CORRIGÉ DU VOLUME

VISION 6 : Les Coniques

Mathématique 5^{e} secondaire

Sciences naturelles

VISION 6 | Les coniques

RÉVISION 6

Réactivation 1 — Page 156

a. 1) (0, 10) 2) (40, 30) 3) (40, 10)

b. Un triangle rectangle.

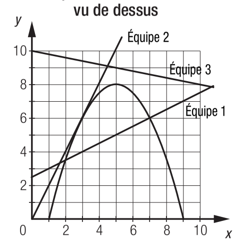
c. 1) 40 km 2) 20 km 3) $\sqrt{40^2 + 20^2} = 20\sqrt{5}$ km ou ≈ 44,72 km

d. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{30 - 10}{40 - 0} = \frac{1}{2}$

e. 1) $y = \frac{x}{2} + 10$ 2) $x - 2y + 20 = 0$

Réactivation 2 — Page 157

a. Déplacement du robot vu de dessus



On remarque que l'œuf lancé par l'équipe **1** peut atteindre le robot à deux endroits, que celui lancé par l'équipe **2** peut l'atteindre à un seul endroit et que celui lancé par l'équipe **3** ne l'atteindra jamais.

b. On a utilisé la méthode de comparaison.

c. 1) Une équation du second degré.

2) $x_1 = \frac{-4,5 + \sqrt{4,5^2 - 4 \times -0,5 \times -7}}{2 \times -0,5} = 2$ et $x_2 = \frac{-4,5 - \sqrt{4,5^2 - 4 \times -0,5 \times -7}}{2 \times -0,5} = 7$.

Les valeurs qui satisfont cette équation sont donc 2 et 7.

d. On substitue, à la variable x, les valeurs obtenues précédemment :
$y_1 = 0,5 \times 2 + 2,5 = 3,5$
$y_2 = 0,5 \times 7 + 2,5 = 6$
Les coordonnées des points d'impact possibles sont (2, 3,5) et (7, 6).

e. 1) Les coordonnées du point d'impact possible sont (3, 6).
2) Il n'existe aucun point d'impact possible.

Mise à jour — Page 160

1. a) $y = 2x - 1$ **b)** $y = -4x + 2$ **c)** $x = 2$
d) $y = \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}$ **e)** $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ **f)** $y = -2$

2. a) $x_1 \approx 5,52$ et $x_2 \approx 0,48$. **b)** $x_1 = 12$ et $x_2 = -12$. **c)** $x_1 = -5$ et $x_2 = 2$.
d) $x_1 \approx 0,2$ et $x_2 \approx -10,2$. **e)** $x_1 \approx 2,43$ et $x_2 \approx -0,93$. **f)** $x_1 = 5$

Mise à jour (*suite*) — Page 161

3. m $\overline{AB}$ = 5 u m $\overline{CD}$ = 7 u m $\overline{EF} = \sqrt{29}$ u m $\overline{GH} = \sqrt{90}$ u

4. a) 5 u **b)** 10 u **c)** 13 u **d)** ≈ 13,34 u **e)** ≈ 4,47 u **f)** ≈ 6,32 u

5.

Équation de la droite	Pente	Abscisse à l'origine	Ordonnée à l'origine
$y = -25x - 75$	**-25**	**-3**	**-75**
$\mathbf{y = 3x - 8}$	3	$\mathbf{\frac{8}{3}}$	-8
$y = 12$	**0**	**Aucune**	**12**
$\mathbf{y = -\frac{3}{4}x + 60}$	$\mathbf{-\frac{3}{4}}$	80	60
$x = -5$	**N'existe pas**	**-5**	**Aucune**
$\mathbf{y = -2}$	**0**	Aucune	-2
$\mathbf{x = -2}$	**N'existe pas**	-2	Aucune

6. a) 2 solutions. **b)** 2 solutions. **c)** 2 solutions. **d)** 2 solutions.
e) Aucune solution. **f)** Aucune solution. **g)** 1 solution. **h)** Aucune solution.
i) 1 solution. **j)** 1 solution.

Mise à jour (*suite*) — Page 162

7. a) $y = 5x + 2$ **b)** $y = -4x + 12$ **c)** $y = \frac{2}{3}x - 5$
d) $y = 2x$ **e)** $y = -\frac{5}{4}x + 10$ **f)** $y = \frac{5}{4}x - \frac{9}{2}$

8. L'équation de la droite orange est $y = -2x + 60$, celle de la droite verte, $y = 2,5x - 52,5$, et celle de la droite rose, $y = 0,25x + 26,25$.

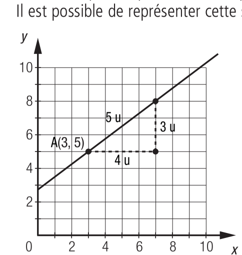
9. a) En posant l'équation $x^2 - 5x + 1 = 2x - 6$, on obtient $x^2 - 7x + 7 = 0$.
Ainsi, $x_1 = \frac{-(-7) + \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 1 \times 7}}{2 \times 1}$, soit ≈ 5,79 et $x_2 = \frac{-(-7) - \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 1 \times 7}}{2 \times 1}$, soit ≈ 1,21.
On obtient donc $y_1 \approx 5,58$ et $y_2 \approx -3,58$.
Les solutions sont (≈ 5,79, ≈ 5,58) et (≈ 1,21, ≈ -3,58).

b) (-3, -4) et (-1, -4). **c)** (-1, -6)

d) En posant l'équation $4x^2 - 10x + 25 = 10x - 10$, on obtient $4x^2 - 20x + 35 = 0$.
Ainsi, $x_1 = \frac{-(-20) + \sqrt{(-20)^2 - 4 \times 4 \times 35}}{2 \times 4}$ et $x_2 = \frac{-(-20) - \sqrt{(-20)^2 - 4 \times 4 \times 35}}{2 \times 4}$.
Ces équations n'ont aucune solution, puisque $(-20)^2 - 4 \times 4 \times 35 = -160$.

e) Aucune solution. **f)** (≈ -9,51, ≈ -1,65) et (≈ 0,71, ≈ 1,41).
g) (2, 16) **h)** (-2, 13) et (2, 13).
i) Aucune solution.

10. *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*
Il est possible de représenter cette situation par le graphique suivant.



Comme les coordonnées du point recherché se situent à une distance de 15 unités du point A, les abscisses augmentent, ou diminuent, de 12 unités et les ordonnées augmentent, ou diminuent, de 9 unités.
Il existe deux solutions : (15, 14) et (-9, -4).

11. a) $\sqrt{208}$ km ou ≈ 14,42 km. **b)** $\sqrt{180}$ km ou ≈ 13,42 km. **c)** $\sqrt{52}$ km ou ≈ 7,21 km.

Mise à jour (*suite*) **Page 163**

12. Résoudre le système d'équations :
$y = -0{,}02x^2 + 0{,}4x$
$y = 0{,}75$
Donc, $x_1 \approx 2{,}09$ et $x_2 \approx 17{,}91$.
Le frappeur frappe la balle lorsqu'elle retombe, donc la seule valeur possible est la seconde. La distance horizontale parcourue par la balle est environ de 17,91 m.

13. a) 1) L'équation de la droite qui passe par la plus petite corde est $y = -0{,}5x + 0{,}6$. On détermine les valeurs de x et de y qui satisfont le système d'équations :
$y = -0{,}5x + 0{,}6$
$y = 2x^2 - 4x + 2$
Les solutions sont (≈ 0,62, ≈ 0,29) et (≈ 1,13, ≈ 0,034).
La longueur de la plus petite corde est donc d'environ 0,57 m.

2) L'équation de la droite qui passe par la plus longue corde est $y = -0{,}5x + 0{,}8$. On détermine les valeurs de x et de y qui satisfont le système d'équations :
$y = -0{,}5x + 0{,}8$
$y = 2x^2 - 4x + 2$
Les solutions sont (≈ 0,47, ≈ 0,57) et (≈ 1,28, ≈ 0,16).
La longueur de la plus longue corde est donc d'environ 0,91 m.

b) Les coordonnées du point A sont (0,4, 0,72), puisque $x = 0{,}4$, alors $y = 2 \times 0{,}4^2 - 4 \times 0{,}4 + 2 = 0{,}72$.
Les coordonnées du point B sont (1,4, 0,32), puisque $x = 1{,}4$, alors $y = 2 \times 1{,}4^2 - 4 \times 1{,}4 + 2 = 0{,}32$.
La distance qui sépare les extrémités A et B de la harpe est donc d'environ 1,08 m.

Mise à jour (*suite*) **Page 164**

14. a) 1) $10x + 18$ **2)** $6x^2 + 22x + 20$

b) 1) $P = 10x + 18$
$48 = 10x + 18$
$x = 3$
Les côtés mesurent donc $3 \times 3 + 5 = 14$ m et $2 \times 3 + 4 = 10$ m.
Les dimensions de ce terrain sont de 14 m sur 10 m.

2) $A = 6x^2 + 22x + 20$
$315 = 6x^2 + 22x + 20$
$0 = 6x^2 + 22x - 295$
$x_1 \approx 5{,}41$ et $x_2 \approx -9{,}08$.
On doit rejeter x_2. Les côtés mesurent donc $3 \times 5{,}41 + 5 = 21{,}23$ m et $2 \times 5{,}41 + 4 = 14{,}82$ m.
Les dimensions de ce terrain sont de 21,23 m sur 14,82 m.

15. a)
- Entre les cages A et B, la pente du segment est de $-\frac{11}{3}$ et la distance est d'environ 11,4 m.
- Entre les cages B et C, la pente du segment est de $\frac{1}{8}$ et la distance est d'environ 8,06 m.
- Entre les cages C et D, la pente du segment est de $-\frac{4}{3}$ et la distance est de 5 km.

b) Non. Il faut aussi indiquer le sens du déplacement.

Mise à jour (*suite*) **Page 165**

16. a) 1) La pente du segment qui correspond à la rue Gagné est $\frac{4}{3}$, car $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{24 - 0}{18 - 0} = \frac{4}{3}$.

2) La pente du segment qui correspond à la rue de la Rivière est $-\frac{3}{4}$, car $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{24 - 18}{18 - 26} = -\frac{3}{4}$.

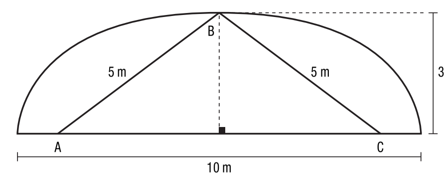
b) Ces deux rues sont perpendiculaires puisque la pente de l'une est l'opposé de l'inverse de l'autre.

17. L'équation de la droite qui correspond à la rampe sur laquelle la bille se déplace est $y = -0{,}1x + 8$.
On détermine les valeurs de x et de y qui satisfont le système d'équations :
$y = -0{,}1x + 8$
$y = \frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 8$
Les solutions sont (0, 8) et (11,1, 6,89).
La bille parcourt donc environ 11,16 cm.
La bille doit parcourir environ 11,16 cm en 2 s. Sa vitesse doit donc être d'environ 5,58 cm/s.

SECTION 6.1 Le cercle et l'ellipse

Problème **Page 166**

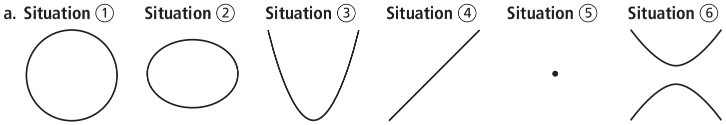
Puisque la distance parcourue par le son entre les personnes A et C est constante, peu importe l'emplacement du point B, si les positions des personnes A et C sont fixes et que la station admet un axe de symétrie, on obtient le schéma ci-dessous.



Distance entre les points A et C : $2 \times \sqrt{5^2 - 3^2} = 8$ m
La distance entre les personnes A et C est de 8 m.

Activité 1 **Page 168**

a. **Situation ①** **Situation ②** **Situation ③** **Situation ④** **Situation ⑤** **Situation ⑥**



b. 1) Elle correspond à une droite. **2)** Elle correspond à un point.

c. 1) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* La figure définie à la situation ② est une figure bornée, alors que celle définie à la situation ③ est non bornée.

2) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* Les figures définies dans les deux situations sont non bornées. La figure définie à la situation ③ comprend une seule courbe, alors que celle définie à la situation ⑥ comprend deux sections de courbe.

Activité 2 **Page 169**

a. 1) A : 50 u B : 50 u C : 50 u D : 50 u
E : 50 u F : 50 u G : 50 u H : 50 u

2) Tous ces points se trouvent à la même distance de l'origine.

3) On peut associer l'ensemble de ces points à un cercle.

b. Le segment OP correspond au rayon du cercle.

c. 1) $d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2}$

2) Comme la distance du point P à l'origine du plan cartésien correspond au rayon r du cercle, on a l'équation $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
En élevant cette expression au carré, on obtient l'équation $r^2 = x^2 + y^2$.

d. $x^2 + y^2 = 50^2$ ou $x^2 + y^2 = 2500$.

Activité 3

Page 170

a. 1) $1{,}94 + 3{,}06 = 5$ 2) $2{,}5 + 2{,}5 = 5$ 3) $0{,}58 + 4{,}42 = 5$

b. La somme des distances entre le point A et n'importe quel point situé sur le pourtour du cadran et entre ce même point et le point B est constante.

c. 1) $\frac{x^2}{2{,}5^2} + \frac{y^2}{1{,}5^2} = 1$

2) Pour le point C, dont les coordonnées sont (−0,7, 1,44) : $\frac{(-0{,}7)^2}{2{,}5^2} + \frac{1{,}44^2}{1{,}5^2} = \frac{0{,}49}{6{,}25} + \frac{2{,}0736}{2{,}25} = 0{,}0784 + 0{,}9216 = 1$.

Pour le point D, dont les coordonnées sont (0, 1,5) : $\frac{0^2}{2{,}5^2} + \frac{1{,}5^2}{1{,}5^2} = 0 + \frac{2{,}25}{2{,}25} = 0 + 1 = 1$.

Pour le point E, dont les coordonnées sont (−2,4, −0,42) : $\frac{(-2{,}4)^2}{2{,}5^2} + \frac{(-0{,}42)^2}{1{,}5^2} = \frac{5{,}76}{6{,}25} + \frac{0{,}1764}{2{,}25} = 0{,}9216 + 0{,}0784 = 1$.

Technomath

Page 171

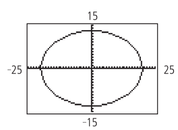
a. 1) (−10, 0), (10, 0), (0, −2) et (0, 2). 2) (−10, 0), (10, 0), (0, −5) et (0, 5). 3) (−10, 0), (10, 0), (0, −8) et (0, 8).

b. 1) 8 2) 5 3) 2

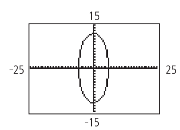
c. *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*
Plus l'écart entre les paramètres Ⓐ et Ⓑ est petit, plus l'ellipse tend à se rapprocher d'un cercle.

d. *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*
2Ⓐ : la distance entre les points d'intersection de la courbe et de l'axe des abscisses.
2Ⓑ : la distance entre les points d'intersection de la courbe et de l'axe des ordonnées.

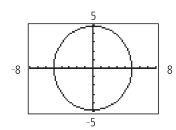
e. 1)



2)



3)



Mise au point 6.1

Page 176

1. a) $x^2 + y^2 = 64$ b) $x^2 + y^2 = 582{,}5$ c) $x^2 + y^2 = 144$
d) $x^2 + y^2 = 625$ e) $x^2 + y^2 = 73$ f) $x^2 + y^2 = 40$

2. a) 7 b) 15 c) 5,5 d) 14 e) 5,3 f) $\sqrt{5}$

Mise au point 6.1 (*suite*)

Page 177

3. a) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ b) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{256} = 1$ c) $\frac{x^2}{289} + \frac{y^2}{196} = 1$
d) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{729} = 1$ e) $\frac{x^2}{210{,}25} + \frac{y^2}{110{,}25} = 1$ f) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$

4. a) 1) (13, 0), (−13, 0), (0, 5) et (0, −5) ; 2) (12, 0) et (−12, 0).
b) 1) (6, 0), (−6, 0), (0, 10) et (0, −10) ; 2) (0, 8) et (0, −8).
c) 1) (8,5, 0), (−8,5, 0), (0, 7,5) et (0, −7,5) ; 2) (4, 0) et (−4, 0).
d) 1) (20, 0), (−20, 0), (0, 29) et (0, −29) ; 2) (0, 21) et (0, −21).
e) 1) (30, 0), (−30, 0), (0, 18) et (0, −18) ; 2) (24, 0) et (−24, 0).
f) 1) (12,5, 0), (−12,5, 0), (0, 3,5) et (0, −3,5) ; 2) (12, 0) et (−12, 0).

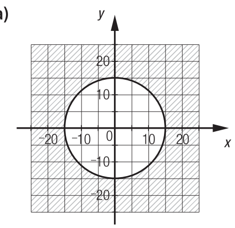
Mise au point 6.1 (*suite*)

Page 178

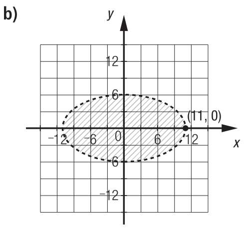
5. a) $x^2 + y^2 = 16$ b) $x^2 + y^2 = 544$ c) $x^2 + y^2 = 169$ d) $x^2 + y^2 = 100$

6. a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ b) $\frac{x^2}{42{,}25} + \frac{y^2}{90{,}25} = 1$ c) $\frac{x^2}{289} + \frac{y^2}{64} = 1$ d) $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{225} = 1$ e) $\frac{x^2}{11\,025} + \frac{y^2}{21\,025} = 1$

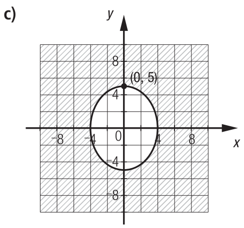
7. a)



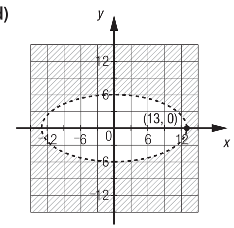
b)



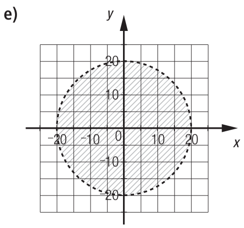
c)



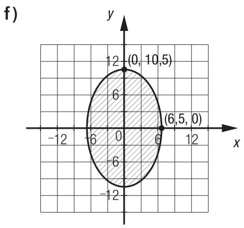
d)



e)



f)



8.

Équation de l'ellipse	Coordonnées des sommets	Longueur du plus grand axe	Longueur du plus petit axe	Coordonnées des foyers
$\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{841} = 1$	**(20, 0), (−20, 0) (0, 29), (0, −29)**	**58 u**	**40 u**	**(0, 21), (0, −21)**
$\mathbf{\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{225} = 1}$	(0, 15), (9, 0) (0, −15), (−9, 0)	**30 u**	**18 u**	**(0, 12), (0, −12)**
$\mathbf{\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1}$	**(13, 0), (−13, 0) (0, 5), (0, −5)**	26 u	**10 u**	(12, 0), (−12, 0)
$\mathbf{\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{210{,}25} = 1}$	**(10, 0), (−10, 0) (0, 14,5), (0, −14,5)**	**29 u**	20 u	(0, 10,5), (0, −10,5)
Deux réponses possibles : $\mathbf{\frac{x^2}{5329} + \frac{y^2}{2304} = 1}$ **ou** $\mathbf{\frac{x^2}{2304} + \frac{y^2}{5329} = 1}$	*Deux réponses possibles :* **(73, 0), (−73, 0) (0, 48), (0, −48) ou (48, 0), (−48, 0) (0, 73), (0, −73)**	146 u	96 u	*Deux réponses possibles :* **(55, 0), (−55, 0) ou (0, 55), (0, −55)**

Mise au point 6.1 (*suite*)

Page 179

9. a) $x^2 + y^2 \leq 9$ b) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} < 1$ c) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} > 1$
d) $x^2 + y^2 > 13{,}69$ e) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 1$ f) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{625} \leq 1$

10. a) Puisque le périmètre $P \approx \pi\left(3(a + b) - \sqrt{(a + 3b)(3a + b)}\right)$ et que les valeurs des paramètres a et b sont respectivement 48 et environ 87,37, on obtient :

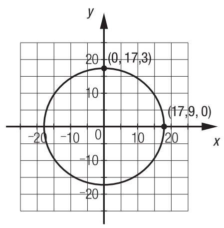
$P \approx \pi\left(3(48 + 87{,}37) - \sqrt{(48 + 3 \times 87{,}37)(3 \times 48 + 87{,}37)}\right)$
$\approx \pi(138{,}24)$
$\approx 138{,}24 \times \pi$

Le périmètre est environ de 434,31 u.

b) Puisque l'aire $A = \pi ab$, on obtient :
$A \approx \pi \times 48 \times 87{,}37$
L'aire est environ de 13 174,64 u².

Mise au point 6.1 (*suite*) — Page 180

11. a) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*



b) D'après le graphique ci-contre, a = 17,9, b = 17,3 et c est établi par $a^2 + b^2 = c^2$, car a > b.
$17{,}9^2 = 17{,}3^2 + c^2 \Rightarrow c \approx 4{,}6$
Les coordonnées des foyers sont (≈ 4,6, 0) et (≈ –4,6, 0).

12. a) $x^2 + y^2 = 3600$

b) (60, 0), (–60, 0), (52, 30), (–52, 30), (52, –30), (–52, –30), (30, 52), (–30, 52), (30, –52), (–30, –52), (0, 60) et (0, –60).

13. a) $x^2 + y^2 = 9$ **b)** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

Mise au point 6.1 (*suite*) — Page 181

14. a) Il est possible de déduire que la valeur du paramètre a est 200 et que celle du paramètre c est 375. À l'aide de la relation $a^2 + c^2 = b^2$, on peut déduire que la valeur du paramètre b est 425.

L'inéquation qui correspond à la surface du lac est $\frac{x^2}{40\,000} + \frac{y^2}{180\,625} \leq 1$.

b) La distance minimale est de 425 − 375 = 50 m.

c) La distance qui sépare l'entraîneur de chacune des bouées est de 425 m.

15. a) La piscine **A** a la forme d'un cercle et la piscine **B**, celle d'une ellipse.

b) Piscine **A** :
Puisque la corde tendue mesure 4 m, le rayon du cercle mesure 4 m. L'équation qui correspond au pourtour de cette piscine est $x^2 + y^2 = 16$.
Piscine **B** :
Plusieurs réponses possibles. Exemple :
Il est possible de déduire les paramètres a et b à partir du paramètre c, qui vaut 3, et du paramètre a, qui vaut 5. L'équation qui correspond au pourtour de cette piscine est $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

c) 1) La largeur maximale de la piscine **A** est de 8 m (diamètre du cercle).
2) La largeur maximale de la piscine **B** est de 10 m (longueur du plus grand axe de l'ellipse).

Mise au point 6.1 (*suite*) — Page 182

16. a) L'inéquation qui correspond à la surface de ce terrain est $x^2 + y^2 \leq 2500$.

b) 1) Circonférence du terrain : $\pi \times 100 \approx 314{,}16$ m
Coût total de la clôture : $12 \times 314{,}16 \approx 3769{,}92$ $

2) Aire du terrain : $\pi \times 50^2 \approx 7853{,}98$ m²
Coût total du gazonnement : $8 \times 7853{,}98 \approx 62\,831{,}85$ $

17. a) L'équation de la petite ellipse est $\frac{x^2}{1190{,}25} + \frac{y^2}{361} = 1$.
L'équation de la grande ellipse est $\frac{x^2}{4422{,}25} + \frac{y^2}{2550{,}25} = 1$.

b) À l'aide de la relation $b^2 + c^2 = a^2$, il est possible de déduire les coordonnées de chaque drapeau.
Drapeau A : (≈ –43,27, 0) Drapeau B : (≈ –28,8, 0)
Drapeau C : (≈ 28,8, 0) Drapeau D : (≈ 43,27, 0)

c) 1) La distance entre les drapeaux A et B est environ de 14,47 m.
2) La distance entre les drapeaux B et C est environ de 57,6 m.
3) La distance entre les drapeaux A et D est environ de 86,54 m.

Mise au point 6.1 (*suite*) — Page 183

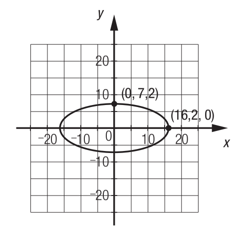
18. a) L'équation du petit cercle est $x^2 + y^2 = 9$.
L'équation de l'ellipse est $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} = 1$.
L'équation du grand cercle est $x^2 + y^2 = 64$.

b) $x^2 + y^2 < 9$

c) 1) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} < 1$
$x^2 + y^2 > 9$

2) $x^2 + y^2 < 64$
$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} > 1$

19. a) *Plusieurs réponses possibles. Exemple* :



L'équation du cercle associé à cette situation est $x^2 + y^2 = 81$, car $6{,}5^2 + 6{,}23^2 \approx 81$. Le rayon de la pièce circulaire mesure environ 9 mm.

Le plus grand axe mesure 32,4 mm puisqu'il est 1,8 fois plus grand que le diamètre du cercle : $9 \times 2 \times 1{,}8 = 32{,}4$.

Le plus petit axe mesure 14,4 mm puisqu'il est 1,25 fois plus petit que le diamètre du cercle : $9 \times 2 \div 1{,}25 = 14{,}4$.

b) $\frac{x^2}{262{,}44} + \frac{y^2}{51{,}84} = 1$

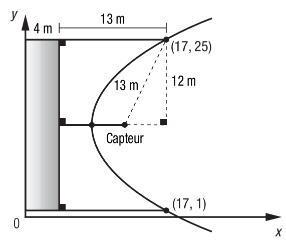
c) On peut déterminer les coordonnées de chaque foyer à l'aide de la relation $a^2 + c^2 = b^2$. Les coordonnées des foyers sont (≈ –14,51, 0) et (≈ 14,51, 0).

SECTION 6.2

L'hyperbole et la parabole

Problème
Page 184

Le capteur est situé sur l'axe de symétrie de la parabole et la distance de chacun des points de la parabole à la boîte de réception est égale à la distance de ce point au capteur, ce qu'on peut représenter par le graphique ci-contre.



Par la relation de Pythagore, on détermine que la base du triangle rectangle ainsi formé mesure 5 m.

À partir des coordonnées du point (17, 1), on peut déduire que les coordonnées du capteur sont (17 − 5, 25 − 12) = (12, 13).

Activité 1
Page 185

a. 1) 11,25 u 2) 3,25 u 3) 8 u

b. 1) 2,25 u 2) 10,25 u 3) 8 u

c. La valeur absolue de la différence des distances entre n'importe quel point situé sur la courbe et le point F_1 et entre ce même point et le point F_2 est constante.

d. 1) $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$

2) Pour le point A, dont les coordonnées sont (5,8, 3,15) : $\frac{5{,}8^2}{4^2} - \frac{3{,}15^2}{3^2} = \frac{33{,}64}{16} - \frac{9{,}9225}{9} = 2{,}1025 - 1{,}1025 = 1$

Pour le point B, dont les coordonnées sont (−5, −2,25) : $\frac{(-5)^2}{4^2} - \frac{(-2{,}25)^2}{3^2} = \frac{25}{16} - \frac{5{,}0625}{9} = 1{,}5625 - 0{,}5625 = 1$

e. 1) $y = \frac{3}{4}x$ et $y = -\frac{3}{4}x$. 2) $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$.

f. 1) 5 2) $\sqrt{a^2 + b^2}$

Activité 2
Page 186

a. 1) 6 u 2) 3 u 3) 9,75 u 4) 15 u

b. 1) 6 u 2) 3 u

3) $\sqrt{(6{,}75 - 3)^2 + (9 - 0)^2} = 9{,}75$ u 4) $\sqrt{(12 - 3)^2 + (12 - 0)^2} = 15$ u

c. Pour chacun des points, la distance est la même.

d. *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*
La parabole est une courbe dont tous les points sont situés à égale distance d'une droite fixe, appelée directrice, et d'un point fixe, appelé foyer.

e. On peut passer :
- de 1 à 2 en substituant les coordonnées d'un point de la courbe à *x* et à *y* ;
- de 2 à 3 en effectuant les opérations ;
- de 3 à 4 en isolant c.

f. 1) La valeur de c est identique. 2) La valeur de c est identique.

Activité 2 (*suite*)
Page 187

g. 1) $(x, -c)$ 2) (x, c) 3) (c, y) 4) $(-c, y)$

h. 1)
$$\begin{aligned} d(P, d) &= d(P, F)\\ \sqrt{(x-x)^2 + (y+c)^2} &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2}\\ (x-x)^2 + (y+c)^2 &= (x-0)^2 + (y-c)^2\\ 0 + y^2 + 2cy + c^2 &= x^2 + y^2 - 2cy + c^2\\ x^2 &= 4cy \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} d(P, d) &= d(P, F)\\ \sqrt{(x-x)^2 + (y-c)^2} &= \sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2}\\ (x-x)^2 + (y-c)^2 &= (x-0)^2 + (y+c)^2\\ 0 + y^2 - 2cy + c^2 &= x^2 + y^2 + 2cy + c^2\\ x^2 &= -4cy \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} d(P, d) &= d(P, F)\\ \sqrt{(x-c)^2 + (y-y)^2} &= \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}\\ (x-c)^2 + (y-y)^2 &= (x+c)^2 + (y-0)^2\\ x^2 - 2cx + c^2 + 0 &= x^2 + 2cx + c^2 + y^2\\ y^2 &= -4cx \end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned} d(P, d) &= d(P, F)\\ \sqrt{(x+c)^2 + (y-y)^2} &= \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\\ (x+c)^2 + (y-y)^2 &= (x-c)^2 + (y-0)^2\\ x^2 + 2cx + c^2 + 0 &= x^2 - 2cx + c^2 + y^2\\ y^2 &= 4cx \end{aligned}$$

Activité 3
Page 188

a. 1) 19,5 m 2) 6 m 3) 12 m 4) 19,5 m

b. 1) 19,5 m 2) 6 m 3) 12 m 4) 19,5 m

c. La distance qui sépare le tablier du pont d'un point est égale à la distance qui sépare ce même point du point d'attache.

d. 1) i) h = 0 ii) k = 13,5 iii) c = −6

2) Les coordonnées du sommet de la parabole sont (h, k) et la valeur absolue de c correspond à la distance entre le sommet et le foyer ou entre le sommet et le tablier (directrice).

e. Point A(−18, 0) : $(-18)^2 = -24(0 - 13{,}5)$
$324 = 324$

Point S(0, 13,5) : $0^2 = -24(13{,}5 - 13{,}5)$
$0 = 0$

Point E(12, 7,5) : $12^2 = -24(7{,}5 - 13{,}5)$
$144 = 144$

Point F(18, 0) : $18^2 = -24(0 - 13{,}5)$
$324 = 324$

Mise au point 6.2
Page 193

1. a) 1) (−2, 0) 2) $x = 2$ **b)** 1) (0, 0,5) 2) $y = -0{,}5$

c) 1) $\left(\frac{33}{4}, -3\right)$ 2) $x = \frac{7}{4}$ **d)** 1) $\left(12, \frac{-25}{4}\right)$ 2) $y = \frac{25}{4}$

e) 1) (5, 14) 2) $x = -21$ **f)** 1) (0, −2,1) 2) $y = -8{,}3$

2. a) $y^2 = -20x$ **b)** $x^2 = -80y$

c) $(y - 8)^2 = 0{,}4(x + 3)$ **d)** *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $(x - 5)^2 = 32(y + 10)$ ou $(x - 5)^2 = -32(y + 10)$.

e) $(y - 12)^2 = -24(x - 9)$

3. a) 1) (9, 0) et (−9, 0) ; 2) (15, 0) et (−15, 0). **b)** 1) (24, 0) et (−24, 0) ; 2) (30, 0) et (−30, 0).

c) 1) (0, 5) et (0, −5) ; 2) (0, 13) et (0, −13). **d)** 1) (4, 0) et (−4, 0) ; 2) (8,5, 0) et (−8,5, 0).

e) 1) (0, 20) et (0, −20) ; 2) (0, 20,5) et (0, −20,5). **f)** 1) (0, 11) et (0, −11) ; 2) (0, 61) et (0, −61).

4. a) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{576} = 1$ **b)** $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} = -1$ **c)** $\frac{x^2}{441} - \frac{y^2}{400{,}15} \approx 1$ **d)** $\frac{x^2}{5{,}0625} - \frac{y^2}{100} = -1$

e) Puisque l'équation d'une asymptote est $y = -\frac{7}{24}x$, on peut poser la proportion suivante :
$$\frac{7}{24} = \frac{b}{a}$$
$$\frac{7}{24} = \frac{28}{a}$$
$$a = 96$$
L'équation de l'hyperbole est donc $\frac{x^2}{9216} - \frac{y^2}{784} = -1$.

Mise au point 6.2 (*suite*)

Page 194

5. a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ **b)** $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} = -1$ **c)** $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{100} = -1$

d) $\frac{x^2}{1089} - \frac{y^2}{3136} = 1$ **e)** $\frac{x^2}{3024{,}8} - \frac{y^2}{2304} \approx -1$ **f)** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{1} = 1$

6.

Équation de la parabole	Coordonnées du sommet	Coordonnées du foyer	Équation de la directrice	Distance du foyer à la directrice
$(y-8)^2 = -44(x+2)$	**(-2, 8)**	**(-13, 8)**	$\boldsymbol{x = 9}$	**22**
$(x+13)^2 = 2(y-10)$	**(-13, 10)**	**(-13, 10,5)**	$\boldsymbol{y = 9{,}5}$	**1**
$\boldsymbol{(x-10)^2 = -24(y+12)}$	(10, -12)	**(10, -18)**	$y = -6$	**12**
$\boldsymbol{(x-2)^2 = -26(y+2)}$	(2, -2)	(2, -8,5)	$\boldsymbol{y = 4{,}5}$	**13**
$\boldsymbol{(y-8)^2 = -32(x-14)}$	(14, 8)	**(6, 8)**	$x = 22$	**16**
$\boldsymbol{(y+2)^2 = 10{,}8(x-2)}$	(2, -2)	(4,7, -2)	$\boldsymbol{x = -0{,}7}$	**5,4**

Mise au point 6.2 (*suite*)

Page 195

7. a) $x^2 = 24y$ **b)** $(x-5)^2 = 28{,}8(y+9)$ **c)** $(y+2)^2 = 2(x+4)$

d) $(x+10)^2 = -80(y-15)$ **e)** $y^2 = -8x$ **f)** $(y-0{,}5)^2 = 0{,}4(x+1{,}5)$

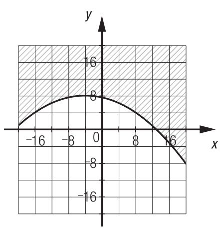
8.

Équation de l'hyperbole	Coordonnées des sommets	Coordonnées des foyers	Équation des asymptotes
$\frac{x^2}{5929} - \frac{y^2}{1296} = 1$	**(77, 0)** **(-77, 0)**	**(85, 0)** **(-85, 0)**	$\boldsymbol{y = \frac{36}{77}x}$ $\boldsymbol{y = -\frac{36}{77}x}$
$\boldsymbol{\frac{x^2}{6400} - \frac{y^2}{324} = -1}$	(0,18) (0, -18)	**(0, 82)** **(0, -82)**	$y = -\frac{9}{40}x$ $y = \frac{9}{40}x$
$\boldsymbol{\frac{x^2}{4225} - \frac{y^2}{5184} = -1}$	(0, 72) (0, -72)	(0, 97) (0, -97)	$\boldsymbol{y = \frac{72}{65}x}$ $\boldsymbol{y = -\frac{72}{65}x}$
$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{992{,}25} = -1$	**(0, 31,5)** **(0, -31,5)**	**(0, 32,5)** **(0, -32,5)**	$\boldsymbol{y = \frac{63}{16}x}$ $\boldsymbol{y = -\frac{63}{16}x}$
$\boldsymbol{\frac{x^2}{2{,}25} - \frac{y^2}{4} = 1}$	(1,5, 0) (-1,5, 0)	(2,5, 0) (-2,5, 0)	$\boldsymbol{y = \frac{4}{3}x}$ $\boldsymbol{y = -\frac{4}{3}x}$

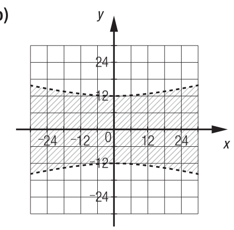
Mise au point 6.2 (*suite*)

Page 196

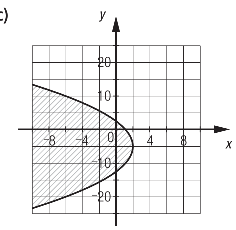
9. a)



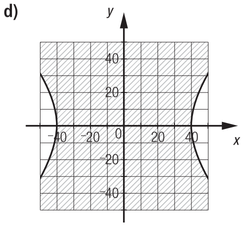
b)



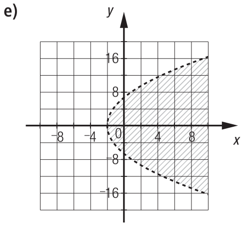
c)



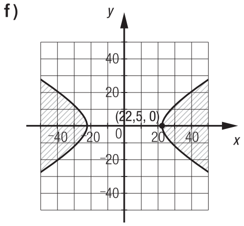
d)



e)



f)



10. $\frac{40}{9}$ est une fraction irréductible de l'expression $\frac{b}{a}$. On peut donc avoir b = 40 et a = 9, ou b = 20 et a = 4,5, ou b = 80 et a = 18, etc.

11. a) $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{144} < 1$ **b)** $(y-15)^2 \geq 60(x+30)$ **c)** $(x-8{,}5)^2 < -40(y-4{,}5)$

d) $\frac{x^2}{256} - \frac{y^2}{900} \leq -1$ **e)** $\frac{x^2}{8100} - \frac{y^2}{3136} \geq 1$ **f)** $(x+4)^2 \leq 6y$

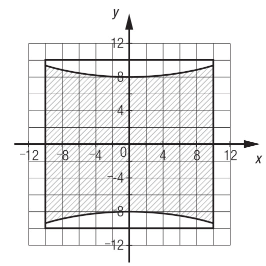
Mise au point 6.2 (*suite*)

Page 197

12. a) 1) $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$ **2)** $y = 2x$ et $y = -2x$.

b) $(\sqrt{5}, 0)$ et $(-\sqrt{5}, 0)$.

13. a) Ce jardin de fleurs correspond à la région hachurée à l'intérieur du carré.

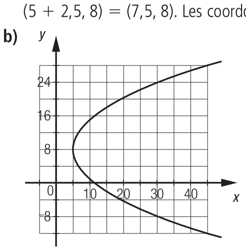


b) La largeur minimale du jardin de fleurs correspond à la distance entre les deux sommets de l'hyperbole, soit 16 m.

c) Non. Ce n'est pas possible, car les coordonnées des foyers de l'hyperbole sont (0, 17) et (0, -17). Les foyers sont donc situés à l'extérieur du terrain.

14. a) Comme l'équation de la trajectoire est $(y-8)^2 = 10(x-5)$, on en déduit que la valeur du paramètre c est $10 \div 4 = 2{,}5$. À l'aide des coordonnées du sommet, on détermine les coordonnées du foyer : $(5 + 2{,}5, 8) = (7{,}5, 8)$. Les coordonnées du Soleil sont donc (7,5, 8).

b)



c. La valeur du paramètre c est 2,5 et il s'agit de la distance minimale entre le sommet de la parabole et la directrice. La distance minimale qui sépare la trajectoire de la comète et celle du satellite est de 2,5 milliards de kilomètres.

Mise au point 6.2 (*suite*) — Page 198

15. a) Puisque les coordonnées du sommet sont (50, 0) et que la trajectoire passe par le point (80, −11,25), l'équation de la parabole associée à la trajectoire du sous-marin est $(x - 50)^2 = -80y$.

b) On cherche la valeur de y lorsque $x = 0$:

$(0 - 50)^2 = -80y$
$2500 = -80y$
$-31,25 = y$

La profondeur maximale atteinte par le sous-marin est de 31,25 m.

16. a) Les coordonnées du sommet de la parabole sont (0, 0) et la parabole passe par le point (20, 40). L'équation de la parabole associée au miroir parabolique concave est donc $y^2 = 80x$.

b) L'équation de l'hyperbole centrée à l'origine dont l'une des branches est associée au miroir hyperbolique convexe est $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{576} = 1$, puisque les coordonnées d'un des sommets sont (0, −10) et que les coordonnées d'un des foyers sont (−26, 0).

SECTION 6.3 L'intersection de coniques

Problème — Page 199

L'équation associée à l'hyperbole est $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{625} = 1$, car l'équation d'une des asymptotes est $y = 5x$ et les coordonnées d'un des sommets sont (5, 0).

On cherche les valeurs de x pour lesquelles $y = -63$.

$\frac{x^2}{25} - \frac{(-63)^2}{625} = 1$
$\frac{x^2}{25} = \frac{4594}{625}$
$x^2 = \frac{4594}{25}$
$x \approx \pm 13,56$

Le diamètre de la base circulaire de la tour est de $2 \times 13,56$ m, soit environ de 27,11 m.

Activité 1 — Page 200

a. 1) Le cercle qui correspond au sentier circulaire extérieur passe par le point (45, 0) et son rayon mesure 45 m. L'équation de ce cercle est donc $x^2 + y^2 = 2025$.

2) La droite qui correspond au sentier 1 passe par l'origine du plan cartésien et sa pente est $\frac{28 - -28}{21 - -21} = \frac{56}{42} = \frac{4}{3}$. L'équation de cette droite est donc $y = \frac{4}{3}x$.

b. $x^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2 = 2025$

c. $x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 2025$
$\frac{25}{9}x^2 = 2025$
$x^2 = 729$
$x_1 = 27$ et $x_2 = -27$.

Ces deux valeurs correspondent aux abscisses des points où se trouvent respectivement les personnes A et C.

d. 1) L'équation du cercle est $x^2 + y^2 = 2025$, on résout l'équation $27^2 + y^2 = 2025$. Les coordonnées du point où se trouve la personne A sont (27, 36).

2) L'équation du cercle est $x^2 + y^2 = 2025$, on résout l'équation $(-27)^2 + y^2 = 2025$. Les coordonnées du point où se trouve la personne C sont (−27, −36).

e. On résout l'équation $x^2 + \left(\frac{-3}{4}x\right)^2 = 2025$. Les coordonnées du point où se trouve la personne B sont (−36, 27).

Activité 2 — Page 201

a. Les coordonnées des deux points d'impact possibles sont (≈ −15, ≈ 7,5) et (≈ 15, ≈ 7,5).

b. 1) On isole d'abord x^2 dans chacune des équations. On peut ensuite passer :
- de 1 à 2, par la méthode de comparaison pour résoudre le système d'équations ;
- de 2 à 3, en écrivant l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$;
- de 3 à 4, en résolvant l'équation $6,25y^2 + 28,1254y - 625 = 0$.

2) Non, puisque les deux trajectoires ne se croisent pas pour $y = -12,5$.

3) On sait que $y = 8$, alors $x^2 = 28,125 \times 8$
$x^2 = 225$
$x_1 = 15$ et $x_2 = -15$.

Les coordonnées de chacun des points d'impact possibles sont (15, 8) et (−15, 8).

Technomath — Page 202

a. Il peut y avoir 0, 1 ou 2 points d'intersection.

b. Il peut y avoir 0, 1, 2, 3 ou 4 points d'intersection.

c. 1) (6, 8) et (−8, −6).
2) (≈ 1,46, ≈ 5,9), (≈ 3,14, ≈ −5,52), (≈ 5,09, ≈ −4,63) et (≈ 6,31, ≈ 3,69).

d. 1) (≈ −4,73, ≈ 6,45) et (≈ 2,32, ≈ −7,65).
2) (≈ 2,96, ≈ 8,34) et (≈ 7,22, ≈ 9,87).
3) (≈ −2,12, ≈ 1,25) et (≈ 6,12, ≈ −15,25).

Mise au point 6.3 — Page 204

1. a) Les équations des courbes sont $x = -4$ et $(x - 8)^2 = -24(y - 12)$. Le point d'intersection est (−4, 6).

b) Les équations des courbes sont $y = 24$ et $x^2 + y^2 = 32^2$. Les points d'intersection sont (≈ 21,17, 24) et (≈ −21,17, 24).

c) Les équations des courbes sont $y = 0,75x + 0,25$ et $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = -1$. Les points d'intersection sont (−4,2, −2,9) et (3, 2,5).

d) Les équations des courbes sont $y = 2x + 12$ et $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{256} = 1$. Les points d'intersection sont (≈ 1,9, ≈ 15,8) et (≈ −10,21, ≈ −8,41).

e) Les équations des courbes sont $y = -0,6x$ et $(y - 8)^2 = 20(x + 35)$. Les points d'intersection sont (−30, 18) et (≈ 58,89, ≈ −35,33).

f) Les équations des courbes sont $y = x + 12$ et $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{256} = 1$. Les points d'intersection sont (−12, 0) et (≈ 42,86, ≈ 54,86).

Mise au point 6.3 (*suite*) — Page 205

2. a) (15, 8) et (−15, 8).
b) (−7,8, 4) et (−7,8, −4).
c) (−7,5, 30), (0, −24) et (7,5, 30).
d) (3,6, 4,8) et (3,6, −4,8).
e) (≈ 4,74, ≈ −4,9), (≈ −4,74, ≈ −4,9), (≈ 4,24, 4) et (≈ −4,24, 4).
f) (34, 0)

3. a) Les équations des courbes sont $y^2 = \frac{25}{12}x$ et $x^2 + y^2 = 169$. Les points d'intersection sont (12, 5) et (12, −5).

b) Les équations des courbes sont $x^2 = 2(y + 9)$ et $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{49} = 1$. Les points d'intersection sont (≈ 2,09, ≈ −6,81), (≈ −2,09, ≈ −6,81), (≈ 5,4, ≈ 5,6) et (≈ −5,4, ≈ 5,6).

c) Les équations des courbes sont $y^2 = -40(x + 15)$ et $x^2 + y^2 = 625$. Les points d'intersection sont (≈ −20,31, ≈ 14,58) et (≈ −20,31, ≈ −14,58).

d) Les équations des courbes sont $y^2 = -12x$ et $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$.
Les points d'intersection sont $(-4, \approx 6{,}93)$ et $(-4, \approx -6{,}93)$.

e) Les équations des courbes sont $x^2 = -12(y - 29)$ et $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{841} = 1$.
Les points d'intersection sont $(\approx -19{,}83, -3{,}77)$, $(0, 29)$ et $(\approx 19{,}83, -3{,}77)$.

f) Les équations des courbes sont $x^2 = 8(y + 10)$ et $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} = -1$.
Les points d'intersection sont $(\approx 3{,}74, \approx -8{,}25)$, $(\approx -3{,}74, \approx -8{,}25)$, $(\approx 12{,}81, \approx 10{,}52)$ et $(\approx -12{,}81, \approx 10{,}52)$.

Mise au point 6.3 (*suite*)

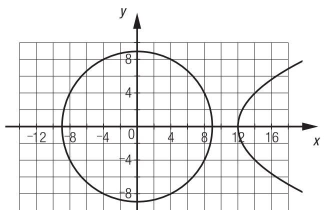
Page 206

4. a) (0,4, −10,1) **b)** (−11, −22,5) et (17, −22,5). **c)** (−24, −10) et (24, −10).
d) (19,2, 15) et (−19,2, −15). **e)** (40, 30) et (−30, −40). **f)** (−2, −11) et (−20, 7).
g) (≈ 12,71, ≈ 91,69) et (≈ −8,04, ≈ −74,32). **h)** (4, −6) et (≈ −4,94, ≈ −1,53). **i)** (−36, 0) et (60, 20).

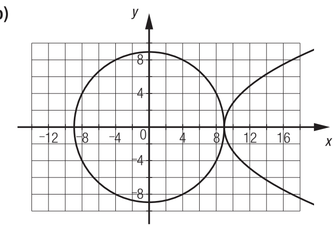
5. a) Aucun point. **b)** 2 points. **c)** 3 points. **d)** 1 point. **e)** 4 points. **f)** 2 points.

6. *Plusieurs réponses possibles. Exemples :*

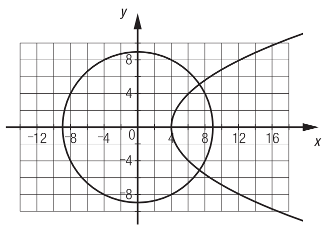
a)



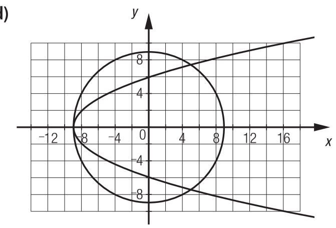
b)



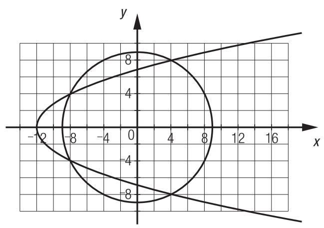
c)



d)



e)



7. a) (≈ 11,24, 6) et (≈ −11,24, 6).
b) (≈ −12,96, ≈ 5,18) et (10,2, −6,4).
c) (0, −8), (≈ 14,12, ≈ 4,46) et (≈ −14,12, ≈ 4,46).

8. a) 1) La droite qui passe par le centre du pont passe par les points (0, 20) et (10, 0), son équation est donc $y = -2x + 20$.
2) L'équation de l'ellipse associée au pourtour du lac est $\frac{x^2}{900} + \frac{y^2}{1600} = 1$, puisque les sommets sont (30, 0) et (0, 40).

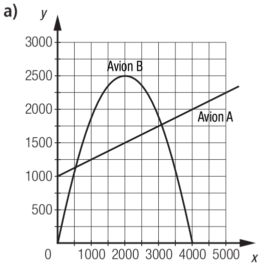
b) 1) (≈ −9,07, ≈ 38,13) **2)** (≈ 22,91, ≈ −25,82)

c) La distance qui sépare les deux piliers du pont est de $\sqrt{(22{,}91 - -9{,}07)^2 + (-25{,}82 - 38{,}13)^2} \approx 71{,}5$ dam.

Mise au point 6.3 (*suite*)

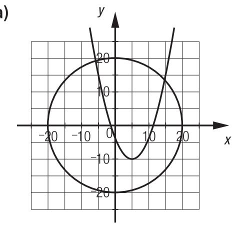
Page 207

9. a)



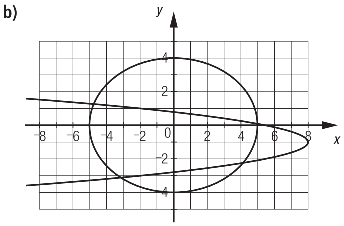
b) Équation à résoudre : $(x - 2000)^2 = -1600((0{,}25x + 1000) - 2500)$
$\Rightarrow x_1 \approx 3080{,}62$ et $x_2 \approx 519{,}38$.
Les valeurs de y correspondantes sont $y_1 \approx 1770{,}16$ et $y_2 \approx 1129{,}84$.
Les coordonnées des points où l'avion **B** passe exactement au-dessus de l'avion **A** sont (≈ 519,38, ≈ 1129,84) et (≈ 3080,62, ≈ 1770,16).

10. a)



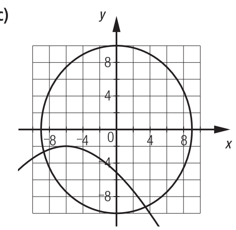
(≈ −5,8, ≈ 19,1) et (≈ 14,7, ≈ 13,6).

b)



(≈ −4,7, ≈ 1,3), (≈ −3,1, ≈ −3,1), (≈ 4,1, ≈ −2,2) et (≈ 4,99, ≈ 0,1).

c)



(≈ −8,69, ≈ −2,6) et (≈ 3,35, ≈ −9,28).

11. a) Équation à résoudre : $x^2 + (0{,}5x - 40)^2 = 14\,400 \Rightarrow x_1 \approx 118{,}45$ et $x_2 \approx -86{,}45$.
Les valeurs de y correspondantes sont $y_1 \approx 19{,}22$ et $y_2 \approx -83{,}22$.
Les points d'intersection sont (≈ −86,45, ≈ −83,22) et (≈ 118,45, ≈ 19,22).

b) Équation à résoudre : $x^2 = -24((0{,}5x - 40) - 120) \Rightarrow x_1 \approx 56{,}26$ et $x_2 \approx -68{,}26$.
Les valeurs de y correspondantes sont $y_1 \approx -11{,}87$ et $y_2 \approx -74{,}13$.
Les points d'intersection sont (≈ 56,26, ≈ −11,87) et (≈ −68,26, ≈ −74,13).

c) Équation à résoudre : $-24(y - 120) + y^2 = 14\,400 \Rightarrow y_1 \approx 120$ et $y_2 \approx -96$.
Les valeurs de x correspondantes sont $x_1 = 0$ et $x_2 = \pm 72$.
Les points d'intersection sont (0, 120), (72, −96) et (−72, −96).

Mise au point 6.3 (*suite*) — Page 208

12. a) 1) L'équation de la droite correspondant au fil de fer est $y = \frac{x}{3} - 10$, puisque la droite passe par les points (30, 0) et (60, 10).

2) L'équation de la courbe correspondant au canyon est $(x - 60)^2 = 20(y + 45)$, puisque le sommet de la parabole est (60, −45) et qu'elle passe par le point (30, 0).

b) 1) (30, 0) **2)** ($\approx$ 96,67, $\approx$ 22,22)

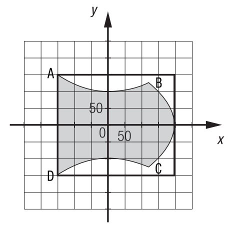
c) La distance parcourue par le funambule sur le fil de fer est de $\sqrt{(96{,}67 - 30)^2 + (22{,}22 - 0)^2} \approx 70{,}28$ m.

d) L'équation de la parabole est $(x - 60)^2 = 20(y + 45)$, donc $c = 20 \div 4 = 5$.
Les coordonnées du sommet sont (60, −45), les coordonnées du foyer et de l'emplacement de la caméra sont donc (60, −45 + 5) = (60, −40).

13. a) Pour les points A et D, on détermine les points d'intersection entre l'hyperbole et la droite. Pour les points B et C, on détermine les points d'intersection entre l'hyperbole et la parabole.
1) (−150, $\approx$ 141,42) **2)** ($\approx$ 118,69, $\approx$ 127,52) **3)** ($\approx$ 118,69, $\approx$ −127,52) **4)** (−150, $\approx$ −141,42)

b) Les dimensions minimales de la pièce de bois rectangulaire sont de 350 cm sur environ 282,84 cm. Le schéma ci-contre représente la pièce de bois.

Dessus d'une table



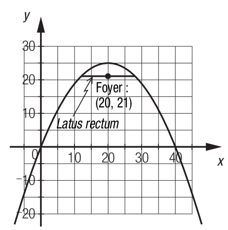
Mise au point 6.3 (*suite*) — Page 209

14. Il est à noter que le *latus rectum* est perpendiculaire à un axe de symétrie de la conique.

a) L'équation de la parabole est $(x - 20)^2 = -16(y - 25)$. On peut en déduire que le paramètre $c = -16 \div 4 = -4$ et que le sommet de la parabole est situé au point (20, 25). Le foyer est donc situé aux coordonnées (20, 21).

On détermine le point d'intersection entre la parabole et la droite d'équation $y = 21$:
$(x - 20)^2 = -16(21 - 25)$
$(x - 20)^2 = 64$
$x_1 \approx 28$ et $x_2 \approx 12$.

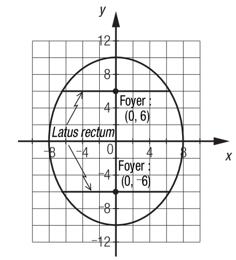
Le *latus rectum* est le segment qui relie les points (12, 21) et (28, 21). Il mesure donc 16 u.



b) L'équation de l'ellipse est $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$. On peut en déduire que $c = \pm 6$, puisque $a^2 + c^2 = b^2$, et que les foyers sont donc situés aux coordonnées (0, 6) et (0, −6).

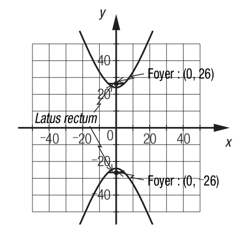
On détermine le point d'intersection entre l'ellipse et la droite d'équation $y = 6$ ou $y = -6$:
$\frac{x^2}{64} + \frac{6^2}{100} = 1$
$\frac{x^2}{64} = \frac{16}{25}$
$x^2 = 40{,}96$
$x_1 \approx 6{,}4$ et $x_2 \approx -6{,}4$.

Le *latus rectum* est le segment qui relie les points (6,4, 6) et (−6,4, 6), ainsi que les points (6,4, −6) et (−6,4, −6). Il mesure donc 12,8 u.



c) L'équation de l'hyperbole est $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{576} = -1$. On peut en déduire que le paramètre $c = \pm 26$, puisque $a^2 + b^2 = c^2$, et que les foyers sont donc situés aux coordonnées (0, 26) et (0, −26).

On détermine le point d'intersection entre l'hyperbole et la droite d'équation $y = 26$ ou $y = -26$:
$\frac{x^2}{100} - \frac{26^2}{576} = -1$
$\frac{x^2}{100} = \frac{25}{144}$
$x^2 = \frac{625}{36}$
$x_1 \approx 4{,}17$ et $x_2 \approx -4{,}17$.



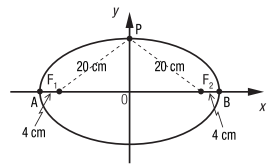
Le *latus rectum* est le segment qui relie les points ($\approx$ 4,17, 26) et ($\approx$ −4,17, 26), ainsi que les points ($\approx$ 4,17, −26) et ($\approx$ −4,17, −26). Il mesure donc environ 8,33 u.

15. Résoudre le système d'équations :
$\frac{x^2}{40\,000} + \frac{y^2}{400} = 1$
$y = 0{,}05x + 5$
On obtient l'équation :
$$\frac{x^2}{40\,000} + \frac{(0{,}05x + 5)^2}{400} = 1$$
$400x^2 + 100x^2 + 20\,000x + 1\,000\,000 = 16\,000\,000$
$500x^2 + 20\,000x - 15\,000\,000 = 0$
$x_1 \approx 154{,}4$ et $x_2 \approx -194{,}36$,
d'où : $y_1 \approx 0{,}05 \times 154{,}4 + 5 \approx 12{,}72$
$y_2 \approx 0{,}05 \times -194{,}36 + 5 \approx -4{,}72$
Les coordonnées des points d'atterrissage possibles de la sonde sont ($\approx$ 154,36, $\approx$ 12,72) et ($\approx$ −194,36, $\approx$ −4,72).

Chronique du passé

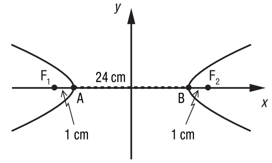
Page 211

1. Dans la figure ①, on sait que m $\overline{PD}$ = 29,6 cm et que m $\overline{PC}$ = 10,4 cm, alors m $\overline{CD}$ = 10,4 + 29,6 = 40 cm. De plus, m $\overline{PF_1}$ + m $\overline{PF_2}$ = m $\overline{CD}$, alors m $\overline{PF_1}$ + m $\overline{PF_2}$ = 40 cm. La définition de l'ellipse permet de déterminer la mesure du grand axe, puisque m $\overline{PF_1}$ + m $\overline{PF_2}$ = 2a, alors 2a = 40 cm. On peut faire la représentation graphique ci-contre.



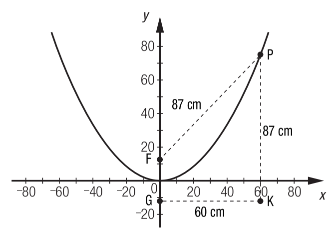
On peut en déduire que le petit axe mesure 24 cm, car $20^2 = b^2 + (20 - 4)^2$, b = 12 cm. Donc, la mesure du grand axe est de 40 cm et la mesure du petit axe est de 24 cm.

2. Dans la figure ②, on sait que m $\overline{PD}$ = 32,8 cm et que m $\overline{PC}$ = 8,8 cm, alors m $\overline{CD}$ = 32,8 − 8,8 = 24 cm. De plus, m $\overline{PF_2}$ − m $\overline{PF_1}$ = m $\overline{CD}$, alors m $\overline{PF_2}$ − m $\overline{PF_1}$ = 24 cm. La définition de l'hyperbole permet de déterminer la distance entre les deux sommets de l'hyperbole, puisque m $\overline{PF_2}$ − m $\overline{PF_1}$ = 2a, alors 2a = 24 cm. On peut faire la représentation graphique ci-contre.



On peut en déduire que la distance entre les deux foyers de l'hyperbole est de 26 cm.

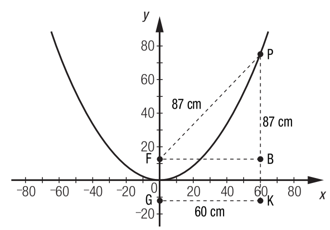
3. Comme la parabole est une courbe dont tous les points sont situés à égale distance d'une droite fixe, appelée directrice, et d'un point fixe, appelé foyer, il est possible de faire la représentation graphique ci-contre.



Par la relation de Pythagore, on peut déterminer la distance entre le point B et le point P de la représentation graphique ci-contre.

d(B, P) = $\sqrt{87^2 - 60^2}$ = 63 cm

La distance entre la directrice et le foyer est de 87 cm − 63 cm = 24 cm, alors la distance entre le foyer et le sommet de la parabole est de 24 cm ÷ 2 = 12 cm.

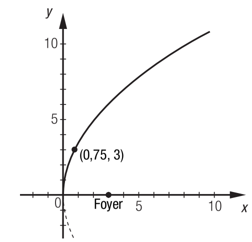


Le monde du travail

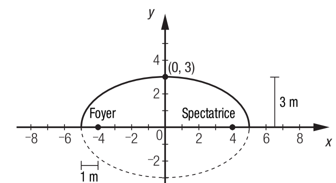
Page 213

1. a) Dans chaque cas, l'emplacement optimal est le foyer de la paroi ayant la forme d'une conique.

b) 1) La distance minimale qui sépare le foyer de la parabole de la paroi dans la salle de spectacle ① est de 3 m.

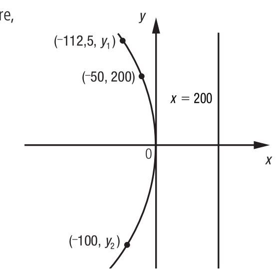


2) La distance qui sépare la spectatrice de l'autre foyer est de 8 m.

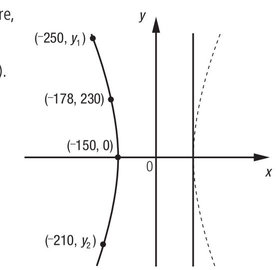


On obtient la relation $(c + 1)^2 = 3^2 + c^2$, d'où c = 4.

2. a) Il est possible de représenter cette situation par le graphique ci-contre, où l'équation de la parabole est $y^2 = {}^-800x$. Les coordonnées des extrémités nord et sud sont (⁻112,5, 300) et (⁻100, ≈ ⁻282,84). La distance qui sépare ces deux extrémités est de $\sqrt{(^-112{,}5 + 100)^2 + (300 + 282{,}84)^2} \approx 582{,}97$ m.



b) Il est possible de représenter cette situation par le graphique ci-contre, où l'équation de l'hyperbole est $\frac{x^2}{150^2} - \frac{y^2}{360^2} \approx 1$. Les coordonnées des extrémités nord et sud sont (⁻250, ≈ 480) et (⁻210, ≈ ⁻352,73). La distance qui sépare ces deux extrémités est de $\sqrt{(^-250 + 210)^2 + (480 + 352{,}73)^2} \approx 833{,}69$ m.



Vue d'ensemble

Page 214

1. a) $x^2 + y^2 = 1600$ **b)** $\frac{x^2}{2025} + \frac{y^2}{2809} = 1$ **c)** $(y + 3)^2 = 2(x + 4)$ **d)** $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

e) $x^2 + y^2 = 5625$ **f)** $(x + 10)^2 = -20(y - 20)$ **g)** $\frac{x^2}{841} + \frac{y^2}{441} = 1$ **h)** $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{49} = -1$

Vue d'ensemble (*suite*)

Page 215

2. a) 1) Une parabole.
2) i) (20, 10) **ii)** (20, 10,25) **iii)** Ne s'applique pas.

b) 1) Une ellipse.
2) i) (0, 12,5), (0, −12,5), (3,5, 0) et (−3,5, 0). **ii)** (0, 12) et (0, −12). **iii)** Ne s'applique pas.

c) 1) Une hyperbole.
2) i) (0, 36) et (0, −36). **ii)** (0, 39) et (0, −39). **iii)** $y = \frac{12}{5}x$ et $y = -\frac{12}{5}x$.

d) 1) Une parabole.
2) i) (−2, −9) **ii)** (−26, −9) **iii)** Ne s'applique pas.

e) 1) Une hyperbole.
2) i) (22,5, 0) et (−22,5, 0). **ii)** (26,5, 0) et (−26,5, 0). **iii)** $y = \frac{28}{45}x$ et $y = -\frac{28}{45}x$.

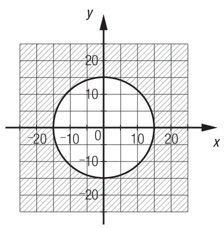
f) 1) Une ellipse.
2) i) (0, 61), (0, −61), (11, 0) et (−11, 0). **ii)** (0, 60) et (0, −60). **iii)** Ne s'applique pas.

3. a) $x^2 + y^2 = 676$ **b)** $\frac{x^2}{576} + \frac{y^2}{1089} = 1$ **c)** $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{1241} = 1$ **d)** $(y - 8)^2 = 8(x + 3)$

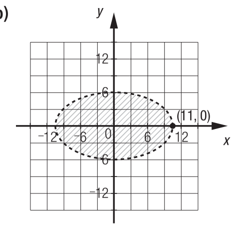
e) $(x - 12)^2 = 12(y + 4)$ **f)** $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{4900} = -1$ **g)** $\frac{x^2}{196} - \frac{y^2}{506,25} = 1$

4. a) (35, 0) et (−35, 0). **b)** (0, 10) et (0, −10). **c)** (2, −4)
d) (−3, −0,5) **e)** (0, 4) et (0, −4). **f)** (13, 0) et (−13, 0).

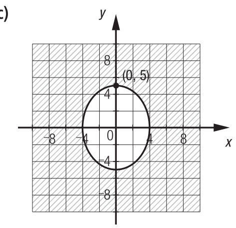
5. a)



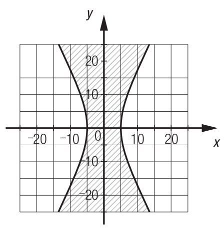
b)



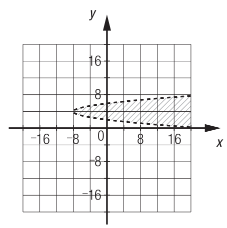
c)



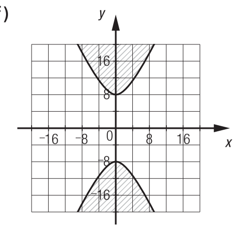
d)



e)



f)



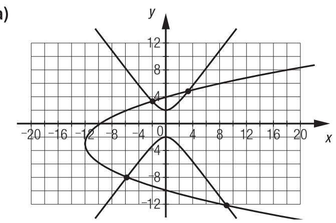
Vue d'ensemble (*suite*)

Page 216

6. a) $\frac{x^2}{841} + \frac{y^2}{400} \geq 1$ **b)** $x^2 + y^2 \leq 289$ **c)** $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{100} > 1$

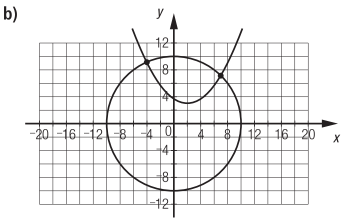
d) $(y + 5)^2 < -2(x - 7)$ **e)** $\frac{x^2}{12,25} - \frac{y^2}{144} \geq -1$ **f)** $(x + 10)^2 > 15(y - 5)$

7. a)



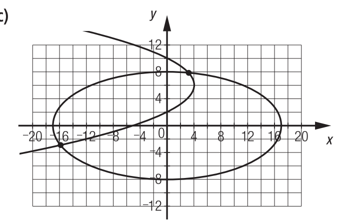
(≈ −5,8, ≈ −7,98), (≈ −1,99, ≈ 3,33), (≈ 3,29, ≈ 4,82) et (≈ 9, ≈ −12,17).

b)



(≈ −4,07, ≈ 9,14) et (≈ 6,99, ≈ 7,15).

c)



(≈ −15,84, ≈ −2,91) et (≈ 3,13, ≈ 7,86).

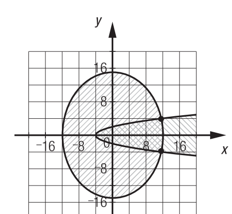
Vue d'ensemble (*suite*)

Page 217

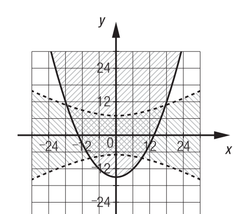
8.

Équation de la conique	Coordonnées du ou des sommets	Coordonnées du ou des foyers
$\frac{x^2}{6724} + \frac{y^2}{324} = 1$	**(82, 0) et (−82, 0) (0, 18) et (0, −18)**	**(80, 0) (−80, 0)**
$(y - 12)^2 = -9(x + 4)$	**(−4, 12)**	**(−6,25, 12)**
$\frac{x^2}{256} - \frac{y^2}{3969} = -1$	**(0, 63) et (0, −63)**	**(0, 65) (0, −65)**
$(x + 9)^2 = 0,5(y + 5)$	**(−9, −5)**	**(−9, −4,875)**
$\frac{x^2}{196} - \frac{y^2}{506,25} = 1$	**(14, 0) et (−14, 0)**	**(26,5, 0) (−26,5, 0)**

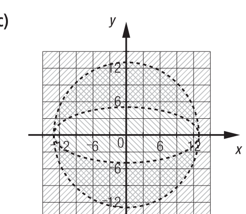
9. a)



b)



c)



10. L'inéquation associée à la zone de baignade sécurisée est de la forme $(x - h)^2 \leq 4c(y - k)$. À l'aide de la représentation graphique, il est possible de déterminer :
- valeur de c : -5 ;
- coordonnées du sommet : $(x, 25)$;
- coordonnées d'un point par lequel passe la courbe : $(40, 20)$.

On obtient donc $(40 - h)^2 = 4 \times -5 \times (20 - 25)$, d'où h $= 30$, puisque, d'après la représentation graphique, c'est la seule valeur admise. L'inéquation associée à la zone de baignade sécurisée est donc $(x - 30)^2 \leq -20(y - 25)$.

Vue d'ensemble (*suite*) — Page 218

11. a) Il est possible de déduire que les coordonnées du foyer de l'ellipse et du sommet de la parabole sont $(20, 0)$, puisque a $= 29$ et b $= 21$ et que $a^2 = b^2 + c^2$.
L'équation de la directrice de la parabole est $x = 29$, puisqu'elle passe par le sommet de l'ellipse. Il est possible de déduire que le paramètre c $= -9$, puisque le sommet de la parabole est $(20, 0)$.
L'équation de la parabole associée à la trajectoire de la nageuse est donc $y^2 = -36(x - 20)$.

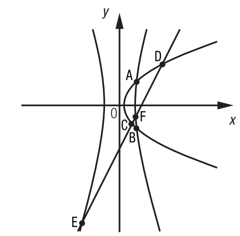
b) Pour déterminer les coordonnées des points d'entrée et de sortie de la nageuse, on doit trouver les points d'intersection entre la parabole d'équation $y^2 = -36(x - 20)$ et l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{841} + \frac{y^2}{441} = 1$.
On obtient $\frac{x^2}{841} + \frac{-36(x - 20)}{441} = 1$, d'où $x \approx 8{,}9$, puisque la deuxième valeur obtenue ne peut pas être considérée dans cette situation. Puisque $y^2 \approx -36(8{,}9 - 20)$, $y \approx \pm 19{,}99$.
1) Les coordonnées du point d'entrée de la nageuse sont $(\approx 8{,}9, \approx 19{,}99)$.
2) Les coordonnées du point de sortie de la nageuse sont $(\approx 8{,}9, \approx -19{,}99)$.

12. a) 1) La parabole admet un axe de symétrie. À partir des coordonnées des points $(2, 6)$ et $(6, 6)$, on peut en déduire que les coordonnées du sommet sont $(6 - 2, -2) = (4, -2)$.
L'équation de cette parabole est de la forme $(x - h)^2 = 4c(y - k)$. En substituant des données connues à ces variables, on détermine la valeur du paramètre c :
$(2 - 4)^2 = 4c(6 + 2)$
$c = 0{,}125$
L'équation de la parabole est $(x - 4)^2 = 0{,}5(y + 2)$.
2) La droite passe par le foyer dont les coordonnées sont $(4, -2 + 0{,}125) = (4, -1{,}875)$.
Puisque la droite passe par les points $(4, -1{,}875)$ et $(2, -1)$, son équation est $y = -0{,}4375x - 0{,}125$.

b) Résoudre le système d'équations :
$(x - 4)^2 = 0{,}5(y + 2)$
$y = -0{,}4375x - 0{,}125$
De ce système, on obtient :
$(x - 4)^2 = 0{,}5(-0{,}4375x - 0{,}125 + 2)$
$x^2 - 7{,}78125x + 15{,}0625 = 0$, d'où $x_1 \approx 3{,}62$ et $x_2 \approx 4{,}16$.
Donc, $y_1 \approx -0{,}4375 \times 3{,}62 - 0{,}125$, ou $y_1 \approx -1{,}71$, et $y_2 \approx -0{,}4375 \times 4{,}16 - 0{,}125$, ou $y_2 \approx -1{,}95$.
Les coordonnées des points où l'oiseau pourrait capturer le poisson sont $(\approx 3{,}62, \approx -1{,}71)$ et $(\approx 4{,}16, \approx -1{,}95)$.

Vue d'ensemble (*suite*) — Page 219

13. Il faut déterminer les coordonnées de 6 points d'intersection.



On obtient les coordonnées des points A et B par la résolution du système d'équations $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{576} = 1$ et $y^2 = 20(x - 2)$.
Les coordonnées des points A et B sont respectivement $(\approx 7{,}66, \approx 10{,}64)$ et $(\approx 7{,}66, -10{,}64)$.
On obtient les coordonnées des points C et D par la résolution du système d'équations $y = 2x - 20$ et $y^2 = 20(x - 2)$.
Les coordonnées des points C et D sont respectivement $(\approx 5{,}7, \approx -8{,}6)$ et $(\approx 19{,}3, 18{,}6)$.
On obtient les coordonnées des points E et F par la résolution du système d'équations $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{576} = 1$ et $y = 2x - 20$.
Les coordonnées des points E et F sont respectivement $(\approx -17{,}51, \approx -55{,}01)$ et $(\approx 7{,}19, -5{,}62)$.

14. a) Par la définition de l'ellipse, on sait que la somme des distances du point B au point de coordonnées $(7{,}2, 4{,}2)$ et de ce point au point C est 2a.
Donc, $2a = \sqrt{(7{,}2 + 5{,}66)^2 + (4{,}2 - 0)^2} + \sqrt{(7{,}2 - 5{,}66)^2 + (4{,}2 + 0)^2}$, soit ≈ 18.
La valeur du paramètre a $= 18 \div 2 = 9$.
On détermine la valeur du paramètre b à l'aide de la relation $b^2 + c^2 = a^2$:
$b^2 + 5{,}66^2 = 9^2$
$b^2 \approx 48{,}96$
$b \approx 7$
L'inéquation qui correspond à la région associée à cet archipel est $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{48{,}96} \leq 1$.

b) La mesure du grand axe de l'ellipse est environ de 18 km et celle du petit axe est environ de 14 km.

c) Il faut déterminer les points d'intersection entre l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{48{,}96} = 1$ et la droite d'équation $y = -0{,}4x - 1$:
$\frac{x^2}{81} + \frac{(-0{,}4x - 1)^2}{48{,}96} = 1$
$x_1 \approx -8{,}46$ et $x_2 \approx 7{,}42$, et $y_1 \approx 2{,}39$ et $y_2 \approx -3{,}97$.
La distance qui sépare ces deux points est de $\sqrt{(-8{,}46 - 7{,}42)^2 + (2{,}39 + 3{,}97)^2}$ km $\approx 17{,}11$ km. La distance parcourue par l'avion est environ de 17,11 km.

15. Puisque :
- la hauteur du viaduc est de 8 m, alors b $= 8$;
- la largeur du viaduc est de 34 m, alors a $= 34 \div 2 = 17$.

Alors, l'équation de l'ellipse est $\frac{x^2}{289} + \frac{y^2}{64} = 1$.
Puisque :
- l'axe des abscisses est superposé à la directrice de la parabole, $x = 0$;
- les coordonnées du foyer de la parabole et celles d'un des sommets de l'ellipse sont les mêmes, soit $(0, 8)$.

Alors, c $= 8 \div 2 = 4$, le sommet est $(0, 8 - 4) = (0, 4)$ et l'équation de la parabole est $x^2 = 16(y - 4)$.
Pour trouver les points d'intersection, on résout l'équation :
$\frac{16(y - 4)}{289} + \frac{y^2}{64} = 1$
$y_1 \approx 7{,}25$ et $y_2 \approx -10{,}79$.
On rejette y_2 en raison du contexte.
$x^2 \approx 16(7{,}25 - 4)$
$x^2 \approx 52$
$x \approx \pm 7{,}21$
Les coordonnées des deux points d'ancrage de la banderole sont donc $(\approx -7{,}21, \approx 7{,}25)$ et $(\approx 7{,}21, 7{,}25)$.

Vue d'ensemble (*suite*)

Page 220

16. a) 1) L'excentricité de cette ellipse est $\frac{m\,\overline{FA}}{m\,\overline{AB}} = \frac{2,6}{3,25} = 0,8$.

2) On pose les coordonnées du sommet de l'ellipse, soit $(x, 0)$. Comme l'excentricité est 0,8, on a $\frac{-4 - x}{x + 6,25} = 0,8$.
On détermine la valeur de la variable x :
$-4 - x = 0,8x + 5$
$-1,8x = 9$
$x = -5$
Les coordonnées du sommet S de l'ellipse sont (–5, 0).

b) La valeur du rapport est 0,8. Elle correspond à l'excentricité de cette ellipse.

c) Les coordonnées d'un des foyers sont (0, 7), puisque $a^2 + c^2 = b^2$. De plus, les coordonnées d'un des sommets sont (0, 25).
Donc, l'excentricité de l'ellipse est $\frac{\text{distance de l'origine au foyer}}{\text{distance de l'origine au sommet S}} = \frac{7}{25} = 0,28$.

17. À l'aide de la représentation graphique et de l'équation de l'asymptote, il est possible de déduire que l'équation de l'hyperbole est $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{6,25} = 1$.
L'équation de la droite associée au dessus de l'immeuble est $y = 0,5x + 4$, puisque le segment passe par les points (0, 4) et (2, 5).
L'équation de la parabole associée au haut des portes est $x^2 = -12(y + 3)$, puisque l'équation de sa directrice est $x = 0$ et que les coordonnées de son sommet sont (0, –3).
L'équation qui correspond au sol est $y = -6$.

a) On trouve les coordonnées du coin supérieur droit de la façade (≈ 2,29, ≈ 5,14) en déterminant les coordonnées du point d'intersection entre l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{6,25} = 1$ et la droite d'équation $y = 0,5x + 4$.
La hauteur maximale de l'immeuble est environ de 6 + 5,14 ≈ 11,14 m.

b) On détermine les coordonnées des points d'attache des portes par la résolution des deux systèmes d'équations suivants :
- $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{6,25} = 1$ et $y = -6$;
- $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{6,25} = 1$ et $x^2 = -12(y + 3)$.

Les coordonnées des quatre points d'attache des portes sont (–2,6, –6), (2,6, –6), (≈ 1,62, ≈ –3,22) et (≈ –1,62, ≈ –3,22).

Vue d'ensemble (*suite*)

Page 221

18. *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*
Soit l'équation d'un cercle $x^2 + y^2 = r^2$. Il est possible de transformer cette équation en l'équation d'une ellipse, $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$, dans laquelle les paramètres a et b sont égaux.
Puisque, dans une ellipse, on a la relation $a^2 = b^2 + c^2$, on obtient donc $r^2 = r^2 + c^2$, alors c = 0.
Comme la valeur du paramètre c est 0, les foyers sont situés à l'origine du plan cartésien.
Joseph a donc raison.

19. L'équation de la parabole est $(y - 30)^2 = 20(x - 10)$, puisque les coordonnées de son sommet sont (10, 30) et que l'équation de la directrice est $x = 5$.
On cherche les valeurs de y lorsque $x = 20$.
$(y - 30)^2 = 20(20 - 10)$
$(y - 30)^2 = 200$
$y_1 \approx 15,86$ et $y_2 \approx 44,14$.
Le diamètre de ce phare d'automobile est de 44,14 − 15,86 ≈ 28,28 cm.

Vue d'ensemble (*suite*)

Page 222

20. a) Les tulipes sont plantées dans la région définie par $x^2 + y^2 \leq 36$. On peut le déduire à l'aide du point (3,6, 4,8) :
$3,6^2 + 4,8^2 = 36$.

b) Les roses sont plantées dans la région définie par $\frac{x^2}{20,25} - \frac{y^2}{36} \leq -1$. On peut le déduire à l'aide des coordonnées d'un des sommets de l'hyperbole, (0, 6), des coordonnées d'un des foyers (0, 7,5) et de la relation $a^2 + b^2 = c^2$.

c) Les lys sont plantés dans la région définie par $y^2 \leq 12(x - 6)$. On peut le déduire à l'aide des coordonnées du sommet (6, 0) et des coordonnées du foyer (9, 0).

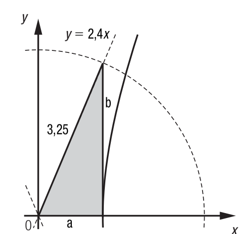
d) Les marguerites sont plantées dans la région définie par $y^2 \leq -12(x + 6)$. On peut le déduire à l'aide des coordonnées du sommet (–6, 0) et des coordonnées du foyer (–9, 0).

21. L'équation de l'ellipse associée à cette situation est $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$, puisque les coordonnées d'un des sommets sont (6, 0) et celles d'un des foyers sont (0, –8).
L'équation de la parabole associée à cette situation est $x^2 = -8(y - 8)$, puisque les coordonnées de son sommet sont (0, 8) et que l'équation de sa directrice est $y = 10$.
L'équation de la droite associée à cette situation est $y = 0,25x - 8$, puisque la droite passe par les points dont les coordonnées sont (0, –8) et (2, –7,5).
Pour déterminer les coordonnées des points A et B, on résout le système d'équations $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$ et $x^2 = -8(y - 8)$.
Pour déterminer les coordonnées des points C et D, on résout le système d'équations $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$ et $y = 0,25x - 8$.
Les coordonnées du point A sont (≈ –5,4, ≈ 4,35). Les coordonnées du point B sont (≈ 5,4, ≈ 4,35). Les coordonnées du point C sont (≈ 4,33, ≈ –6,92). Les coordonnées du point D sont (≈ –2,93, ≈ –8,73).

Vue d'ensemble (*suite*)

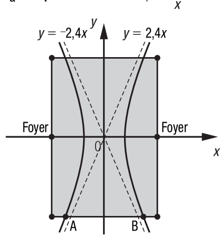
Page 223

22. a) Comme la pièce de bois mesure 6,5 m sur 10 m, on peut déduire que les coordonnées des foyers sont (–3,25, 0) et (3,25, 0).
À l'aide de cette information et de l'équation d'une des asymptotes, on détermine les valeurs des paramètres a et b.
On sait que $\frac{b}{a} = 2,4$, donc $b = 2,4a$ qui permet d'obtenir $b^2 = 5,76a^2$.
On sait aussi que, dans l'hyperbole, $a^2 + b^2 = c^2$,
donc $a^2 + 5,76a^2 = 3,25^2$.
On détermine que $a^2 = 1,5625$ et que $b^2 = 9$.
L'équation de l'hyperbole est donc $\frac{x^2}{1,5625} - \frac{y^2}{9} = 1$.



b) 1) La largeur minimale de ce dessus de table correspond à la distance entre les deux sommets (–1,25, 0) et (1,25, 0) de l'hyperbole, soit 2,5 m.

2) Dans la représentation graphique ci-contre, il s'agit de la distance entre les points A et B.
Pour déterminer les coordonnées de ces points, il faut résoudre le système d'équations $\frac{x^2}{1,5625} - \frac{y^2}{9} = 1$ et $y = -5$.
Les coordonnées du point A sont (≈ –2,43, –5) et celles du point B, (≈ 2,43, –5).
La largeur maximale de ce dessus de table est donc de 2,43 + 2,43 ≈ 4,86 m.



23. a) La relation $b^2 + c^2 = a^2$ permet de déduire la valeur du paramètre c : $56^2 + c^2 = 106^2$, c = ±90.
Les coordonnées des foyers sont (–90, 0) et (90, 0).
Comme l'équation de la clôture elliptique est $\frac{x^2}{106^2} + \frac{y^2}{56^2} = 1$ et qu'on cherche les coordonnées d'un point dont les coordonnées sont $(90, y)$, on peut substituer 90 à x et isoler la variable y :

$$\frac{90^2}{106^2} + \frac{y^2}{56^2} = 1$$
$$\frac{y^2}{3136} = \frac{784}{2809}$$
$$y^2 \approx 875,27$$
$$y \approx \pm 29,58$$

Les coordonnées des quatre coins de la scène sont (90, ≈ 29,58), (90, ≈ –29,58), (–90, ≈ 29,58) et (–90, ≈ –29,58).

b) Puisqu'on cherche les coordonnées d'un point dont les coordonnées sont (x, 41), on peut substituer 41 à y dans l'équation de l'ellipse et isoler la variable x :

$$\frac{x^2}{106^2} + \frac{41^2}{56^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{11\,236} = \frac{1455}{3136}$$
$$x^2 \approx 5213{,}13$$
$$x \approx \pm 72{,}2$$

Les coordonnées du spectateur sont donc ($\approx$ -72,2, 41).
La distance entre ce point et l'origine du plan cartésien est de $\sqrt{(-72{,}2)^2 + 41^2} \approx 83{,}03$ m.
La distance qui sépare le spectateur du chanteur est environ de 83,03 m.

24. a) 1) Le rayon du cercle extérieur associé à la couronne rouge mesure $450 - 60 \div 2 = 195$ mm. L'équation de ce cercle est $x^2 + y^2 = 38\,025$.

2) Le rayon du cercle intérieur associé à la couronne rouge mesure $195 - 41 = 154$ mm. L'équation de ce cercle est $x^2 + y^2 = 23\,716$.

b) On a l'équation :
$$x^2 + (-x + 30)^2 = 23\,716$$
$2x^2 + -60x - 22\,816 = 0$, d'où $x_1 \approx 122{,}86$ et $x_2 \approx -92{,}86$.
Donc $y_1 \approx -122{,}86 + 30$ ou $\approx -92{,}86$ et $y_2 \approx 92{,}86 + 30$ ou $\approx 122{,}86$.
Les coordonnées des points d'intersection sont ($\approx$ 122,86, $\approx$ -92,86) et ($\approx$ -92,86, $\approx$ 122,86).

Banque de problèmes

Page 224

1. • Déterminer les coordonnées des foyers de l'hyperbole.
On a :
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{441} = -1$$
$$\frac{(-51{,}4)^2}{a^2} - \frac{43{,}9^2}{441} = -1$$
$$\frac{(-51{,}4)^2}{a^2} \approx 3{,}37$$
$$a^2 \approx 783{,}96$$
L'équation de l'hyperbole est $\frac{x^2}{783{,}96} - \frac{y^2}{441} = -1$.
Pour l'hyperbole, $a^2 + b^2 = c^2$, les foyers sont donc situés aux points (0, 35) et (0, -35).

• Déterminer l'équation de la directrice de la parabole.
Pour la parabole, on a :
$y^2 = 4c(x - 20)$
De plus, celle-ci passe par les foyers de l'hyperbole dont les coordonnées sont (0, 35), on a donc :
$35^2 = 4c(0 - 20)$
$c = -15{,}3125$
Puisque les coordonnées du sommet sont (0, 20) et que la valeur du paramètre c est -15,3125, l'équation de la directrice est $x = 35{,}3125$.

• Déterminer les points d'intersection entre la directrice et l'hyperbole.
On résout le système d'équations :
$$\frac{x^2}{783{,}96} - \frac{y^2}{441} = -1$$
$x = 35{,}3125$
Ainsi, $\frac{35{,}3125^2}{783{,}96} - \frac{y^2}{441} = -1$
$y \approx \pm 33{,}8$
Les points d'intersection sont ($\approx$ 35,3125, $\approx$ 33,8) et ($\approx$ 35,3125, $\approx$ -33,8).

• Déterminer le coût des réparations.
La longueur de la route à réparer est de $33{,}8 + 33{,}8 \approx 67{,}6$ km.
Le coût total sera environ de $67{,}6 \times 100\,000\,\$ \approx 6\,760\,052{,}98\,\$$.

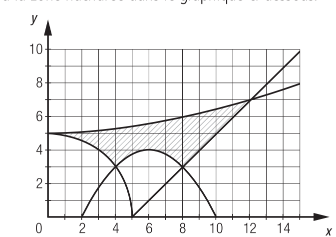
L'entrepreneur peut procéder à la réparation de la route, puisqu'il réalisera un profit d'environ 239 947,02 $.

2. *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*
• Déterminer l'équation de la parabole.
L'équation de la parabole est $(x - h)^2 = 4c(y - 3)$, puisque le ballon atteint une hauteur maximale de 3 m.
On sait que cette parabole passe par les points (0, 2) et (18, 0).
En substituant ces coordonnées dans l'équation de la parabole, on obtient les deux équations suivantes, qui comportent deux inconnues :
• $(0 - h)^2 = 4c(2 - 3)$, donc $h^2 = -4c$ et $c = -\frac{h^2}{4}$;
• $(18 - h)^2 = 4c(0 - 3)$, donc $324 - 36h + h^2 = -12c$.
Par substitution, on obtient :
$$324 - 36h + h^2 = -12\left(-\frac{h^2}{4}\right)$$
$$324 - 36h + h^2 = 3h^2$$
$$0 = 2h^2 + 36h - 324$$
$h_1 \approx 6{,}59$ et $h_2 \approx -24{,}59$ (à rejeter).
Donc, $c \approx -10{,}85$.
L'équation de la parabole est $(x - 6{,}59)^2 = -43{,}4(y - 3)$.

• Vérifier si le ballon passe au plus à 40 cm au-dessus du filet.
Le filet est situé au milieu du terrain, donc $x = 9$.
On cherche la hauteur y quand $x = 9$.
$$(9 - 6{,}59)^2 = -43{,}4(y - 3)$$
$$y \approx 2{,}87 \text{ m}$$
$2{,}87 - 2{,}43 = 0{,}44$
Le service doit donc passer à au plus 44 cm au-dessus du filet, non à 40 cm.

L'entraîneur a mal évalué la situation.

3. La zone de recherche correspond à la zone hachurée dans le graphique ci-dessous.



Il s'agit de déterminer les quatre points d'intersection.
• Le 1er point est situé à l'intersection de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = -1$ et du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 25$.
Les coordonnées du sommet de l'hyperbole sont (0, 5) et le rayon du cercle mesure 5. Les coordonnées du point d'intersection sont donc (0, 5).
• Le 2e point est situé à l'intersection de la parabole d'équation $(x - 6)^2 = -4(y - 4)$ et du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 25$.
On résout le système d'équations ainsi formé, et on obtient les coordonnées du point d'intersection, soit (4, 3).
• Le 3e point est situé à l'intersection de la parabole d'équation $(x - 6)^2 = -4(y - 4)$ et de la droite d'équation $y = x - 5$.
On résout le système d'équations ainsi formé, et on obtient les coordonnées du point d'intersection, soit (8, 3).
• Le 4e point est situé à l'intersection de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = -1$ et de la droite d'équation $y = x - 5$.
On résout le système d'équations ainsi formé, et on obtient les coordonnées du point d'intersection, soit ($\approx$ 12,1, $\approx$ 7,1).

Les points d'intersection des courbes frontières sont (0, 5), (4, 3), (8, 3) et ($\approx$ 12,1, $\approx$ 7,1).

Banque de problèmes (*suite*)

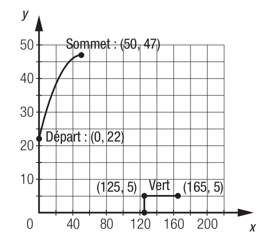
Page 225

4. • Trouver l'information qui concerne la parabole.
L'équation de la directrice est $y = -5$ et les coordonnées du sommet sont (0, 5), puisque la distance qui les sépare est de 10 cm.
De plus, la valeur du paramètre c est 10, puisque la distance entre la directrice et le sommet est de 10 cm.
Les coordonnées du foyer sont donc (0, 5 + 10) = (0, 15).
L'équation de la parabole est $x^2 = 40(y - 5)$.

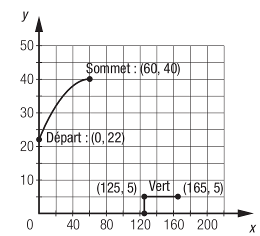
• Trouver l'information qui concerne l'ellipse.
Les coordonnées des foyers sont (10, 0) et (-10, 0), puisque la distance qui les sépare est de 20 cm.
On peut en déduire que la courbe passe par le point (10, 4,5).
Comme on sait que la somme des distances d'un point de la courbe aux deux foyers est constante, on obtient
$\sqrt{(-10 - 10)^2 + (0 - 4{,}5)^2} + \sqrt{(10 - 10)^2 + (0 - 4{,}5)^2} = 20{,}5 + 4{,}5 = 25$.
Alors, $2a = 25$ et $a = 12{,}5$.
Les coordonnées de deux des sommets sont (12,5, 0) et (-12,5, 0).
À l'aide de la relation $b^2 + c^2 = a^2$, on obtient $b^2 = 56{,}25$. Les coordonnées des deux autres sommets sont donc (0, 7,5) et (0, -7,5).
L'équation de l'ellipse est $\frac{x^2}{156{,}25} + \frac{y^2}{56{,}25} = 1$.

5. *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*

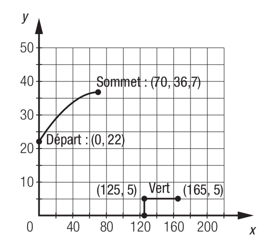
• Analyse du fer 8
Voici une représentation graphique de la situation.
D'après ces renseignements, l'équation de la trajectoire est $(x - 50)^2 = -100(y - 47)$.
On détermine les coordonnées de la balle à $y = 5$:
$(x - 50)^2 = -100(5 - 47)$
$x^2 - 100x + 2500 = 4200$
$x^2 - 100x - 1700 = 0$
$x_1 \approx 114{,}81$ m et $x_2 \approx -14{,}81$ m (à rejeter).
La balle ne peut pas atteindre le vert en un seul coup avec ce fer : sa trajectoire se termine dans l'eau.



• Analyse du fer 7
Voici une représentation graphique de la situation.
D'après ces renseignements, l'équation de la trajectoire est $(x - 60)^2 = -200(y - 40)$.
On détermine les coordonnées de la balle à $y = 5$:
$(x - 60)^2 = -200(5 - 40)$
$x^2 - 120x + 3600 = 7000$
$x^2 - 120x - 3400 = 0$
$x_1 \approx 143{,}67$ m et $x_2 \approx -23{,}67$ m (à rejeter).
La balle peut atteindre le vert en un seul coup avec ce fer.



• Analyse du fer 6
Voici une représentation graphique de la situation.
D'après ces renseignements, l'équation de la trajectoire est $(x - 70)^2 = -\frac{1000}{3}(y - 36{,}7)$.
On détermine les coordonnées de la balle à $y = 5$:
$(x - 70)^2 = -\frac{1000}{3}(5 - 36{,}7)$
$x^2 - 140x + 4900 \approx 10\,566{,}67$
$x^2 - 140x - 5666{,}67 = 0$
$x_1 \approx 172{,}79$ m et $x_2 \approx -32{,}79$ m (à rejeter).
La balle ne peut pas atteindre le vert en un seul coup avec ce fer : sa trajectoire le dépasse.



Banque de problèmes (*suite*)

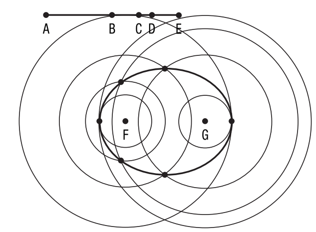
Page 226

6. • Équation de la parabole orange
La parabole passe par le point dont les coordonnées sont (0, -3) et les coordonnées du sommet sont (6, 1), on peut en déduire que l'équation de cette parabole est $(x - 6)^2 = -9(y - 1)$.
On détermine les abscisses à l'origine de cette parabole :
$(x - 6)^2 = -9(0 - 1)$
$x^2 - 12x + 36 = 9$
$x^2 - 12x + 27 = 0$
$x_1 = 3$ et $x_2 = 9$.
Le dauphin se propulse hors de l'eau au point (3, 0) et entre dans l'eau au point (9, 0).

• Équation de la parabole verte
La parabole passe par le point dont les coordonnées sont (9, 0) et les coordonnées du sommet sont (13,5, -3), on peut en déduire que l'équation de cette parabole est $(x - 13{,}5)^2 = 6{,}75(y + 3)$.
On détermine les abscisses à l'origine de cette parabole :
$(x - 13{,}5)^2 = 6{,}75(0 + 3)$
$x^2 - 27x + 182{,}25 = 20{,}25$
$x^2 - 27x + 162 = 0$
$x_1 = 9$ et $x_2 = 18$.
Le dauphin entre dans l'eau au point de coordonnées (9, 0) et se propulse hors de l'eau au point de coordonnées (18, 0).

• Coordonnées du sommet de la parabole rose.
La parabole passe par les points dont les coordonnées sont (18, 0) et (26, 0), on peut en déduire que la valeur du paramètre h est (26 + 18) ÷ 2 = 22, puisqu'une parabole admet un axe de symétrie.
De plus, la courbe passe par un autre point dont les coordonnées sont (24, 1,875). Sachant que l'équation de cette parabole est de la forme $(x - h)^2 = 4c(y - k)$, on obtient le système d'équations suivant :
$(18 - 22)^2 = 4c(0 - k)$
$(24 - 22)^2 = 4c(1{,}875 - k)$
En résolvant ce système, on obtient $c = -1{,}6$ et $k = 2{,}5$.
Les coordonnées du point qui correspond au centre du cerceau sont (22, 2,5).

7. Voici le dessin tracé à l'aide de la démarche indiquée.
Plusieurs réponses possibles. Exemple :
Il est possible de tracer une ellipse dont le grand axe mesure 10 cm et le petit axe mesure 8 cm. La distance entre chaque foyer de l'ellipse est de 6 cm.



Banque de problèmes (*suite*)

Page 227

8. • Déterminer les équations du cercle et de l'ellipse.
L'équation du cercle est $x^2 + y^2 = 1000^2$.
Le grand axe de l'ellipse mesure 4000 m puisqu'il est 2 fois plus grand que le diamètre du cercle.
Le petit axe mesure 3000 m puisqu'il est 1,5 fois plus grand que le diamètre du cercle.
L'équation de l'ellipse est donc $\frac{x^2}{1500^2} + \frac{y^2}{2000^2} = 1$.

• Déterminer les coordonnées du point associé à l'intersection A.
On résout le système d'équations :
$y = \frac{4}{3}x$
$x^2 + y^2 = 1000^2$
Les coordonnées du point associé à l'intersection A sont (600, 800).

- Déterminer les coordonnées des points associés aux intersections B et C.

  Puisque la droite rose est perpendiculaire à la droite bleue, on cherche l'équation d'une droite dont la pente est $^-\frac{3}{4}$ et qui passe par le point (600, 800).

  On obtient $y = {^-}\frac{3}{4}x + 1250$.

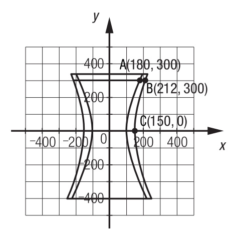
  Pour déterminer les points d'intersection, on résout le système d'équations :

  $\frac{x^2}{1500^2} + \frac{y^2}{2000^2} = 1$

  $y = {^-}\frac{3}{4}x + 1250$

  Les coordonnées du point associé à l'intersection B sont ($\approx$ ⁻695,8, $\approx$ 1772).
  Les coordonnées du point associé à l'intersection C sont ($\approx$ 1496,96, $\approx$ 127,28).

9. On a représenté cette situation dans le plan cartésien ci-contre, où certaines mesures sont déduites de la situation.



- Déterminer l'équation de l'hyperbole extérieure.

  On peut déduire que l'hyperbole extérieure passe par le sommet dont les coordonnées sont (150, 0) et par le point B dont les coordonnées sont (212, 300).
  À l'aide de ces renseignements, on détermine l'équation de cette hyperbole :

  $\frac{212^2}{22\,500} - \frac{300^2}{b^2} = 1$

  $\frac{300^2}{b^2} \approx 0{,}9975$

  $b^2 \approx 90\,225$

  L'équation de cette hyperbole est $\frac{x^2}{22\,500} - \frac{y^2}{90\,225} = 1$.

- Déterminer le diamètre de la base de cette tuyère.

  On cherche la largeur lorsque $y = {^-}400$. En substituant cette valeur dans l'équation de l'hyperbole, on obtient :

  $\frac{x^2}{22\,500} - \frac{(^-400)^2}{90\,225} = 1$

  $x_1 \approx {^-}249{,}8$ cm et $x_2 \approx 249{,}8$ cm.

  La largeur est de $249{,}8 \times 2 \approx 499{,}6$ cm.

Le fabricant a raison, le diamètre de la base de cette tuyère est inférieur à 5,2 m puisqu'il est environ de 4,996 m.