**1** Pour chacune des fonctions exponentielles définies ci-dessous, trouvez l'équation de l'asymptote du graphique et décrivez l'image de la fonction.

**a)** $f(x) = 10\left(\frac{3}{2}\right)^{-x} - 5$

**b)** $f(x) = 2(5^{2x-3}) + 1$

**c)** $f(x) = {}^-4(3^{4-x})$

**d)** $f(x) = {}^-3\left(\frac{1}{4}\right)^{3x+1} + 10$

a) $y = -5$ $(a+)$

$y \in \,]-5, +\infty[$

b) $y = 1$ $(a+)$

$y \in \,]1, +\infty[$

c) $y = 0$ $(a-)$

$y \in \,]-\infty, 0[$

d) $y = 10$ $(a-)$

$y \in \,]-\infty, 10[$

**2** Trouvez l'ordonnée à l'origine des fonctions exponentielles suivantes et précisez si la fonction comportera ou non un zéro.

**a)** $f(x) = 4\left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2} + 12$

**b)** $f(x) = {}^-5(2)^{3x-4} + 20$

**c)** $f(x) = \cancel{25} - (5)^{\frac{x}{3}+6} + 25$

**d)** $f(x) = -\frac{2}{3}(4)^{1-3x} - 2$

a) Zéro : NON (a et k m̂ signe)

$f(0) = 4\left(\frac{1}{3}\right)^{-0+2} + 12$

$= \frac{4}{9} + 12 = \boxed{\frac{112}{9}}$

b) Zéro : oui (a et k signe contraire)

$f(0) = -5(2)^{3(0)-4} + 20$

$= \frac{-5}{16} + 20 = \boxed{\frac{315}{16}}$

c) Zéro : oui, (a et k signe cont.)

$f(0) = -(5)^{\frac{0}{3}+6} + 25$

$f(0) = -15625 + 25 = \boxed{-15600}$

d) Zéro : NON (a et k m̂ signe)

$f(0) = -\frac{2}{3}(4)^{1-3(0)} - 2$

$= -\frac{8}{3} - 2 = \boxed{-\frac{14}{3}}$

**3** Dans le cas de chaque fonction exponentielle ci-dessous, précisez si elle est croissante ou décroissante sur son domaine.

**a)** $f(x) = 2\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x}{3}} - 5$

**b)** $f(x) = ^{-}20(3^{2x+3}) + \frac{2}{5}$

**c)** $f(x) = \cancel{5} - 3(2^x)$ $+5$

**d)** $f(x) = ^{-}\frac{4}{5}(7^{12-3x}) + 2$

**e)** $f(x) = (5)^{\frac{x+1}{3}} - \frac{3}{10}$

**f)** $f(x) = \cancel{5} - \left(\frac{4}{9}\right)^{3+x}$ $+5$

**g)** $f(x) = ^{-}\frac{8}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} + 3$

a) $0 < c < 1$

$a+$ et $b+$

donc <u>décroissante</u>

b) $c > 1$

$a-$ $b+$

donc <u>décroissante</u>

c) $c > 1$

$a-$ $b+$

donc <u>décroissante</u>

d) $c > 1$

$a-$ $b-$

donc <u>croissante</u>

e) $c > 1$

$a+$ $b+$

donc <u>croissante</u>

f) $0 < c < 1$

$a-$ $b+$

donc <u>croissante</u>

g) $0 < c < 1$

$a-$ $b-$

donc <u>décroissante</u>

## 4

Associez chaque courbe du graphique à l'une des expressions ci-dessous qui pourrait faire partie de la règle la définissant. La courbe noire représente la fonction $f(x) = 2^x$.

**a)** $2 \cdot 2^x$

**b)** $2^{-x}$ g(x)

**c)** $0{,}5^x$ g(x)

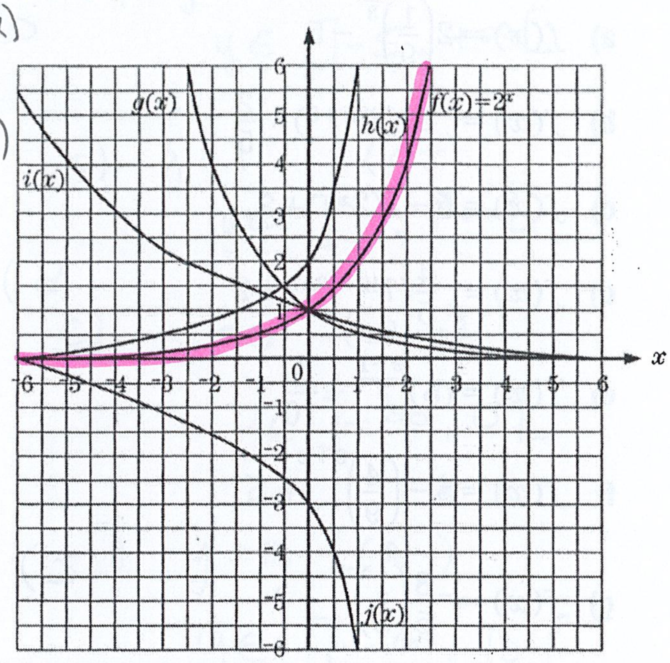
**d)** $0{,}75^x$ i(x)

**e)** $2 \cdot 3^x$ h(x)

**f)** $3^{-x}$

**g)** $-3 \cdot 2^x$ j(x)

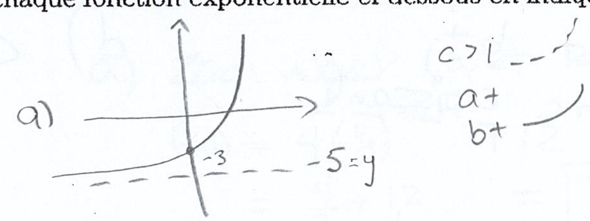
**h)** $-3^x$




## 5

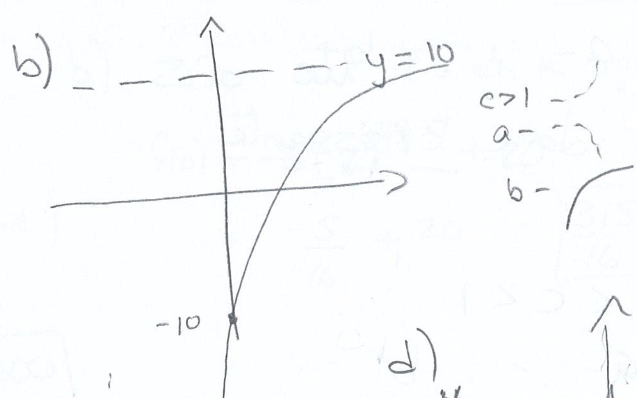
Tracez globalement le graphique de chaque fonction exponentielle ci-dessous en indiquant bien l'équation de l'asymptote.

**a)** $f(x) = 2(3)^{\frac{x}{3}} - 5$

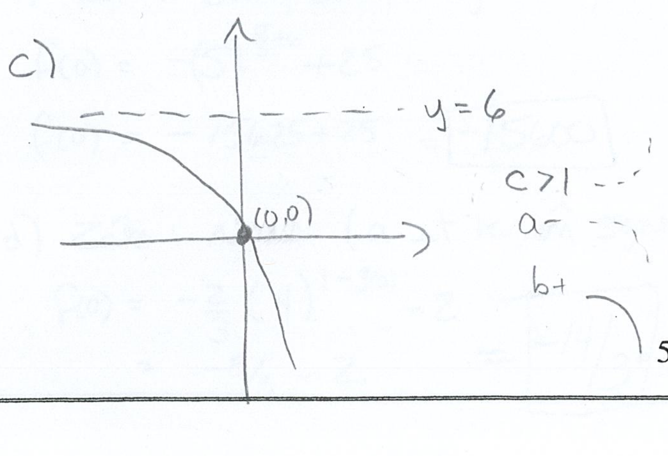


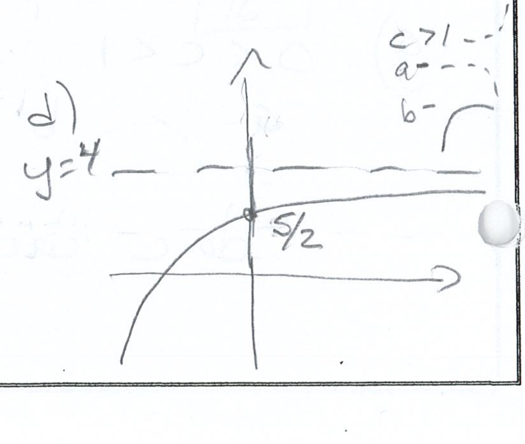

**b)** $f(x) = {}^{-}20(2^{-x}) + 10$

**c)** $f(x) = \cancel{6} - 3(2^{x+1}) + 6$

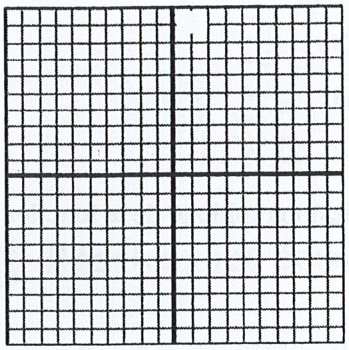



**d)** $f(x) = -\dfrac{1}{2}(3^{1-x}) + 4$

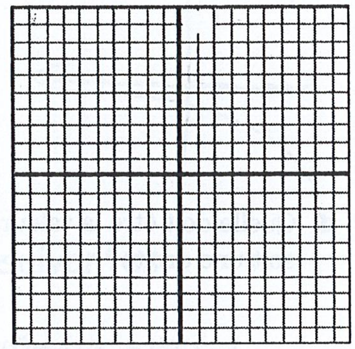


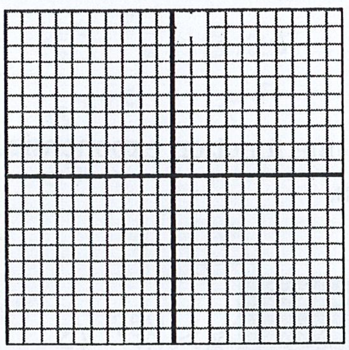
a)



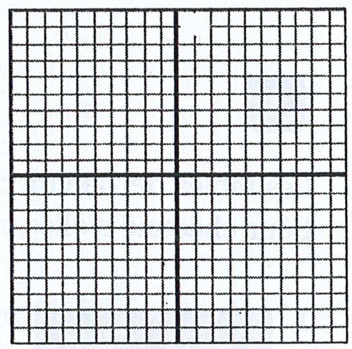
b)



c)



d)

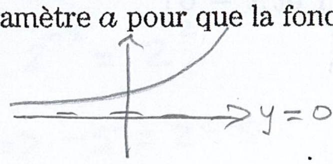


## 6

Une fonction exponentielle, dont l'équation est sous la forme $f(x) = a(c)^x + k$, a une asymptote horizontale confondue avec l'axe des abscisses. $f(x) = a \cdot c^x$ $K = 0$

**a)** Si la valeur de la base $c$ est un nombre entier positif, quelles peuvent être les valeurs du paramètre $a$ pour que la fonction soit strictement positive ?

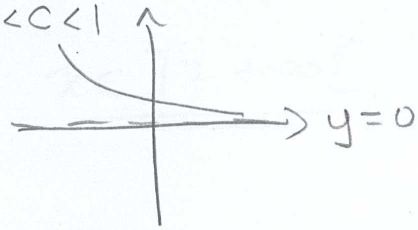
$c > 1$




$a \in ]0, +\infty[$

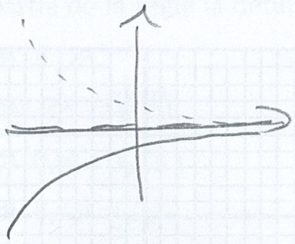
**b)** Si la valeur de la base $c$ est un nombre décimal positif inférieur à un, quelles peuvent être les valeurs du paramètre $a$ pour que la fonction soit décroissante sur son domaine ?

$0 < C < 1$




$a \in ]0, +\infty[$

**c)** Si la valeur du paramètre $a$ est négative, quelle doit être la valeur de la base $c$ pour que la fonction soit croissante sur son domaine ?



$a-$

$c \in ]0, 1[$

ou

$0 < c < 1$

**d)** Quelle doit être la valeur de la base $c$ pour que la représentation graphique de la fonction $f$ soit une droite ?

$f(x) = a \cdot c^x$

$f(x) = a \cdot 1^x$

$f(x) = a$

$c = 1$

**7**

Les tables de valeurs ci-dessous représentent chacune une fonction exponentielle $f$. Pour chacune d'elles, répondez aux questions suivantes.

**1)**

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 2 | 36 |
| 3 | 108 |
| 4 | 324 |
| 5 | 972 |

$+72$, $+216$

$K = 0$

$c = \frac{216}{72} = 3$

**2)**

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 2 | 0,12 |
| 3 | 0,024 |
| 4 | 0,0048 |
| 5 | 0,00096 |

$c = \frac{0{,}024}{0{,}12} = 0{,}2 = 1/5$

**3)**

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 2 | $1\frac{7}{8}$ |
| 3 | $1\frac{15}{16}$ |
| 4 | $1\frac{31}{32}$ |
| 5 | $1\frac{63}{64}$ |

$15/8$, $31/16$, $63/32$, $127/64$

$+1/16$, $+1/32$, $+1/64$

$\times 1/2$, $\times 1/2$

$c = 1/2$

**a)** Quelles sont les valeurs de $f(x)$ pour $x = 1$ et $x = 6$ ?

$f(x) = a \cdot c^x$

$f(x) = a \cdot 3^x$

$36 = a \cdot 3^2$

$\frac{36}{9} = \frac{a \cdot 9}{9}$

$a = 4$

$f(x) = 4 \cdot (3)^x$

$f(1) = 12$

$f(6) = 2916$

$f(x) = a \cdot (1/5)^x$

$0{,}12 = a \cdot (1/5)^2$

$\frac{0{,}12}{0{,}04} = \frac{a \cdot 0{,}04}{0{,}04}$

$a = 3$

$f(x) = 3(1/5)^x$

$f(1) = 3/5$

$f(6) = 0{,}000192$

b) Quelle est la valeur de la base de la fonction f ?

1) $c = 3$

2) $c = 1/5$

3) $c = 1/2$

**8** Résolvez les équations et les inéquations suivantes.

a) $4 \cdot 5^{x-2} - 10\,000 = 2500$

$+10000 \quad +10000$

$\frac{4 \cdot 5^{x-2}}{4} = \frac{12500}{4}$

$5^{x-2} = 3125$

$5^{x-2} = 5^5$

$\Rightarrow x - 2 = 5$

$x = 7$

b) $33 = 15(9^{2x+1}) - 12$

$+12 \quad +12$

$\frac{45}{15} = 9^{2x+1}$

$3 = 9^{2x+1}$

$3^1 = (3^2)^{2x+1}$

$3^1 = 3^{4x+2}$

$\Rightarrow 1 = 4x + 2$

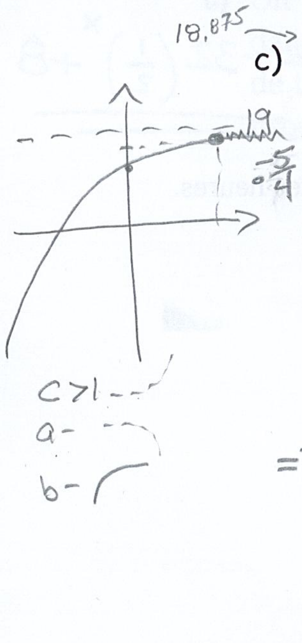
$-1 = 4x$

$x = -1/4$

c) $\frac{759}{40} < -\frac{4}{5}(2^{2-x}) + 19$

18,875

$-19 \quad -19$




$\frac{-5}{4}\frac{-1}{40} = -\frac{4}{5}(2^{2-x})$

$\frac{1}{32} = 2^{2-x}$

$2^{-5} = 2^{2-x}$

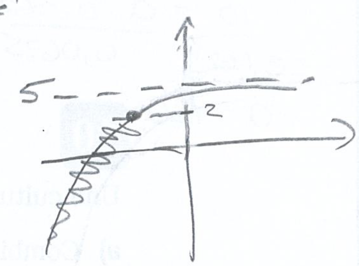
$\Rightarrow -5 = 2 - x$

$-7 = -x$

$x = 7$

$x \in ]7, +\infty[$

d) $2 \geq \cancel{5} - \left(\frac{1}{9}\right)^{3+x} + 5$




$2 = -\frac{1}{9}^{3+x} + 5$

$-5 \quad -5$

$+3 = +\frac{1}{9}^{3+x}$

$3 = (3^{-2})^{3+x}$

$3 = 3^{-6-2x}$

$\Rightarrow 1 = -6 - 2x$

$\frac{7}{-2} = \frac{-2x}{-2}$

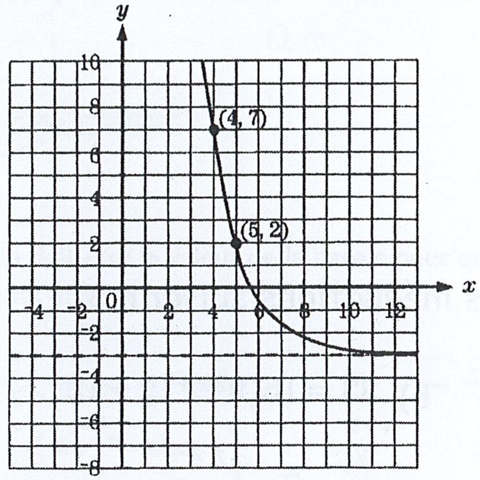
$x = -7/2$

$x \in ]-\infty, -7/2]$

## 9

Déterminez les équations définissant les fonctions exponentielles représentées ci-dessous.

**a)**




$K = -3$

$f(x) = a \cdot c^x + K$

$f(x) = a \cdot c^x - 3$

$(4,7) \quad 7 = a \cdot c^4 - 3 \rightarrow 10 = \cancel{a} \cdot c^4$

$(5,2) \quad 2 = a \cdot c^5 - 3 \rightarrow 5 = \cancel{a} \cdot c^5$

$2 = c^{-1}$

$c = 1/2$

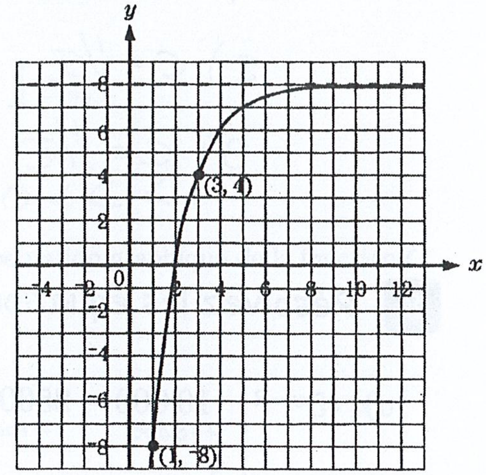
$10 = a \cdot (1/2)^4$

$\frac{10}{0{,}0625} = \frac{a \cdot 0{,}0625}{0{,}0625}$

$a = 160$

$f(x) = 160(1/2)^x - 3$

**c)**




$K = 8$

$f(x) = a \cdot c^x + 8$

$(3,4) \quad 4 = a \cdot c^3 + 8 \rightarrow -4 = \cancel{a} \cdot c^3$

$(1,-8) \quad -8 = a \cdot c^1 + 8 \rightarrow -16 = \cancel{a} \cdot c^1$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{1/2} = (c^2)^{1/2}$

$c = 1/2$

$4 = a \cdot (1/2)^3 + 8$

$-4 = a \cdot \left(\frac{1}{8}\right)$

$a = -32$

$f(x) = -32\left(\frac{1}{2}\right)^x + 8$

## 10

Une culture contient au départ 100 bactéries dont le nombre triple toutes les heures.

**a)** Combien de bactéries y aura-t-il après :

$Q_f = ?$

$Q_i = 100$

$c = 3$

$n = \frac{t}{f} = \frac{t}{1}$

**1)** 4 heures ?

$Q_f = 100 \cdot 3^x$

$Q_f = 100 \cdot 3^4$

$Q_f = 8100$ bact

**2)** 6 heures et demie ?

$Q_f = 100 \cdot 3^{6,5}$

$Q_f = 126266,5$

↳ donc 126266 bact

**b)** Combien de bactéries y avait-il après 45 minutes ?

$Q_f = 100 \cdot 3^{0,75}$

$Q_f = 227,95$

↳ donc 227 bact.

**c)** Trouvez une équation exponentielle qui pourrait modéliser cette situation.

$Q(x) = 100 \cdot 3^x$

où $x$ : nombre d'heures

$Q(x)$ : Quantité de bactéries

**d)** On veut prévoir le moment où le nombre de bactéries dans la culture dépassera le million. Après combien de temps, à la minute près, ce phénomène se produira-t-il ? Expliquez votre démarche.

$\frac{1000000}{100} < \frac{100 \cdot 3^n}{100}$

$3^n > 10000$

avec calculatrice

$n = 8,38...$

donc 8h 23 min.

**11** Une ruche contient 5000 abeilles. Selon les propriétaires, chaque année leur nombre devrait augmenter de 20 % par rapport à l'année précédente.

Qi

$C = 100\% + 20\%$
$= 120\%$
$= 1{,}2$

**a)** Construisez une table de valeurs présentant le nombre d'abeilles dans la ruche en fonction du nombre d'années pour cinq années consécutives.

$Q_f = 5000\,(1{,}2)^x$

| Temps (année) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nb. abeilles | 6000 | 7200 | 8640 | 10368 | 12442 |

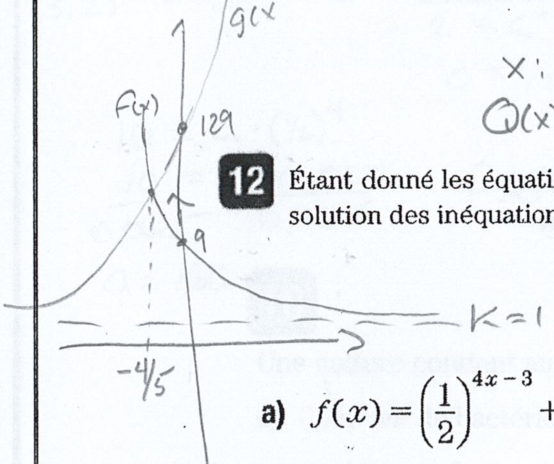
**b)** Après combien d'années le nombre initial d'abeilles aura-t-il doublé ? 4 ans

**c)** Trouvez une équation exponentielle qui pourrait modéliser cette situation.

$Q(x) = 5000 \cdot (1{,}2)^x$

x : nb années

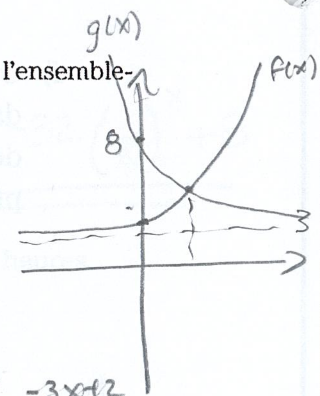
Q(x) : quantité d'abeilles




**12** Étant donné les équations définissant les fonctions $f$ et $g$ ci-dessous, déterminez l'ensemble-solution des inéquations définies de la façon suivante.

1) $f(x) \geq g(x)$

2) $f(x) < g(x)$




**a)** $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{4x-3} + 1$

$g(x) = 4 \cdot 2^{x+5} + 1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-3} \cancel{+1} = 4 \cdot 2^{x+5} \cancel{+1}$

$(2^{-1})^{4x-3} = 2^2 \cdot 2^{x+5}$

$2^{-4x+3} = 2^{x+7}$

$\Rightarrow -4x+3 = x+7$

$-4 = 5x$

$x = -4/5$

$f(x) \geq g(x) \rightarrow x \in ]-\infty, -4/5]$

$f(x) < g(x \rightarrow x \in ]-4/5, +\infty[$

**b)** $f(x) = 5 \cdot 25^{x-4} + 3$

$g(x) = \dfrac{1}{5} \cdot 5^{-3x+2} + 3$

$5 \cdot 25^{x-4} \cancel{+3} = \frac{1}{5} \cdot 5^{-3x+2} \cancel{+3}$

$5 \cdot (5^2)^{x-4} = 5^{-1} \cdot 5^{-3x+2}$

$5^1 \cdot 5^{2x-8} = 5^{-3x+1}$

$5^{2x-7} = 5^{-3x+1}$

$\Rightarrow 2x-7 = -3x+1$

$5x = 8$

$x = 8/5$

$f(x) \geq g(x) \rightarrow x \in [8/5, +\infty[$

$f(x) < g(x) \rightarrow x \in ]-\infty, 8/5[$

**13** Lorsqu'on place une somme d'argent (appelée *capital*) à un certain taux d'intérêt annuel, le capital accumulé et le temps écoulé sont liés par une fonction exponentielle qui peut être définie comme ci-dessous.

$C(t)$ : capital accumulé

$$C(t) = C_0\left(1+\frac{i}{k}\right)^{kt}$$

$C_0$ : capital investi au départ

$i$ : taux d'intérêt annuel

$k$ : nombre de fois par année que les intérêts sont ajoutés au capital (intérêts composés)

$t$ : durée en années de l'investissement

**a)** Éléonore reçoit un héritage de 25 000 $. Comme elle n'a que cinq ans, ses parents décident de placer cette somme pour 15 ans dans une obligation d'épargne du Québec à intérêts composés réinvestis annuellement, au taux annuel de 7 %.

1) Donnez la règle qui permet de déterminer le capital accumulé selon les années.

2) Quand Éléonore aura 18 ans, à combien sa « fortune » s'élèvera-t-elle ?

3) Estimez en combien d'années la somme s'élèvera à plus de 35 000 $.

$C_0 = 25000\,\$$

$t = 15\text{ans}$

$i = 7\%$

$C(t) = ?$

$K = 1$

1) $C(t) = 25000\left(1+\frac{0,07}{1}\right)^{1\cdot t}$

$C(t) = 25000\,(1,07)^t$

ou

$Q_i = 25000$

$Q_F = ?$

$C = 100\% + 7\% = 107\%$
$1,07$

$n = \frac{t}{f} = \frac{t}{1}$

$Q_F = 25000(1,07)^t$

2) $t = 13$

$C(13) = 25000\,(1.07)^{13}$

$C(13) = 60246,13\,\$$

3) $\frac{35000}{25000} = \frac{25000}{25000}(1,07)^t$

$1,4 = 1,07^t$

avec la calculatrice

$t \approx 4,97$

**b)** Julie a 6000 $ à placer. Son institution bancaire lui propose les placements ci-dessous, tous deux à intérêts composés.

- Placement 1 : calculés au taux annuel de 8 %, les intérêts sont réinvestis annuellement.
- Placement 2 : calculés au taux annuel de 2 %, les intérêts sont réinvestis tous les trois mois. ↳ 4 fois

Dans chaque cas, estimez en combien de temps Julie obtiendrait au moins 10 000 $. Quel placement devrait-elle choisir ? Expliquez votre réponse.

$\frac{2\%}{4} = 0,5\%$

1

$Q_i = 6000\$$
$Q_F = ?$
$C = 100\% + 8\% = 108\%$
$1,08$

$n = \frac{t}{f} = \frac{t}{1}$

$Q_F = 6000(1,08)^x$
$10000 = 6000(1,08)^x$
$1,\bar{6} = 1,08^x$
avec calculatrice
$x \approx 6,64$ années

2

$Q_i = 6000\$$
$Q_F = ?$
$C = 100\% + 0,5\% = 100,5\%$
$1,005$

$n = \frac{t}{f} = \frac{t}{1/4} = 4t$

$Q_F = 6000(1,005)^{4x}$
$10000 = 6000(1,005)^{4x}$
$1,\bar{6} = (1,005)^{4x}$
avec calculatrice
$x \approx 25,6$ années

Donc le placement 1 est plus avantageux.

**c)** Après un placement de trois ans au taux annuel de 10 % et où les intérêts étaient réinvestis tous les six mois, un investissement a rapporté 20 101,50 $. Quel était le capital initial ?

$Q_i = ?$
$Q_F = 20101,50$
$n = \frac{t}{f} = \frac{3\text{ans}}{1/2\text{an}} = 6$
$C = 100\% + 5\% = 105\%$
$1,05$

$\frac{10\%}{2} = 5\%$

$20101,50 = Q_i \cdot (1,05)^6$

$Q_i = \frac{20101,5}{1,05^6}$

$Q_i = 15000$

Donc 15000 $ de capital initial

**d)** Grâce aux intérêts composés, réinvestis annuellement, une somme de 1000 $ placée durant 10 ans a permis d'accumuler un capital de 1668,10 $. Quel était le taux d'intérêt, au centième près ?

$Q_i = 1000\$$
$Q_F = 1668,10\$$
$C = ?$
$n = \frac{t}{f} = \frac{10\text{ans}}{1}$

$1668,10 = 1000(C)^{10}$
$(1,6681)^{1/10} = (C^{10})^{1/10}$
$C = 1,0525$

$C = 105,25\%$
donc
$5,25\%$

**e)** On obtient la somme de 615,72 $ après avoir placé pour trois ans un capital initial de 500 $ à 7 % d'intérêt annuel. Combien de fois par année les intérêts étaient-ils ajoutés au capital ?

$Q_i = 500\$$
$Q_F = 615,72\$$
$C = \left(1 + \frac{i}{K}\right) = 1 + \frac{0,07}{K}$
$n = \frac{t}{f} = \frac{3\text{ans}}{1/K} = 3K$

$615,72 = 500 \cdot \left(1 + \frac{0,07}{K}\right)^{3K}$

$1,23144 = \left(1 + \frac{0,07}{K}\right)^{3K}$

avec calculatrice
$\approx 4$ fois

**15** En 1987, on prévoyait que la population de la terre, alors estimée à $5{,}0 \times 10^9$ personnes, augmenterait de 1,60 % par année. En 2007, 20 ans plus tard, la population mondiale était estimée à un minimum de 6 625 000 000 d'êtres humains.

**a)** Selon l'estimation de croissance annuelle de 1987, quelle aurait dû être la population mondiale en 2007 ?

$Q_i = 5 \times 10^9$

$Q_f = ?$

$C = 100\% + 1{,}6\% = 101{,}6\% = 1{,}016$

$n = \frac{t}{f} = \frac{20}{1}$

$Q_f = (5 \times 10^9) \cdot (1{,}016)^{20}$

$Q_f = 6\,868\,219\,453$ personnes

**b)** Pour obtenir une prévision plus juste de la population en 2007, quel pourcentage d'augmentation aurait-il fallu utiliser en 1987 ?

$6\,625\,000\,000 = 5 \times 10^9 \, (C)^{20}$

$(1{,}325)^{1/20} = (C^{20})^{1/20}$

$C = 1{,}01417008$

$\downarrow$

$100\% + 1{,}417\%$

donc 1,417 % d'augmentation

**c)** En utilisant le taux de croissance trouver en b), détermine la règle qui permet de calculer le nombre d'années écoulées depuis 1987 en fonction de la population mondiale.

(réciproque)

$Q(x) = 5 \times 10^9 \, (1{,}01417)^x$

$\frac{Q(x)}{5 \times 10^9} = 1{,}01417^x$

$x = \log_{1{,}01417}\left(\frac{Q(x)}{5 \times 10^9}\right)$

$x$ : nb. d'années écoulées

$Q(x)$ : Population mondiale.