-(x-2)} - 5$

$f(x) = 6\sqrt{-(x-2)} - 5$

c) $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{36x-4} + 1$

$f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{36(x - 4/36)} + 1$

$f(x) = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{x - \frac{1}{9}} + 1$

$f(x) = 2\sqrt{x - 1/9} + 1$

d) $f(x) = -7(\sqrt{4x+6} + 7)$

$f(x) = -7(\sqrt{4(x + 6/4)} + 7)$

$f(x) = -7(2\sqrt{x + 3/2} + 7)$

$f(x) = -14\sqrt{x + 3/2} - 49$

e) $f(x) = -\frac{2}{5}\sqrt{-100x-5} + \frac{3}{4}$

$f(x) = -\frac{2}{5}\sqrt{-100(x + 5/100)} + \frac{3}{4}$

$f(x) = \frac{-2}{5} \cdot 10\sqrt{-(x + 5/100)} + \frac{3}{4}$

$f(x) = -4\sqrt{-(x + 1/20)} + 3/4$

f) $f(x) = -\frac{2}{3}(\sqrt{-3x+27} - \frac{1}{6})$

$f(x) = \frac{-2}{3}\left(\sqrt{-3(x-9)} - \frac{1}{6}\right)$

$f(x) = \frac{-2}{3}\left(\sqrt{3}\sqrt{-(x-9)} - \frac{1}{6}\right)$

$f(x) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{-(x-9)} + \frac{2}{18}$

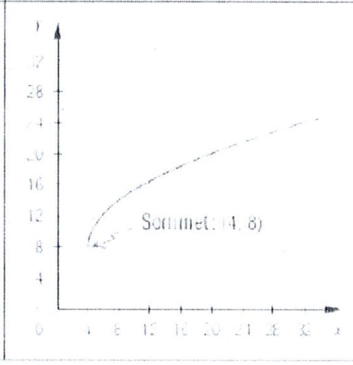
$f(x) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{-(x-9)} + \frac{1}{9}$

Représentation graphique de la fonction racine carrée :

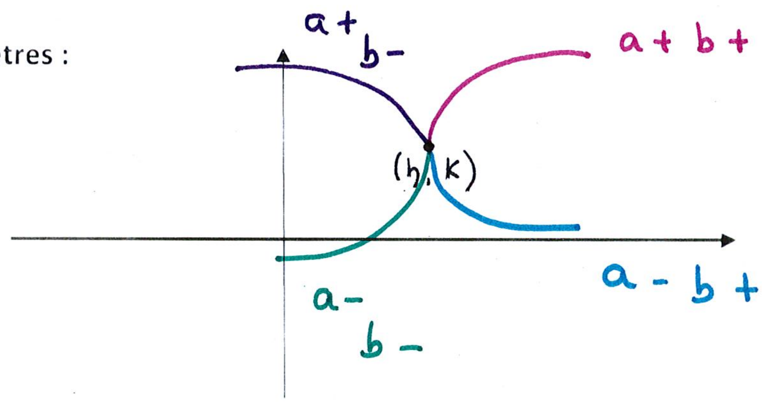
Pour une fonction racine carrée dont la règle s'écrit $f(x) = a\sqrt{\pm(x-h)} + k$, la représentation graphique est une courbe dont **les coordonnées du sommet sont (h, k).**

plus gros →

Ex. :

Règle	Table de valeurs		Représentation graphique
	x	**y**	
$f(x) = 3\sqrt{x-4}+8$	4	8	
Sommet	5	11	
(4, 8)	8	14	
a +	13	17	
b +	20	20	
	29	23	

Rôle des paramètres :



En résumé :

- Trouve et place ton sommet
- Le paramètre *a* provoque une symétrie d'axe des abscisses
- Le paramètre *b* provoque une symétrie d'axe des ordonnées

Remarque :

- Si a et k sont de même signe, il n'y a aucun zéro
- Si b et h sont de même signe, il n'y a aucune ordonnée à l'origine

enlevé !

Propriétés :

Domaine : ____________________

Image : ____________________

Variation : ____________________

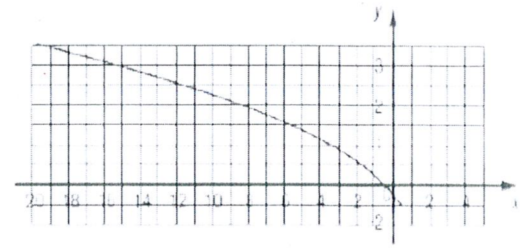
Extremum : ____________________

* Mettre sous la forme canonique !

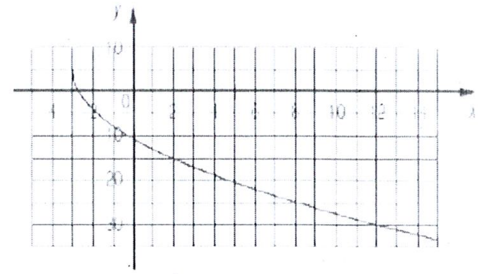
Exercices : #1 Déterminez la représentation graphique associée à chacune des règles ci-dessous.

Graphique

(1)

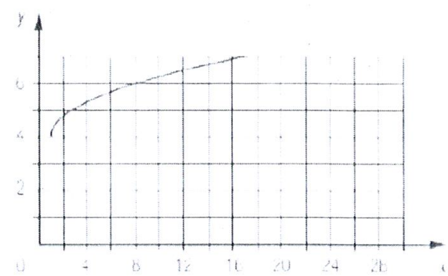


(2)

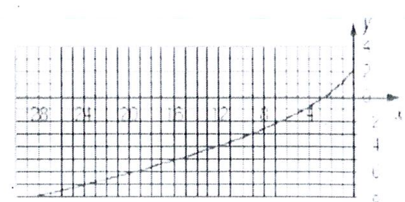


(3)

(4)



(5)



a) $k(x) = -3\sqrt{9x+27} + 5$

$k(x) = -3\sqrt{9(x+3)} + 5$

$k(x) = -9\sqrt{(x+3)} + 5$

Sommet: $(-3, 5)$

a − b +

(2)

b) $l(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x-1} + 4$

Sommet: $(1, 4)$

a +

b +

(4)

c) $p(x) = -\sqrt{-5x+3} + 4$

$p(x) = -\sqrt{-5(x - 3/5)} + 4$

$p(x) = -\sqrt{5}\sqrt{-(x - 3/5)} + 4$

Sommet: $(3/5, 4)$

a −

b −

(5)

d) $q(x) = 5\sqrt{-25x - 25} + 10$

$q(x) = 5\sqrt{-25(x+1)} + 10$

$q(x) = 25\sqrt{-(x+1)} + 10$

Sommet : $(-1, 10)$

a +

b −

(3)

e) $r(x) = \frac{1}{2}\sqrt{-4x+2} - 1$

$r(x) = \frac{1}{2}\sqrt{-4(x - 2/4)} - 1$

$r(x) = 1\sqrt{-(x - 1/2)} - 1$

Sommet: $(1/2, -1)$

a +

b −

(1)

#2 Déterminez les coordonnées de l'extremum de chacune des fonctions racines carrées suivantes et précisez s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

a) $f(x) = 5\sqrt{x-6} + 3$

Sommet : $(6, 3)$

a + b +

Donc min à $(6, 3)$

b) $g(x) = -\sqrt{3\left(x + \frac{5}{3}\right)} - \frac{2}{3}$

$g(x) = -\sqrt{3}\sqrt{x + 5/3} - 2/3$

sommet : $(-5/3, -2/3)$

a − b +

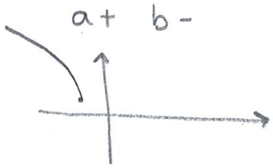
Donc max à $(-5/3, -2/3)$

c) $h(x) = \frac{3}{7}\sqrt{-(8x-4)} + 1$

$h(x) = \frac{3}{7}\sqrt{-8(x + 4/8)} + 1$

Sommet : $(-1/2, 1)$

a + b −



Donc min à $(-1/2, 1)$

d) $i(x) = -2\sqrt{-9x+3} - 2$

$i(x) = -2\sqrt{-9(x - 3/9)} - 2$

$i(x) = -6\sqrt{-(x - 1/3)} - 2$

sommet : $(1/3, -2)$

a − b −

Donc max à $(1/3, -2)$

Recherche de la règle d'une fonction racine carrée :

Étapes :

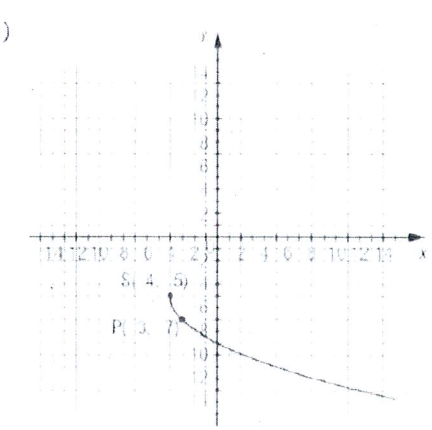
1. Trouver les coordonnées du sommet et celles d'un autre point de la courbe.
2. D'après l'orientation de la courbe, déduire si la règle recherchée est de la forme :

$f(x) = a\sqrt{x-h} + k$ ou $f(x) = a\sqrt{-(x-h)} + k$

3. Substituer les coordonnées du sommet à h et à k ainsi que les coordonnées d'un autre point de la courbe à x et à y dans la règle.
4. Résoudre l'équation formée afin de déterminer la valeur du paramètre a.
5. Écrire la règle de la fonction obtenue.

Exemple :

a)



Sommet $(-4, -5)$ (h, k) Pt $(-3, -7)$ (x, y) a − b +

donc $f(x) = a\sqrt{x-h} + k$

$-7 = a\sqrt{-3 - -4} - 5$ (+5, +5)

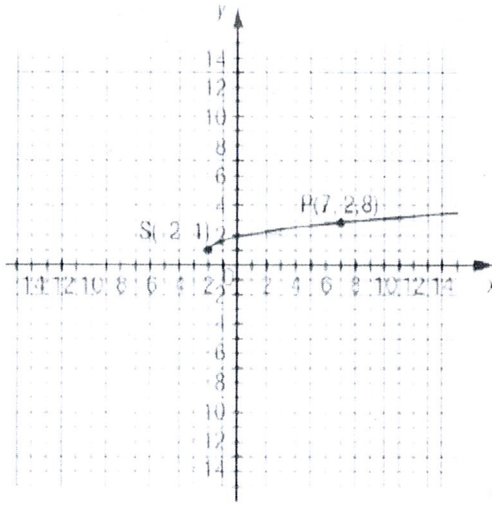
$-2 = a\sqrt{1}$

$\frac{-2}{1} = \frac{a \cdot 1}{1}$ $a = -2$

Rép : $f(x) = -2\sqrt{x+4} - 5$

Exercice : Dans chaque cas, établissez la règle de la fonction représentée.

a)



Sommet : $(\overset{h}{-2}, \overset{k}{1})$ pt $(\overset{x}{7}, \overset{y}{2{,}8})$ a + b +

$f(x) = a\sqrt{(x-h)} + k$

$2{,}8^{-1} = a\sqrt{7 - -2} + 1^{-1}$

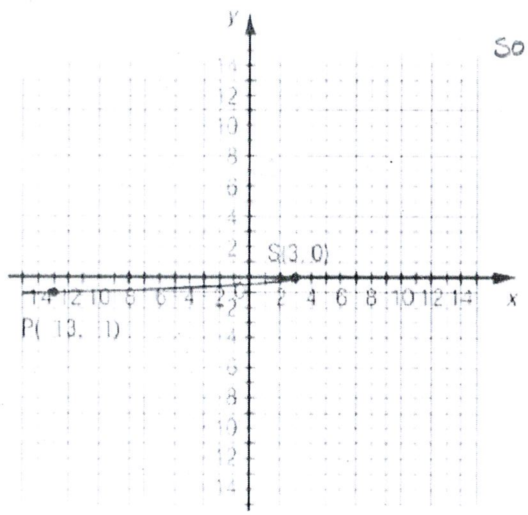
$1{,}8 = a\sqrt{9}$

$\frac{1{,}8}{3} = \frac{a \cdot 3}{3}$

$0{,}6$ ou $\frac{3}{5} = a$

Rép : $f(x) = \frac{3}{5}\sqrt{x+2} + 1$

b)



Sommet : $(\overset{h}{3}, \overset{k}{0})$ pt $(\overset{x}{-13}, \overset{y}{-1})$ a − b −

$y = a\sqrt{-(x-h)} + k$

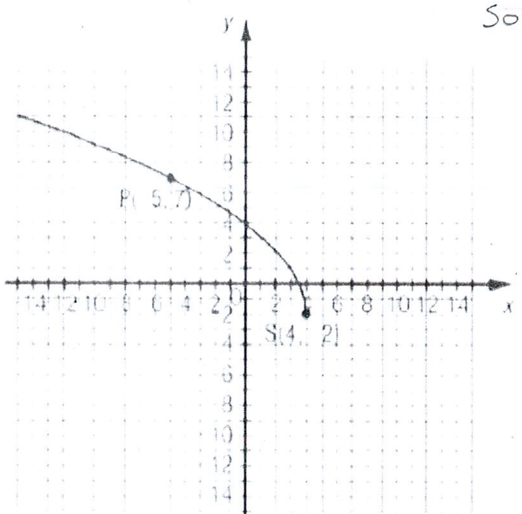
$-1 = a\sqrt{-(-13-3)} + 0$

$-1 = a\sqrt{16}$

$\frac{-1}{4} = \frac{a \cdot 4}{4}$

$-\frac{1}{4} = a$ Rép : $f(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{-(x-3)}$

c)



Sommet : $(\overset{h}{4}, \overset{k}{-2})$ pt $(\overset{x}{-5}, \overset{y}{7})$ a + b −

$f(x) = a\sqrt{-(x-h)} + k$

$7^{+2} = a\sqrt{-(-5-4)} - 2^{+2}$

$9 = a\sqrt{9}$

$\frac{9}{3} = \frac{a \cdot 3}{3}$

$3 = a$

Rép : $f(x) = 3\sqrt{-(x-4)} - 2$

Résolution d'une équation racine carrée à une variable :

Étapes :

1. Obtenir une équation dans laquelle l'un des membres est formé d'un radical et l'autre, d'un terme constant. **Attention, la résolution ne peut se poursuivre que si le terme constant est positif.**
2. Poursuivre la résolution en élevant au carré chaque membre de l'équation afin d'éliminer le radical et de résoudre l'équation obtenue.

Exemple :

Résoudre : $3\sqrt{2x-14} - 5 \overset{+5}{=} 1 + 5$

$$\frac{3\sqrt{2x-14}}{3} = \frac{6}{3}$$

$$\left(\sqrt{2x-14}\right)^2 = 2^2$$

$$2x - 14 \overset{+14}{=} 4 + 14$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{18}{2} \qquad x = 9$$

Exercice : Résous les équation suivantes

a) $-3\sqrt{2-4x} + 5 \overset{-5}{=} 0 - 5$

$$\frac{-3\sqrt{2-4x}}{-3} = \frac{-5}{-3}$$

$$\left(\sqrt{2-4x}\right)^2 = (5/3)^2$$

$$2 - 4x \overset{-2}{=} \frac{25}{9} - 2$$

$$-4x = \frac{25}{9} - \frac{18}{9}$$

$$\frac{-4x}{-4} = \frac{7}{9} \div -4$$

$$x = -\frac{7}{36}$$

b) $-2\sqrt{4-3x} + 14 \overset{-14}{=} 6 - 14$

$$\frac{-2\sqrt{4-3x}}{-2} = \frac{-8}{-2}$$

$$\left(\sqrt{4-3x}\right)^2 = 4^2$$

$$4 - 3x \overset{-4}{=} 16 - 4$$

$$\frac{-3x}{-3} = \frac{12}{-3}$$

$$x = -4$$

c) $\frac{1}{4}\sqrt{9x+36} \overset{\cdot 4/1}{=} -1 \cdot \frac{4}{1}$

$$\sqrt{9x+36} = -4$$

aucune solution !

d) $\frac{1}{4}\sqrt{-4x+3} - 9 \overset{+9}{=} -4 + 9$

$$\frac{1}{4}\sqrt{-4x+3} = 5 \cdot 4$$

$$\left(\sqrt{-4x+3}\right)^2 = 20^2$$

$$-4x + 3 \overset{-3}{=} 400 - 3$$

$$\frac{-4x}{-4} = \frac{397}{-4}$$

$$x = -99{,}25$$

Résolution d'une inéquation racine carrée à une variable :

Étapes :

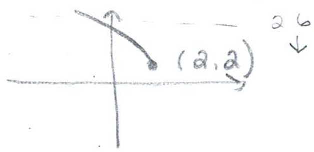
1. Transforme l'inéquation en équation.
2. Trace l'esquisse du graphique.
3. Résous l'équation et en te servant de l'esquisse trouve l'ensemble-solution !

Exemple : Résoudre $4\sqrt{4-2x}+2 < 26$

$4\sqrt{-2(x-2)} + 2 = 26$

$4\sqrt{2}\,\sqrt{-(x-2)} + 2 = 26$

Sommet : (2,2) a + b −



$4\sqrt{4-2x} + 2 \overset{-2}{} = 26 - 2$

$\frac{4\sqrt{4-2x}}{4} = \frac{24}{4}$

$(\sqrt{4-2x})^2 = 6^2$

$4 - 2x = 36 - 4$

$\frac{-2x}{-2} = \frac{32}{-2}$

$x = -16$

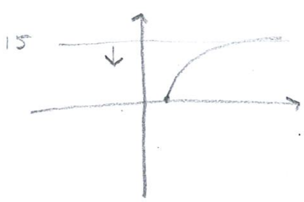
Donc : $x \in]-16, 2]$

Exercice : Résolvez les inéquations suivantes :

a) $15 \geq 3\sqrt{6x-2}$

$3\sqrt{6(x - 2/6)} = 15$

Sommet : (1/3, 0) a + b +



$\frac{15}{3} = \frac{3\sqrt{6x-2}}{3}$

$5^2 = (\sqrt{6x-2})^2$

$25 + 2 = 6x - 2 + 2$

$\frac{27}{6} = \frac{6x}{6}$

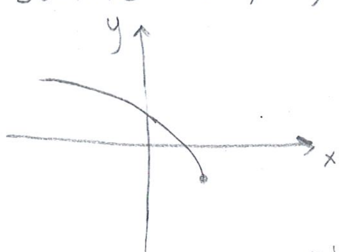
$\frac{9}{2} = x$

Donc $x \in [\frac{1}{3}, \frac{9}{2}]$

b) $12\sqrt{7-x} - 2 \geq -26$

$12\sqrt{-(x-7)} - 2 = -26$

Sommet : (7, −2) a + b −



aucune point de rencontre !

$12\sqrt{7-x} - 2 = -26 + 2$

$\frac{12\sqrt{7-x}}{12} = \frac{-24}{12}$

$\sqrt{7-x} = -2$

Terme constant négatif !

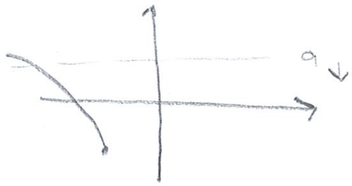
Aucune solution !

voir la note jaune !

c) $\sqrt{-8(x+3)} - 13 < 9$

$\sqrt{8}\,\sqrt{-(x+3)} - 13 = 9$

sommet : $(-3, -13)$ a+ b−



$\sqrt{-8(x+3)} - 13 \overset{+13}{=} 9 + 13$

$\left(\sqrt{-8(x+3)}\right)^2 = 22^2$

$\dfrac{-8(x+3)}{-8} = \dfrac{484}{-8}$

$x + 3 \overset{-3}{=} -60,5 - 3$

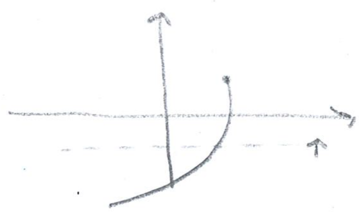
$x = -63,5$

Rép : $x \in \,]-63,5\ ,\ -3]$

d) $-\frac{1}{2} < -\sqrt{-x + \frac{13}{2}} + \frac{5}{2}$

$-\sqrt{-(x - 13/2)} + 5/2 = -\frac{1}{2}$

Sommet : $(13/2\ ,\ 5/2)$ a− b−



$-\sqrt{-x + 13/2} + 5/2 \overset{-5/2}{=} -1/2 - 5/2$

$\dfrac{-\sqrt{-x + 13/2}}{-1} = \dfrac{-3}{-1}$

$\left(\sqrt{-x + 13/2}\right)^2 = 3^2$

$-x + \dfrac{13}{2} \overset{-13/2}{=} 9 - \dfrac{13}{2}$

$-x = \dfrac{5}{2}$

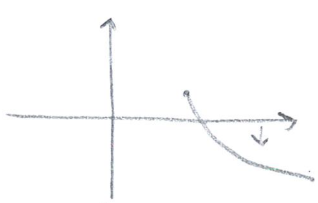
$x = -5/2$

Rép :
$x \in \left]-\dfrac{5}{2}\ ,\ \dfrac{13}{2}\right]$

e) $-2\sqrt{\frac{x}{4} - 1} + 1 \le 0$

$-2\sqrt{\frac{1}{4}(x-4)} + 1 = 0$

sommet : $(4, 1)$ a− b+



$-2\sqrt{\frac{x}{4} - 1} + 1 \overset{-1}{=} 0 - 1$

$\dfrac{-2\sqrt{\frac{x}{4} - 1}}{-2} = \dfrac{-1}{-2}$

$\left(\sqrt{\frac{x}{4} - 1}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$\dfrac{x}{4} - 1 \overset{+1}{=} \dfrac{1}{4} + 1$

$\dfrac{x}{4} \overset{\cdot 4}{=} \dfrac{5}{4} \cdot 4$

$x = 5$

Rép
$x \in [5, \infty[$

Faire l'étude d'une fonction racine carrée :

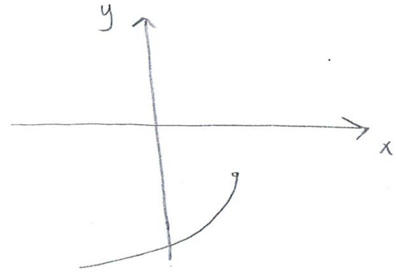
Soit la fonction suivante : $f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{8-4x} - 4$

1) Trace l'esquisse du graphique

$f(x) = \frac{-1}{2}\sqrt{-4(x-2)} - 4$

Sommet : $(2, -4)$

a - b -



2) Domaine : $]-\infty ; 2]$ Image : $]-\infty, -4]$

3) Variation : croissante $x \in]-\infty, 2]$

4) Extremum : maximum à $y = -4$

5) Ordonnée à l'origine :

$f(0) = \frac{-1}{2}\sqrt{8-4\cdot 0} - 4$ Donc $y \approx -5,41$

$f(0) \approx -5,41$

6) Abscisse à l'origine : Aucune abscisse (voir esquisse)

Algébriquement :

$\frac{-1}{2}\sqrt{8-4x} - 4 = 0 \quad +4$

$\frac{-1}{2}\sqrt{8-4x} = 4 \cdot -2$

$\sqrt{8-4x} = -8$ ind !

7) Signe : Négative $x \in]-\infty, 2]$