Soit la fonction suivante : $f(x) = 1 + -2\sqrt{6x-3}$

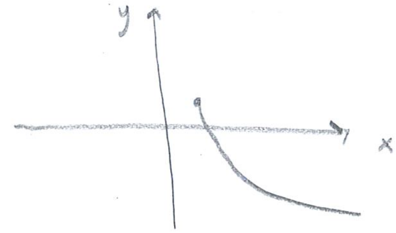
1) Trace l'esquisse du graphique

$f(x) = -2\sqrt{6(x-1/2)} + 1$

$f(x) = -2\sqrt{6}\sqrt{x-1/2} + 1$

Sommet : $(\frac{1}{2}, 1)$

a − b +



2) Domaine : $[\frac{1}{2}, \infty[$ Image : $]-\infty, 1]$

3) Variation : décroissante $x \in [1/2, \infty[$

4) Extremum : max : $y = 1$

5) Ordonnée à l'origine :

Aucune ordonnée

(discriminant négatif !!)

6) Abscisse à l'origine :

$0 = 1 + -2\sqrt{6x-3}$

$\frac{-1}{-2} = \frac{-2\sqrt{6x-3}}{-2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{6x-3}\right)^2$

$6x - 3 = \frac{1}{4}$ $+3$

$\frac{6x}{6} = \frac{13}{4}$ $\div 6$

$x = \frac{13}{24}$

$x = 13/24$

7) Signe :

positive : $x \in [1/2, 13/24]$

négative : $x \in [13/24, \infty[$

Réciproque de la fonction racine carrée

La réciproque d'une fonction racine carrée est une fonction quadratique tronquée correspondant à une demi-parabole. Pour l'obtenir il suffit :

Méthode algébrique :

1. D'intervertir les variables x et y
2. D'isoler y (pour obtenir y^{-1})
3. **De trouver la restriction à l'aide du graphique !**

Exemples : #1 Trouve la réciproque de la fonction suivante :

$$f(x) = \sqrt{x+2} + 5$$

Sommet : (-2, 5) a+ b+

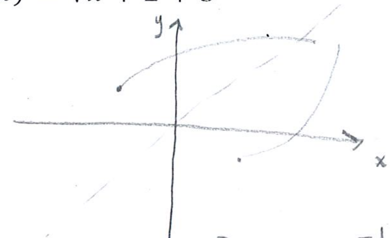
$y = \sqrt{x+2} + 5$

$x - 5 = \sqrt{y+2} + 5 - 5$

$(x-5)^2 = (\sqrt{y+2})^2$

$(x-5)^2 - 2 = y + 2 - 2$

$(x-5)^2 - 2 = y$



Donc $y^{-1} = (x-5)^2 - 2$ pour $x \in [5, \infty[$

#2 Trace le graphique de la fonction g et de sa réciproque :

$$g(x) = 2\sqrt{-(x-3)} + 1$$

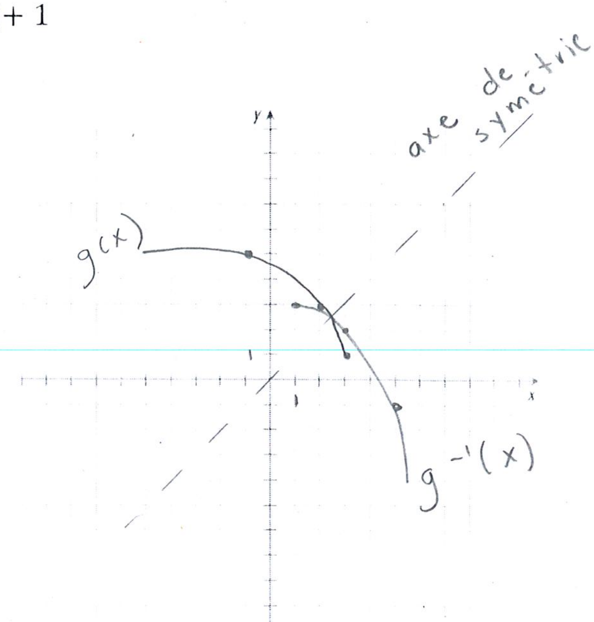
voir calculatrice

$g(x)$

x	g(x)
-1	5
2	3
3	1

Donc $g^{-1}(x)$

x	$g^{-1}(x)$
5	-1
3	2
1	3



Attention, sans restrictions, on a toute une parabole et non une branche !

Fonction valeur absolue :

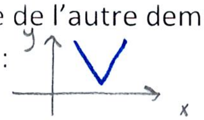
La règle d'une fonction valeur absolue peut s'écrire sous la forme $f(x) = a|b(x-h)| + k$ où $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Toutefois, les propriétés des valeurs absolues permettent de transformer cette règle sous la forme canonique : $\boxed{f(x) = a|x-h| + k}$

Propriétés des valeurs absolues :

Propriétés	Exemples
$\lvert a\rvert \geq 0$	$\lvert -3{,}5\rvert = 3{,}5$ $3{,}5 \geq 0$
$\lvert a\rvert = \lvert -a\rvert$	$\lvert 16\rvert = \lvert -16\rvert$.
$\lvert a \times b\rvert = \lvert a\rvert \times \lvert b\rvert$	$\lvert 6 \cdot -4\rvert = \lvert 6\rvert \cdot \lvert -4\rvert =$
$\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$	$\left\lvert \frac{-32}{8} \right\rvert = \frac{\lvert -32\rvert}{\lvert 8\rvert} = \frac{32}{8} = 4$

$6 \cdot 4 = 24$

Dans la représentation graphique d'une fonction valeur absolue dont la règle s'écrit $f(x) = a|x-h| + k$, où $a \neq 0$:

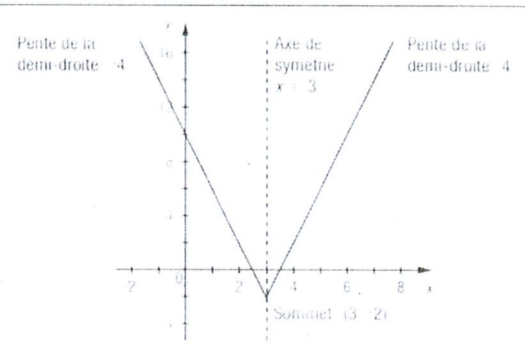
- La courbe est formée de deux demi-droites issues d'un même point nommé le ___sommet___ et donné par ___(h, k)___
- La pente est donnée par le paramètre ___a___. La pente d'une des demi-droite est –a et celle de l'autre demi-droite est a. Par contre de façon générale lorsque $a > 0$ alors : 

  et

  lorsque $a < 0$ alors : 
- Les demi-droites sont symétrique par rapport à un axe vertical d'équation ___$x = h$___

Voici un exemple d'une fonction valeur absolue :

Ex. :

Règle	Table de valeurs	Représentation graphique
$f(x) = 4\lvert x - 3\rvert - 2$	see below	

x	y
-1	14
0	10
1	6
2	2
3	-2
4	2
5	6

Écrivez chacune des règles suivantes sous la forme canonique : $f(x) = a|x-h| + k$

a) $f(x) = |-x-1| - 3$

$f(x) = |-(x+1)| - 3$

$f(x) = |-1| \cdot |x+1| - 3$

$f(x) = |x+1| - 3$

b) $g(x) = 3|5x+10|$

$g(x) = 3|5(x+2)|$

$g(x) = 3 \cdot |5| \cdot |x+2|$

$g(x) = 15|x+2|$

c) $h(x) = \frac{5}{9}|-4x+2| - 13$

$h(x) = \frac{5}{9}\left|-4(x - 2/4)\right| - 13$

$h(x) = \frac{5}{9} \cdot 4 \left|x - 1/2\right| - 13$

$h(x) = \frac{20}{9}\left|x - 1/2\right| - 13$

d) $j(x) = -0{,}25|-8x-9| + 22$

$j(x) = -0{,}25\left|-8(x + 9/8)\right| + 22$

$j(x) = -0{,}25 \cdot 8 \left|x + 9/8\right| + 22$

$j(x) = -2\left|x + 9/8\right| + 22$

e) $k(x) = 9\left|\frac{x}{3} - 3\right| - 18$

$k(x) = 9\left|\frac{1}{3}(x-9)\right| - 18$

$k(x) = 3|x-9| - 18$

f) $l(x) = -5|7x+4| + 25$

$l(x) = -5\left|7(x + 4/7)\right| + 25$

$l(x) = -35\left|x + 4/7\right| + 25$

Représentation graphique d'une fonction valeur absolue :

Étapes :

1. Mettre sous la forme canonique
2. Placer le sommet et déterminer le sens de l'ouverture
3. Utilise la pente pour tracer les deux demi-droites

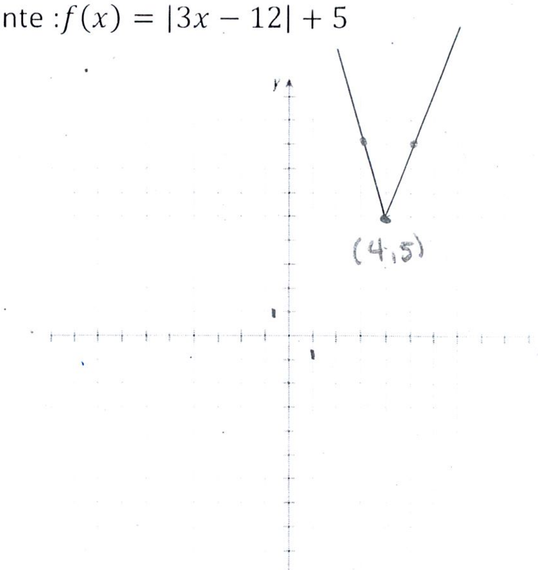
Exemple : Représente graphiquement la fonction suivante : $f(x) = |3x - 12| + 5$

$f(x) = |3(x-4)| + 5$

$f(x) = 3|x-4| + 5$

sommet : $(4, 5)$ a + $\vee$

$a = 3$



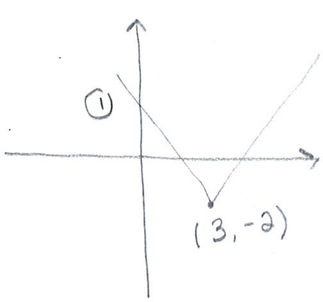
Avec ta calculatrice : MATH → NUM → Abs

Fonction valeur absolue ou fonction affine définie par partie :

Une fonction valeur absolue peut être définie comme une fonction affine définie par parties !

Écris la fonction valeur absolue $f(x) = 4|x - 3| - 2$ sous la forme d'une fonction affine définie par partie. Trace l'esquisse du graphique et trouve la règle des deux demi-droites. N'oublie pas le paramètre a est la pente ! Utilise un point (comme le sommet) pour trouver l'ordonnée à l'origine des deux demi-droites.

Sommet : $(3, -2)$ a + $\vee$



Partie 1 : $(3, -2)$ pente $a = 4$

$y = -3x + b$

$-2 = -3 \cdot 3 + b$

$-2 + 9 = -9 + 9 + b$

$7 = b$

Partie 2 : $(3, -2)$ pente $a = -4$

$-2 - 9 = 3 \cdot 3 - 9 + b$

$-11 = b$

$y = 3x - 11$

Donc

$$f(x) = \begin{cases} -4x+10 & x \in]-\infty, 3] \\ 4x-14 & x \in [3, \infty[\end{cases}$$

Recherche de la règle d'une fonction valeur absolue :

Étapes :

Méthode 1 :

1. Trouver les coordonnées du sommet et celles d'un autre point de la courbe.
2. Substituer les coordonnées du sommet à h et à k ainsi que les coordonnées de l'autres point à x et à y dans la règle : $y = a|x - h| + k$
3. Résoudre l'équation formée afin de déterminer la valeur du paramètre a.

Exemple : Détermine l'équation de la fonction suivante : Les coordonnées du sommet sont $\underset{h,\ k}{(-4, 3)}$ et la courbe passe par le point $\underset{x\ \ y}{(2, -6)}$

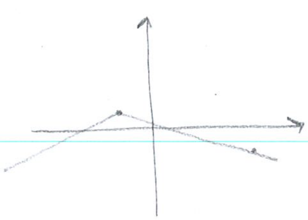
$$y = a|x - h| + k$$
$$-6 = a|2 - -4| + 3$$
$$-6 \overset{-3}{} = a \cdot |6| + 3 - 3$$
$$\frac{-9}{6} = \frac{a \cdot 6}{6}$$
$$-3/2 = a$$

Rép :
$$f(x) = -\frac{3}{2}|x + 4| + 3$$

Méthode 2 :

1. Prenez le sommet et un point et déterminez la pente à l'aide de la formule suivante : $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
2. Ajustez le signe du a selon l'ouverture de la courbe

Exemple : Détermine l'équation de la fonction suivante : Les coordonnées du sommet sont (-2, 2) et la courbe passe par le point (11, -1)



Donc $a < 0$

trouve a :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$a = \frac{-1 - 2}{11 - -2}$$
$$a = \frac{-3}{13}$$

Rép : $f(x) = \frac{-3}{13}|x + 2| + 2$

Exercice : #1 Détermine l'équation des fonctions valeurs absolues suivantes :

a) Sommet : (7, 15) et point : (2, 5)
h k x y

$y = a|x-h| + k$

$5 \overset{-15}{=} a|2-7| + 15 \; {-15}$

$-10 = a|-5|$

$\frac{-10}{5} = \frac{a \cdot 5}{5}$

$-2 = a$

Donc
$f(x) = -2|x-7| + 15$

b) Sommet : (4, -9) et point : (-1, -2)
h k x y

$y = a|x-h| + k$

$-2 \overset{+9}{=} a|-1-4| - 9 + 9$

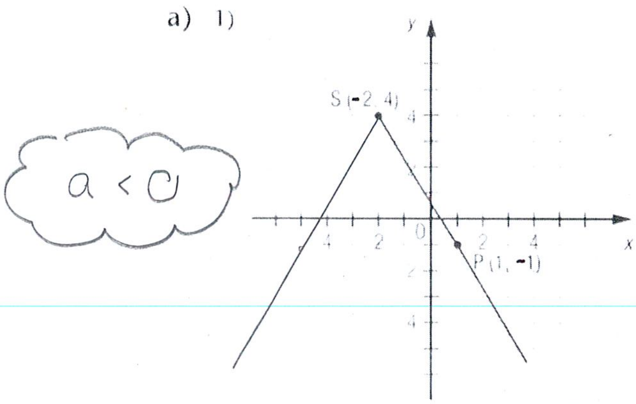
$7 = a|-5|$

$\frac{7}{5} = \frac{a \cdot 5}{5}$

Donc $f(x) = \frac{7}{5}|x-4| - 9$

#2 Dans chaque cas, complétez le graphique afin d'obtenir une fonction valeur absolue et déterminez sa règle sous la forme canonique.

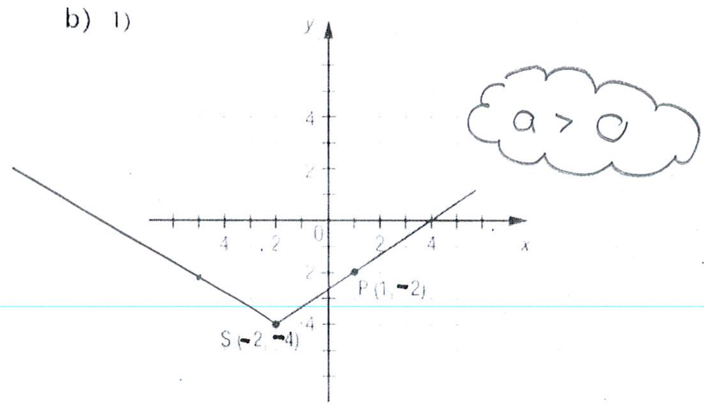
a) 1)



$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-4}{1--2} = \frac{-5}{3}$

Donc
$f(x) = \frac{-5}{3}|x+2| + 4$

b) 1)



$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2--4}{1--2} = \frac{2}{3}$

Donc $f(x) = \frac{2}{3}|x+2| - 4$

Résolution d'une équation valeur absolue

Étapes :

1. Obtenir une équation dans laquelle l'un des membres est formé d'une valeur absolue et l'autre, d'un terme constant. Noter que la résolution ne peut se poursuivre que si le terme constant est positif.
2. Éliminer la valeur absolue en appliquant la définition de la valeur absolue et établir la ou les équations à résoudre.
3. Compléter la résolution de l'équation ou des équations.
4. Énoncer l'ensemble-solution

Exemple : Résoudre : $2|x-8|+4 = 12$ -4 -4

$$\frac{2|x-8|}{2} = \frac{8}{2}$$

$$|x-8| = 4.$$

$$x - 8 + 8 = 4 + 8 \quad \text{ou} \quad x - 8 + 8 = -4 + 8$$

$$x = 12 \qquad x = 4$$

Rép : $x \in \{4, 12\}$

Exercices : Résolvez chacune des équations suivantes :

a) $|x| = 6$

$x = 6$ ou $x = -6$

$x \in \{-6, 6\}$

b) $|-3x| = 27$

$$\frac{-3x}{-3} = \frac{27}{-3} \qquad \frac{-3x}{-3} = \frac{-27}{-3}$$

$$x = 9 \qquad x = 9$$

$x = \pm 9$

c) $\left|\frac{3}{8}x\right| = \frac{9}{2}$

$$\frac{3}{8}x \cdot \frac{8}{3} = \frac{9}{2}\cdot\frac{8}{3} \qquad \frac{3x}{8}\cdot\frac{8}{3} = -\frac{9}{2}\cdot\frac{8}{3}$$

$$x = 12 \qquad x = -12$$

$x = \pm 12$

d) $\left|\frac{-75x}{2}\right| = 35$

$$\frac{-75x}{2}\cdot\frac{-2}{75} = 35 \cdot \frac{-2}{75} \qquad \frac{-75x}{2}\cdot\frac{-2}{75} = -35 \cdot \frac{-2}{75}$$

$$x = -\frac{70}{75} = \frac{-14}{15} \qquad x = \frac{70}{75} = \frac{14}{15}$$

$x \in \left\{\frac{-14}{15}, \frac{14}{15}\right\}$

e) $\left|\frac{(8x+3)}{2}\right| = 14$

$\frac{8x+3}{2} = 14 \cdot 2$

$8x + 3 = 28 - 3$

$\frac{8x}{8} = \frac{25}{8}$

$x = 25/8$

$\frac{8x+3}{2} = -14 \cdot 2$

$8x + 3 = -28 - 3$

$\frac{8x}{8} = \frac{-31}{8}$

$x = -31/8$

$x \in \left\{-\frac{31}{8}, \frac{25}{8}\right\}$

f) $\frac{-4|x| \cdot |2x|}{-4} = \frac{-144}{-4}$

$|x| \cdot |2x| = 36$

$|2x^2| = 36$

$\frac{2x^2}{2} = \frac{36}{2}$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{18}$

$x = \pm 9$

$\frac{2x^2}{2} = \frac{-36}{2}$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{-18}$ ind !

$x \in \{-9, 9\}$

g) $4\left|\frac{x}{2} + 1\right| + 37 = 5 - 37$

$\frac{4\left|\frac{x}{2}+1\right|}{4} = \frac{-32}{4}$

$\left|\frac{x}{2}+1\right| = -8$

ind !

Donc aucune solution !

h) $\left|\frac{2-x}{x-8}\right| = 12$

$\frac{2-x}{x-8} = 12$

$2 - x = 12(x-8)$

$2 - x = 12x - 96 + 96$

$\frac{98}{13} = \frac{13x}{13}$

$x = 93/13$

$\frac{2-x}{x-8} = -12$

$2 - x = -12(x-8)$

$2 - x = -12x + 96 - 2$

$\frac{11x}{11} = \frac{94}{11}$

$x = 94/11$

$x \in \left\{\frac{93}{13}, \frac{94}{11}\right\}$

Résolution d'une inéquation valeur absolue :

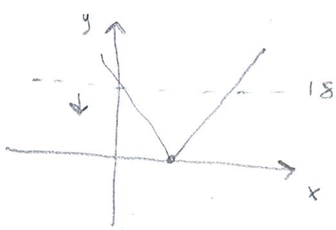
Étapes :

1. Substituer un symbole d'égalité au symbole d'inégalité de l'inéquation
2. Résoudre l'équation
3. Tracer l'esquisse du graphique pour déduire l'ensemble-solution.

Exemple : Résoudre $2|3x - 6| < 18$

$2|3(x-2)| = 18$

$6|x - 2| = 18$



$\frac{2|3x-6|}{2} = \frac{18}{2}$

$|3x - 6| = 9$

$3x - 6 = 9 + 6$

$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3}$

$x = 5$

$3x - 6 = -9 + 6$

$\frac{3x}{3} = \frac{-3}{3}$

$x = -1$

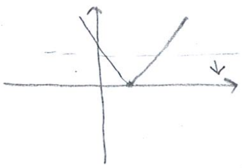
Rép $x \in]-1, 5[$

Exercices : Résolvez chacune des inéquations suivantes :

a) $1 > 3|6x - 2|$

$3|6(x - 1/3)| = 1$

$18|x - 1/3| = 1$



$\frac{3|6x - 2|}{3} = \frac{1}{3}$

$6x - 2 = \frac{1}{3} + 2$ $\qquad$ $6x - 2 = -\frac{1}{3} + 2$

$6x = \frac{1}{3} + \frac{6}{3}$ $\qquad$ $6x = -\frac{1}{3} + \frac{6}{3}$

$\frac{6x}{6} = \frac{7}{3} \div 6$ $\qquad$ $\frac{6x}{6} = \frac{5}{3} \div 6$

$x = 7/18$ $\qquad$ $x = 5/18$

$x \in \left]\frac{5}{18}, \frac{7}{18}\right[$

b) $|-8x| + 5 \leq 9$

$|-8x| + 5 = 9 - 5$

$|-8x| = 4$

$8|x| + 5 = 9$

$\frac{-8x}{-8} = \frac{4}{-8}$ $\qquad$ $\frac{-8x}{-8} = \frac{-4}{-8}$

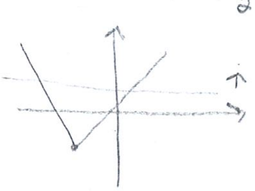
$x = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $x = \frac{1}{2}$

$x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

c) $\frac{1}{2} \leqslant 9|2x + 4| - \frac{5}{2}$

$9|2x + 4| - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$

$9|2(x + 2)| - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$



$9|2x + 4| - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}$

$\frac{9|2x + 4|}{9} = \frac{3}{9}$

$2x + 4 = \frac{1}{3} - 4$ $\qquad$ $2x + 4 = -\frac{1}{3} - 4$

$2x = \frac{1}{3} - \frac{12}{3}$ $\qquad$ $2x = \frac{-1}{3} - \frac{12}{3}$

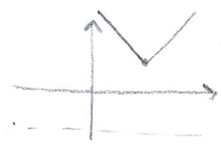
$\frac{2x}{2} = \frac{11}{3} \div 2$ $\qquad$ $\frac{2x}{2} = -\frac{13}{3} \div 2$

$x = 11/6$ $\qquad$ $x = -13/6$

Rép. $x \in \left]-\infty, -\frac{13}{6}\right] \cup \left[\frac{11}{6}, \infty\right[$

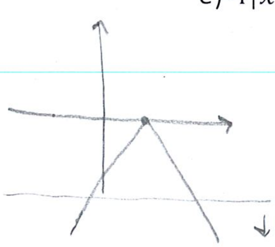
d) $|7 - x| + 13 > -5$

$|-(x - 7)| + 13 = -5$



Aucune solution!

e) $-4|x - 4| \leq -24$



$\frac{-4|x - 4|}{-4} = \frac{-24}{-4}$

$|x - 4| = 6$

$x - 4 = 6 + 4$ $\qquad$ $x - 4 = -6 + 4$

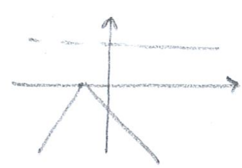
$x = 10$ $\qquad$ $x = -2$

Rép $x \in \left]-\infty, -2\right] \cup \left[10, \infty\right[$

f) $-10|3x + 2| > 50$

$-10|3(x + 2/3)| = 50$

$-30|x + 2/3| = 50$



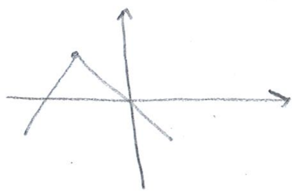
Aucune solution!

Faire l'étude d'une fonction valeur absolue:

Soit la fonction suivante : $f(x) = -1{,}5|x+4| + 3$

1) Trace l'esquisse du graphique

sommet : $(-4, 3)$ $a < 0$



2) Domaine : $\mathbb{R}$ Image : $]-\infty, 3]$

3) Variation : crois : $]-\infty, -4]$ déc : $[-4, \infty[$

4) Extremum : max à $y = 3$

5) Ordonnée à l'origine : $f(0) = -1{,}5|0+4| + 3$

$f(0) = -1{,}5 \cdot 4 + 3$

$f(0) = -3$

Donc $y = -3$

6) Abscisse à l'origine : $-1{,}5|x+4| + 3 \overset{-3}{} = 0 - 3$

$\frac{-1{,}5|x+4|}{-1{,}5} = \frac{-3}{-1{,}5}$

$|x+4| = 2$

$x + 4 \overset{-4}{=} 2 - 4$ $x + 4 \overset{-4}{=} -2 - 4$

$x = -2$ $x = -6$

Donc $x \in \{-6, -2\}$

7) Signe :

pos : $x \in [-6, -2]$

nég : $x \in]-\infty, -6] \cup [-2, \infty[$