Nom : _______________________ École Montcalm
Groupe : ____________________ Math SN5

Exercices préparatoires

Vecteurs

1. À partir des vecteurs $\vec{u} = (2, 5)$ et $\vec{v} = (^-1, 3)$, calculez les valeurs suivantes.

a) $\vec{u} + \vec{v}$ ______________________________

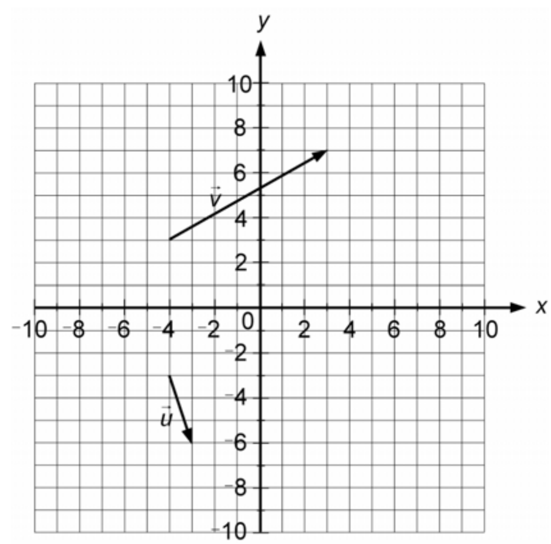
b) $\vec{u} - \vec{v}$ ______________________________

c) $4\vec{u}$ ______________________________

d) $^-6\vec{v}$ ______________________________

2. Calculez l'angle compris entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en suivant les étapes décrites ci-dessous.

a) Reportez les deux vecteurs à l'origine dans le plan cartésien ci-contre.



b) Déterminez les composantes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

____

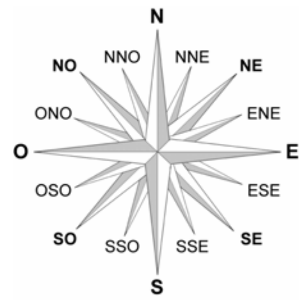
c) Calculez la norme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

d) Trouvez le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

____

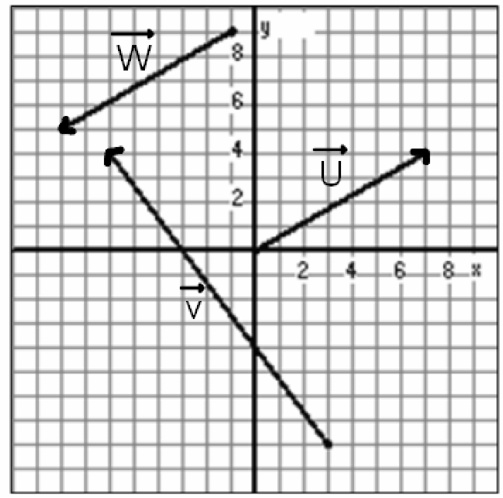
e) Déterminez l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

3. Un avion de ligne volant à haute altitude a une vitesse de croisière de 840 km/h et se déplace vers le nord-est. À cette altitude, un vent souffle vers l'est à 120 km/h.



Calculez la norme et l'orientation du déplacement résultant.

4. Déterminez les composantes de chaque vecteur ainsi que sa norme et son orientation.



5. Calculez le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ si :

a) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 8$, l'orientation de $\vec{u}$ est de 20° et celle de $\vec{v}$ est de 35° ;

b) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = \frac{4}{3}$, l'orientation de $\vec{u}$ est de 120° et celle de $\vec{v}$ est de 68° ;

c) $\|\vec{u}\| = 11$, $\|\vec{v}\| = 2$, l'orientation de $\vec{u}$ est de $^-31°$ et celle de $\vec{v}$ est de 34° ;

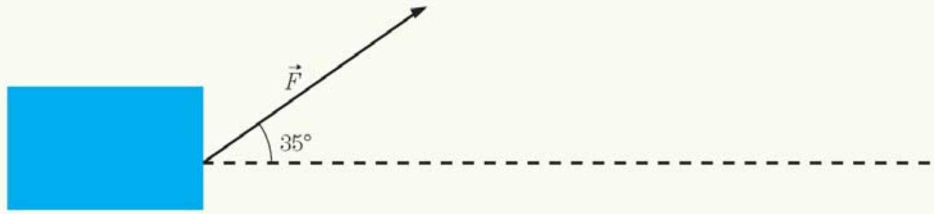
d) $\|\vec{u}\| = 20$, $\|\vec{v}\| = 0$ et l'orientation de $\vec{u}$ est de 72° ;

e) $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = {}^-4$, l'orientation de $\vec{u}$ est de 120° et celle de $\vec{v}$ est de 90°.

6. Déterminez les produits scalaires ci-dessous selon les vecteurs $\vec{u} = (1, 4)$, $\vec{v} = (6, {}^-3)$ et $\vec{w} = ({}^-2, {}^-5)$.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **b)** $\vec{v} \cdot \vec{w}$ **c)** $\vec{u} \cdot \vec{w}$

7. Au cours d'une expérience, on évalue la capacité d'une machine à déplacer horizontalement des objets lourds. Dans la situation représentée ci-dessous, l'appareil a effectué un travail d'une puissance de 163,83 J.



a) Déterminez la force F, en newtons, qui a été nécessaire pour déplacer la charge représentée sur une distance de 10 m.

b) Si l'on veut réduire l'intensité de la force au cours du déplacement de cette charge, faut-il augmenter l'angle que forme la corde avec le sol ou le diminuer ? Justifiez votre réponse à l'aide de calculs.

8. Soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Calculez le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

a) s'il y a un angle de 120° entre les deux vecteurs et que $\|\vec{u}\| = 9$ et $\|\vec{v}\| = 5$;

b) si $\vec{u} = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right)$ et $\vec{v} = \left(\frac{9}{5}, \frac{2}{7}\right)$.

9. Déterminez s'il existe une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u} = (^-3, 2)$ et $\vec{v} = (1, 5)$ permettant d'exprimer les vecteurs suivants.

a) $\vec{w} = (^-7, ^-1)$

____

b) $\vec{w} = (3, 15)$

____

c) $\vec{w} = \left(0, \frac{17}{2}\right)$

____

d) $\vec{w} = (^-30, 20)$

____

e) $\vec{w} = (1, 1)$

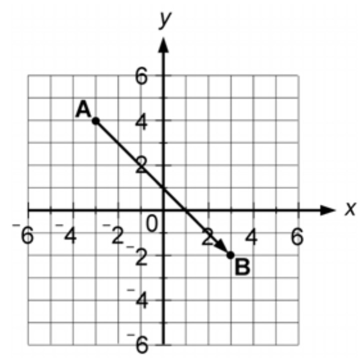
____

f) $\vec{w} = (a, 2a)$, où $a \neq 0$.

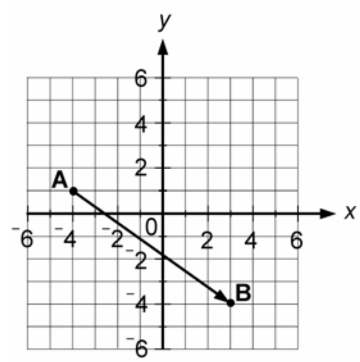
____

10. Dans chaque cas ci-dessous, en vous référant à la figure et à l'information fournie, trouvez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$.

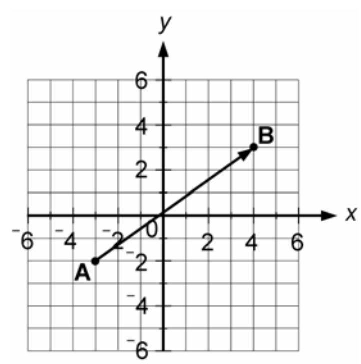
a) Le point **P** partage le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ en deux parties égales.



b) Le point **P** partage le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ dans un rapport de 2 : 3 à partir du point ***A***.



c) Le point **P** est situé au sixième du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ à partir du point **B**.



11. Simplifiez les expressions suivantes à l'aide des propriétés des opérations sur les vecteurs.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{ED}$

c) $(\overrightarrow{EC} - (\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{AF})) + \overrightarrow{CD}$

12. À l'aide des propriétés des opérations sur les vecteurs et de la relation de Chasles, simplifiez les expressions suivantes.

a) $\overrightarrow{MR} - \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PR}$

b) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{QP} - \overrightarrow{QN}$

c) $^{-}\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{TR} - \overrightarrow{VT}$

d) $2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{CD} - 4\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$

Corrigé

Vecteurs

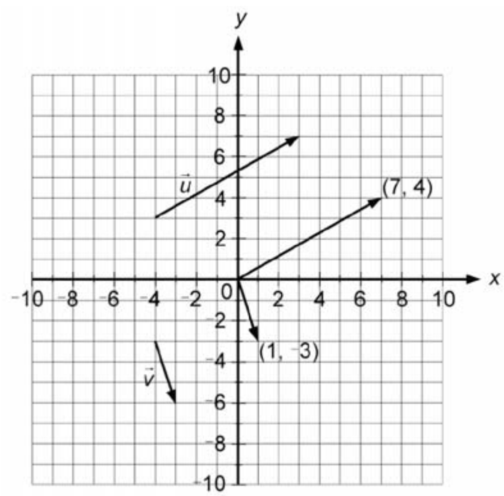
1. **a)** $\vec{u}+\vec{v}$ — $\vec{u}+\vec{v} = (2, 5) + (-1, 3) = (2 + -1, 5 + 3) = (1, 8)$

b) $\vec{u}-\vec{v}$ — $\vec{u}-\vec{v} = (2, 5) - (-1, 3) = (2 - -1, 5 - 3) = (3, 2)$

c) $4\vec{u}$ — $4\vec{u} = 4(2, 5) = (4 \cdot 2, 4 \cdot 5) = (8, 20)$

d) $-6\vec{v}$ — $-6\vec{v} = -6(-1, 3) = (-6 \cdot -1, -6 \cdot 3) = (6, -18)$

2. **a)** Reportez les deux vecteurs à l'origine dans le plan cartésien ci-contre.



b) Déterminez les composantes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\vec{u} = (7, 4)$, $\vec{v} = (1, -3)$

c) Calculez la norme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65} \approx 8{,}0623$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10} \approx 3{,}1623$$

d) Trouvez le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\vec{u} \bullet \vec{v} = 7 \cdot 1 + 4 \cdot -3 = 7 + -12 = -5$

e) Déterminez l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$m\angle\theta = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \arccos \frac{-5}{\sqrt{65} \cdot \sqrt{10}} = 101{,}31°$$

3. ||r||= 928,74 km/h, l'orientation est de 39,76°.

4. u= (7,4), ||u||= 8,06; orientation = 29,75°.
v =(-9, 12); ||v||=15; orientation= 126,87 °
w= (-7, -4); ||w||= 8,06; orientation= 209,75°

5. **a)** Angle entre les vecteurs : 15°.

Donc,

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \theta$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 8 \cos 15°$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 15{,}45$

b) Angle entre les vecteurs : 52°.

Donc,

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \theta$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \cdot \frac{4}{3} \cos 15°$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4{,}1$

c) Angle entre les vecteurs : 65°.

Donc,

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \theta$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 11 \cdot 2 \cos 65°$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 9{,}3$

d) Angle entre les vecteurs : 72°.

Donc,

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \theta$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 20 \cdot 0 \cos 72°$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

e) Angle entre les vecteurs : 30°.

Donc,

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \theta$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \cdot 4 \cdot \cos 30°$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 8\sqrt{3}$

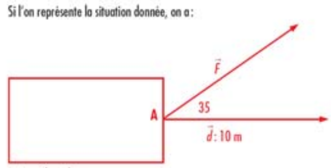
6. **a)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 4) \cdot (6, {}^-3) = 1 \cdot 6 + 4 \cdot ({}^-3) = 6 - 12 = {}^-6$

b) $\vec{v} \cdot \vec{w} = (6, {}^-3) \cdot ({}^-2, {}^-5) = 6 \cdot ({}^-2) + ({}^-3) \cdot ({}^-5) = {}^-12 + 15 = 3$

c) $\vec{u} \cdot \vec{w} = (1, 4) \cdot ({}^-2, {}^-5) = 1 \cdot ({}^-2) + 4 \cdot ({}^-5) = {}^-2 - 20 = {}^-22$

7. **a)** Le travail (en joules) est égal au produit scalaire du vecteur force (en newtons) et du vecteur déplacement (en mètres).

Si l'on représente la situation donnée, on a :



Le travail est donc :

Travail $= \vec{F} \cdot \vec{d}$

$163{,}83 = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{d}\| \cdot \cos \angle A$

$163{,}83 = \|\vec{F}\| \cdot 10 \cdot \cos (35°)$

$\|\vec{F}\| = \frac{163{,}83}{10 \cdot \cos 35°}$

$\|\vec{F}\| \approx 19{,}9999 \text{ N}$

$\|\vec{F}\| \approx 20 \text{ N}$

b) Si la mesure de l'angle diminue, la valeur du cosinus augmente et, pour un travail égal, la force diminuera.

Exemples :

1) Angle de 20° :

$\|\vec{F}\| = \frac{163{,}83}{10 \cdot \cos 20°}$

$\|\vec{F}\| \approx 16{,}64 \text{ N}$

2) Angle de 10° :

$\|\vec{F}\| = \frac{163{,}83}{10 \cdot \cos 10°}$

$\|\vec{F}\| \approx 16{,}64 \text{ N}$

Si l'angle est de 0°, la force exercée sera la plus petite, soit :

$\|\vec{F}\| = \frac{163{,}83}{10 \cdot \cos 0°}$

$\|\vec{F}\| \approx 16{,}383 \text{ N}$

8. Soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Calculez le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

a) s'il y a un angle de 120° entre les deux vecteurs et que $\|\vec{u}\| = 9$ et $\|\vec{v}\| = 5$;

$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta = 9 \cdot 5 \cos 120° = -22{,}5$

b) si $\vec{u} = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right)$ et $\vec{v} = \left(\frac{9}{5}, \frac{2}{7}\right)$.

$\vec{u} \bullet \vec{v} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{5} + \frac{8}{35} = \frac{42}{35} + \frac{8}{35} = \frac{50}{35} = \frac{10}{7}$

9. Déterminez s'il existe une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u} = (-3, 2)$ et $\vec{v} = (1, 5)$ permettant d'exprimer les vecteurs suivants.

a) $\vec{w} = (-7, -1)$

$\vec{w} = 2\vec{u} - 1\vec{v}$

b) $\vec{w} = (3, 15)$

$\vec{w} = 0\vec{u} + 3\vec{v}$

c) $\vec{w} = \left(0, \dfrac{17}{2}\right)$

$\vec{w} = \dfrac{1}{2}\vec{u} + \dfrac{3}{2}\vec{v}$

d) $\vec{w} = (-30, 20)$

$\vec{w} = 10\vec{u} - 0\vec{v}$

e) $\vec{w} = (1, 1)$

$\vec{w} = \dfrac{-4}{17}\vec{u} + \dfrac{5}{17}\vec{v}$

f) $\vec{w} = (a, 2a)$, où $a \neq 0$.

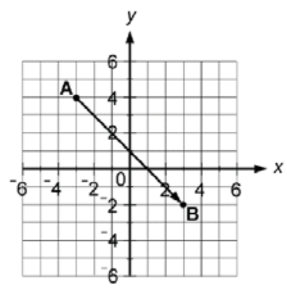
$\vec{w} = \dfrac{-3a}{17}\vec{u} + \dfrac{8a}{17}\vec{v}$

10. **a)** Le point **P** partage le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ en deux parties égales.

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$= (-3, 4) + \dfrac{1}{2}(3 - -3, -2 - 4)$

$= (0, 1)$

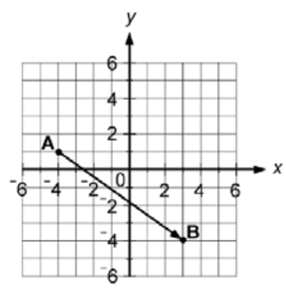


b) Le point **P** partage le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ dans un rapport de 2 : 3 à partir du point **A.**

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

$= (-4, 1) + \dfrac{2}{5}(3 - -4, -4 - 1)$

$= \left(-\dfrac{6}{5}, -1\right)$

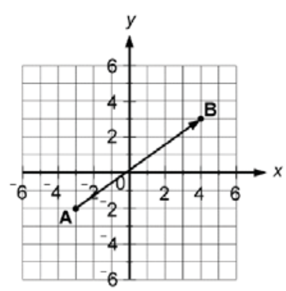


c) Le point **P** est situé au cinquième du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ à partir du point **B.**

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \dfrac{1}{6}\overrightarrow{BA}$

$= (4, 3) + \dfrac{1}{6}(-3 - 4, -2 - 3)$

$= \left(\dfrac{17}{6}, \dfrac{13}{6}\right)$



11. **a)** $\overrightarrow{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{BC}} + \overrightarrow{\mathbf{CD}}$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{CD}} - \overrightarrow{\mathbf{ED}}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE}$

c) $(\overrightarrow{\mathbf{EC}} - (\overrightarrow{\mathbf{DF}} - \overrightarrow{\mathbf{AF}})) + \overrightarrow{\mathbf{CD}}$

$= \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FA}) = \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AD}$

12. a) $2\,\overrightarrow{MR}$

$\overrightarrow{MR}-\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{MR}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PR}$

$\overrightarrow{MR}-\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{MR}+\overrightarrow{MR}$

$\overrightarrow{MR}-\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PR}=2\,\overrightarrow{MR}$

b) $2\,\overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}-\overrightarrow{QP}-\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{NQ}$

$\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}-\overrightarrow{QP}-\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}-\overrightarrow{QP}-\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}-\overrightarrow{QP}-\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}-\overrightarrow{QP}-\overrightarrow{QN}=2\,\overrightarrow{PQ}$

c) $\overrightarrow{SV}$

$-\overrightarrow{RS}-\overrightarrow{TR}-\overrightarrow{VT}=\overrightarrow{SR}+\overrightarrow{RT}+\overrightarrow{TV}$

$-\overrightarrow{RS}-\overrightarrow{TR}-\overrightarrow{VT}=\overrightarrow{ST}+\overrightarrow{TV}$

$-\overrightarrow{RS}-\overrightarrow{TR}-\overrightarrow{VT}=\overrightarrow{SV}$

d) $3\,\overrightarrow{AD}$

$2\,\overrightarrow{AB}-2\,\overrightarrow{CB}-2\,\overrightarrow{CD}-4\,\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}=2\,\overrightarrow{AB}+2\,\overrightarrow{BC}+2\,\overrightarrow{DC}+4\,\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}$

$2\,\overrightarrow{AB}-2\,\overrightarrow{CB}-2\,\overrightarrow{CD}-4\,\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}=2\,\overrightarrow{AC}+2\,\overrightarrow{DC}+2\,\overrightarrow{CD}+2\,\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}$

$2\,\overrightarrow{AB}-2\,\overrightarrow{CB}-2\,\overrightarrow{CD}-4\,\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}=2\,\overrightarrow{AC}+2\,\overrightarrow{DD}+2\,\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}$

$2\,\overrightarrow{AB}-2\,\overrightarrow{CB}-2\,\overrightarrow{CD}-4\,\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}=2\,\overrightarrow{AC}+2\,\overrightarrow{CD}+2\,\vec{0}+\overrightarrow{AD}$

$2\,\overrightarrow{AB}-2\,\overrightarrow{CB}-2\,\overrightarrow{CD}-4\,\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}=2\,\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}$

$2\,\overrightarrow{AB}-2\,\overrightarrow{CB}-2\,\overrightarrow{CD}-4\,\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}=3\,\overrightarrow{AD}$