Régions associées à l'hyperbole

Voici les étapes pour représenter la région intérieure ou extérieure à l'hyperbole :

1. Transformer l'inéquation en équation sous la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$
2. Tracer la courbe frontière :
   trait plein si $\geq$ ou $\leq$
   trait pointillé si $>$ ou $<$
3. Utiliser un point témoin pour savoir la région à hachurer.

Exercice : représentez graphiquement la région associée à chaque inéquation

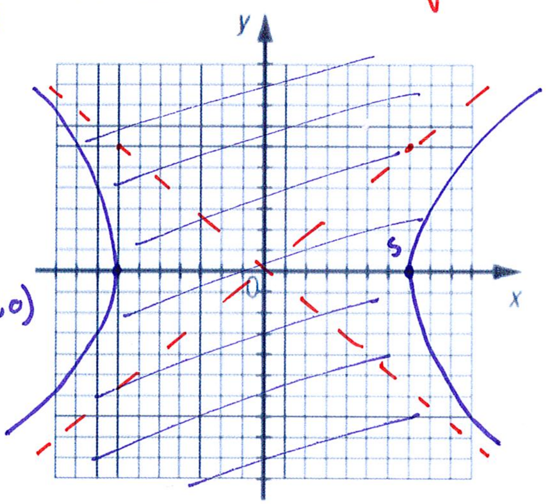
a) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{36} \leq 1$ Pt (0,0) $0 - 0 \leq 1$ V

$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{36} = 1$

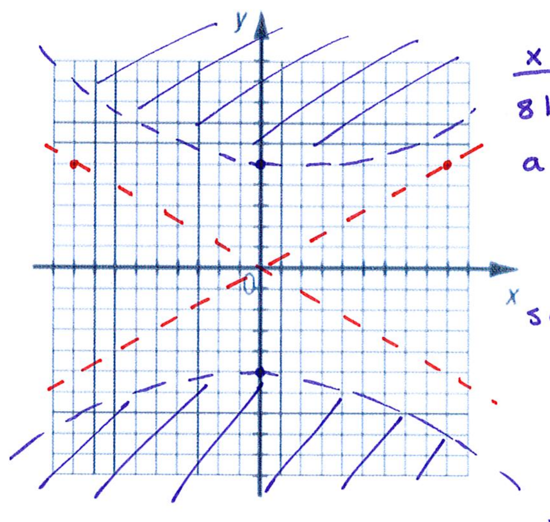
$a = 7 \quad b = 6$

$y = \pm \frac{6}{7}$

ommets
$(-7,0)$ et $(7,0)$



b) $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{25} < -1$ PT (0,0) $0 - 0 < -1$ F



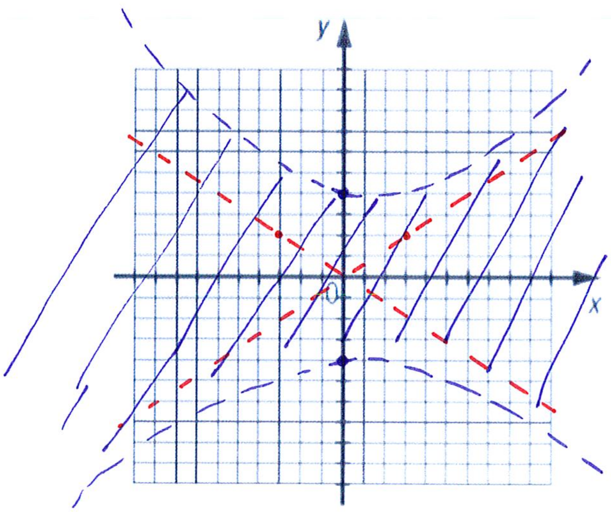
$\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{25} = -1$

$a = 9 \quad b = 5$

$y = \pm \frac{5}{9}$

sommets :
$(0,-5)$ $(0,5)$

c) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} > -1$ PT (0,0) $0 - 0 > -1$



$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = -1$

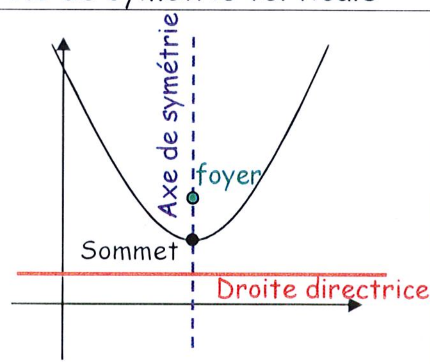
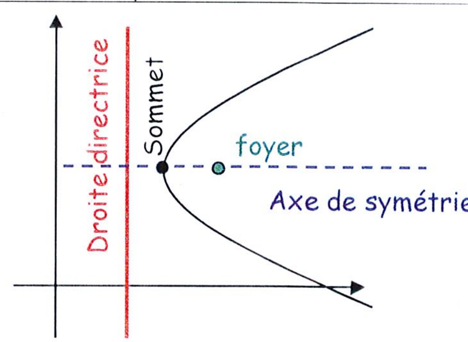
$a = 6 \quad b = 4$

$y = \pm \frac{4}{6} x$ ou $y = \pm \frac{2}{3} x$

Sommets :
$(0,-4)$ $(0,4)$

La parabole (translatée cette fois !!)

Lieu géométrique dont tous les points sont situés à égale distance d'une droite fixe, appelée directrice et d'un point fixe appelé foyer.

	Axe de symétrie verticale	Axe de symétrie horizontal
Graphique		
Équation sous la forme canonique :	$(x-h)^2 = 4c(y-k)$	$(y-k)^2 = 4c(x-h)$
Coordonnées du sommet :	(h, k)	
Coordonnées du foyer :	$(h, k+c)$	$(h+c, k)$
Équation de l'axe de symétrie :	$x = h$	$y = k$
Équation de la directrice :	$y = k - c$	$x = h - c$
Ouverture de la parabole si $c > 0$	$\cup$	$\subset$
Ouverture de la parabole si $c < 0$	$\cap$	$\supset$
Distance entre foyer et directrice	$= 2\|c\|$	

Représentation graphique de la parabole translatée :

Étapes :

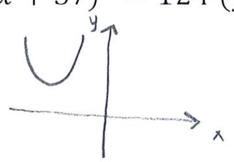
1. Détermine son ouverture : droite-gauche ou haut-bas ?
2. Détermine son sommet et son foyer
3. Trace également sa droite directrice

Exercices :

#1 Dans chaque cas, détermine les coordonnées de sommet et du foyer de la parabole :

a) $(x + 37)^2 = 124\,(y - 28)$

Esquisse :



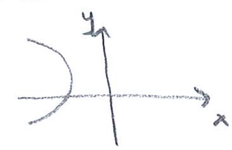
sommet : $(-37, 28)$

Foyer : $\frac{4c}{4} = \frac{124}{4}$ $c = 31$

$(-37, 28 + 31)$

donc $(-37, 59)$

b) $(y - 37)^2 = -56\,(x + 19)$



sommet : $(-19, 37)$

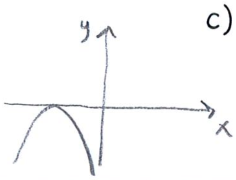
Foyer : $4c = -56$

$c = -14$

$(-19 - 14, 37)$

donc $(-33, 37)$

c) $(x + 21)^2 = -4\,y$



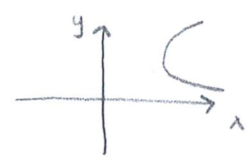
sommet : $(-21, 0)$

Foyer : $4c = -4$

$c = -1$

donc $(-21, -1)$

d) $(y - 7)^2 = 16\,(x + 6)$



sommet : $(6, 7)$

Foyer : $4c = 16$

$c = 4$

$(6 + 4, 7)$

donc $(10, 7)$

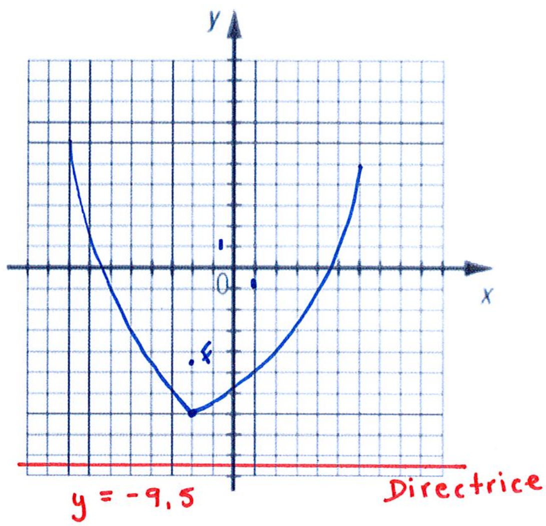
#2 Représente graphiquement les paraboles suivantes :

a) $(x+2)^2 = 10\,(y+7)$

sommet $(-2,-7)$

$4c = 10$

$c = 2{,}5$

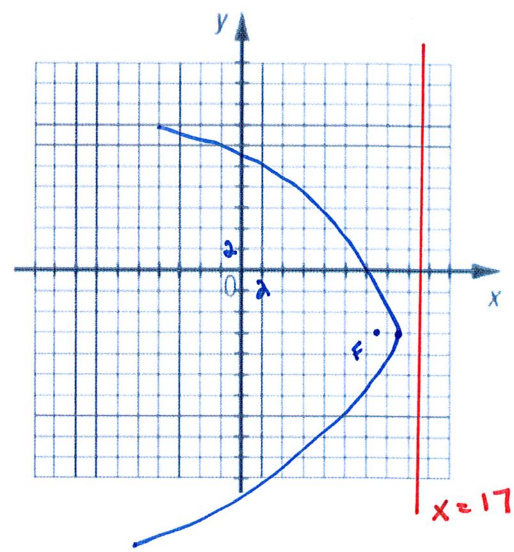


b) $(y+6)^2 = -8\,(x-15)$

sommet : $(15,-6)$

$4c = -8$

$c = -2$



Recherche de l'équation de la parabole

Étapes :

1) D'après l'orientation de la courbe déterminer la forme recherchée :

$$(x-h)^2 = 4c(y-k) \quad ou \quad (y-k)^2 = 4c(x-h)$$

2) Déduire certains renseignements concernant les paramètres c, h et k

Exercices

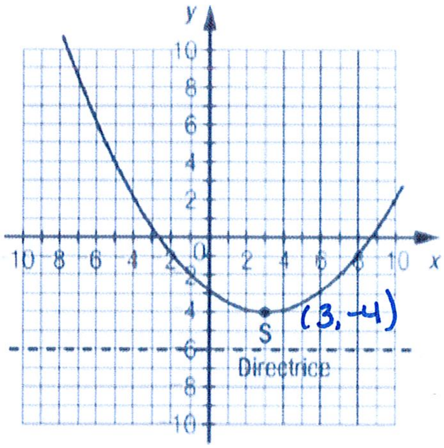
#1 Dans chaque cas, déterminez

1) l'équation de la directrice de la parabole

2) Les coordonnées du foyer de la parabole

3) L'équation de la parabole

a)



1) Directrice : $y = -6$ $\quad c = +2$ U

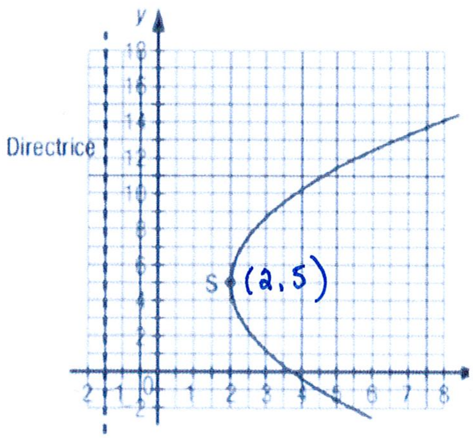
2) Foyer : $(3, -2)$

3) Équation : $(x-h)^2 = 4c(y-k)$

Donc :

$$(x-3)^2 = 8(y+4)$$

b)



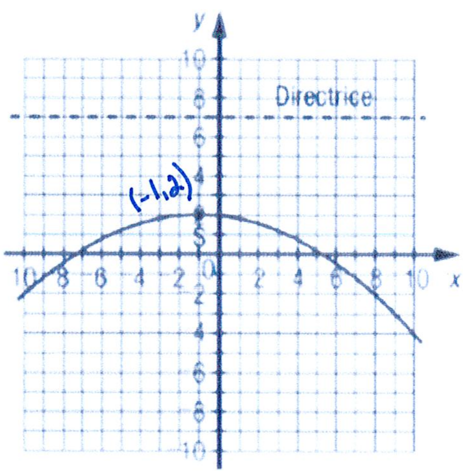
1) Directrice : $x = -1,5$ $\quad c = +3,5$ C

2) Foyer : $(5,5 \;,\; 5)$

3) Équation : $(y-k)^2 = 4c(x-h)$

donc $(y-5)^2 = 14(x-2)$

c)



1) Directrice : $y = 7$ $\quad c = -5$

2) Foyer : $(-1, -3)$

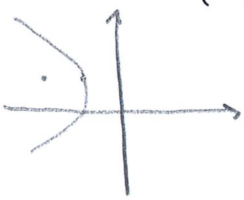
3) Équation : $(x-h)^2 = 4c(y-k)$

donc $(x+1)^2 = -20(y-2)$

#2 Trouver l'équation de la parabole dont les coordonnées du sommet sont

h k

(-2,3) et le celles du foyer sont (-5,3).

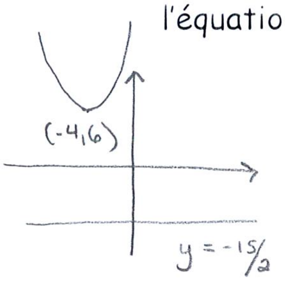


Forme : $(y-k)^2 = 4c(x-h)$

$c = -3$

donc $(y-3)^2 = -12(x+2)$

#3 Trouve l'équation de la parabole qui passe par le sommet (-4,6) et dont l'équation de la directrice est $y = -\frac{15}{2}$



Forme : $(x-h)^2 = 4c(y-k)$

$C = 6 - \frac{-15}{2} = \frac{12}{2} + \frac{15}{2} = \frac{27}{2}$

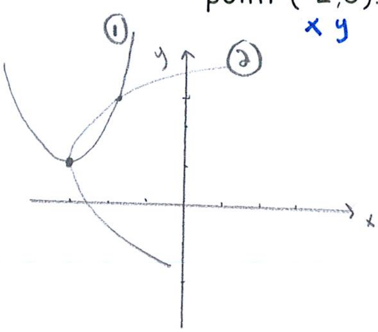
$4 \cdot \frac{27}{2} = 54$

donc $(x+4)^2 = 54(y-6)$

h k

#4 Trouver l'équation de la parabole qui passe par le sommet (-3,1) et par le point (-2,3).

x y



① Forme :

$(x-h)^2 = 4c(y-k)$

$(-2+3)^2 = 4c(3-1)$

$\frac{1}{2} = \frac{4c \cdot 2}{2}$

$\frac{1}{2} = 4c$

donc

$(x+3)^2 = \frac{1}{2}(y-1)$

② Forme

$(y-k)^2 = 4c(x-h)$

$(1-3)^2 = 4c(-2+3)$

$\frac{4}{1} = \frac{4c(1)}{1}$

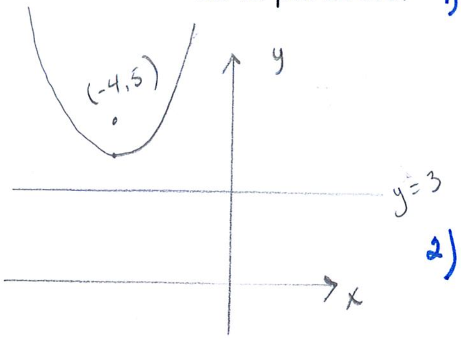
$4c = 4$

donc

$(y-3)^2 = 4(x+3)$

#5 Le foyer d'une parabole se situe au point (-4,5) du plan cartésien et la directrice de cette parabole a comme équation $y - 3 = 0$. Trouve l'équation de la parabole.

$y = 3$



1) Trouve c :

$2c = 5 - 3$

$2c = 2$

$c = 1$

2) Sommet :

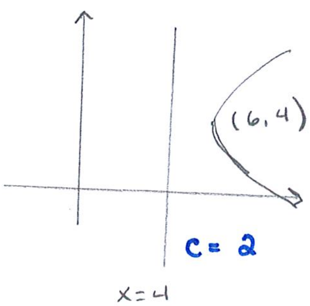
$(-4, 4)$

3) Forme

$(x-h)^2 = 4c(y-k)$

$(x+4)^2 = 4(y-4)$

#6 La droite d'équation $x = 4$ est la directrice de la parabole de sommet (6,4). Trouve l'équation de cette parabole.

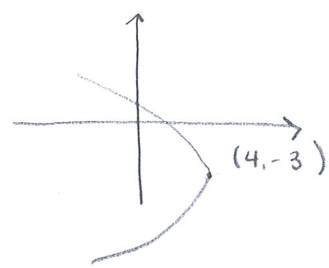


Forme : $(y-k)^2 = 4c(x-h)$

$(y-4)^2 = 8(x-6)$

$c = 2$

#7 Voici l'équation d'une parabole : $(y+3)^2 = -9(x-4)$



Trouve :

1- les coordonnées du sommet : $(4, -3)$

2-l'équation de l'axe de symétrie

$y = -3$

3-les coordonnées du foyer

$4c = -9$

$c = -9/4$

$\left(4 - \frac{9}{4}, -3\right)$

$\left(\frac{7}{4}, -3\right)$

4-l'équation de la directrice

$x = 4 + \frac{9}{4}$

$x = \frac{25}{4}$

Régions associées à la parabole

Voici les étapes pour représenter la région intérieure ou extérieure à la parabole :

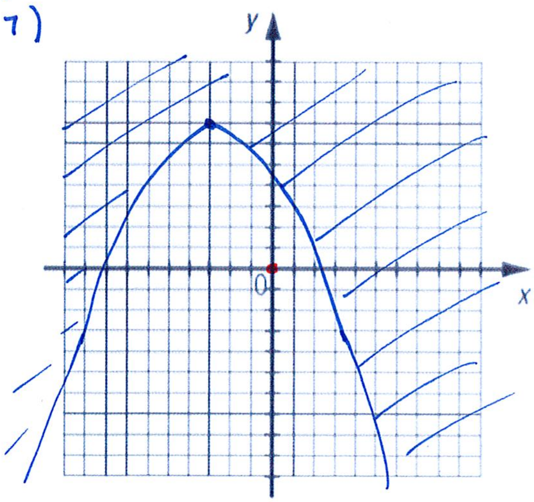
1. Transformer l'inéquation en équation sous la forme
$$(x-h)^2 = 4c(y-k) \quad ou \quad (y-k)^2 = 4c(x-h)$$
2. Tracer la courbe frontière :
   trait plein si $\geq$ ou $\leq$
   trait pointillé si $>$ ou $<$
3. Utiliser un point témoin pour savoir la région à hachurer.

Exercice :

Représentez graphiquement la région associée à chaque inéquation :

a) $(x+3)^2 \geq -32(y-7)$

Sommet $(-3, 7)$



PT $(0,0)$

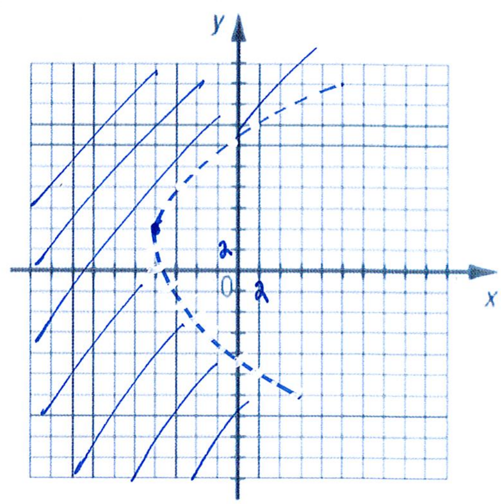
$(0+3)^2 \geq -32(0-7)$

$9 \geq 224$

F

b) $(y-4)^2 > 24(x+8)$

Sommet $(-8, 4)$



PT $(0,0)$

$(0-4)^2 > 24(0+8)$

$16 > 192$

F

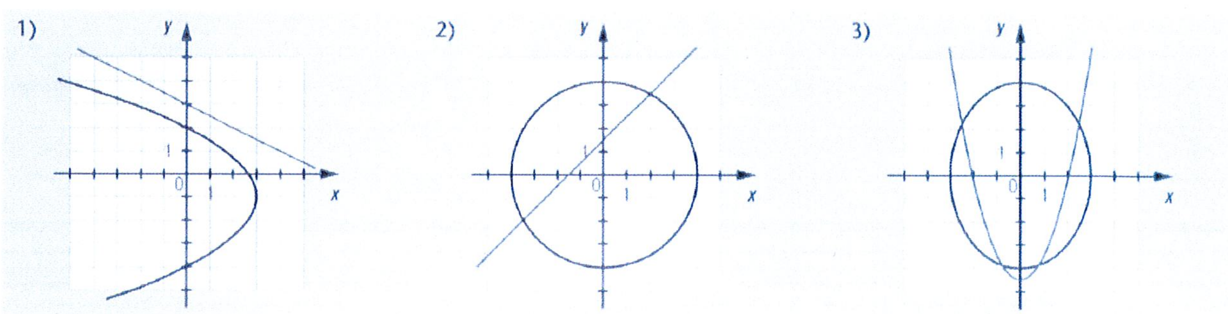
Points d'intersection entre une droite et une conique ou entre une parabole et une autre conique

Différentes stratégies permettent de déterminer les coordonnées du ou des points d'intersection entre une droite et une conique ou entre une parabole et une autre conique.

Représentation graphique

En représentant deux courbes dans un même plan cartésien, il est possible de déterminer le nombre de points d'intersection entre ces courbes.

Voici différentes situations :



Aucun point d'intersection

Deux points d'intersections

Quatre points d'intersections

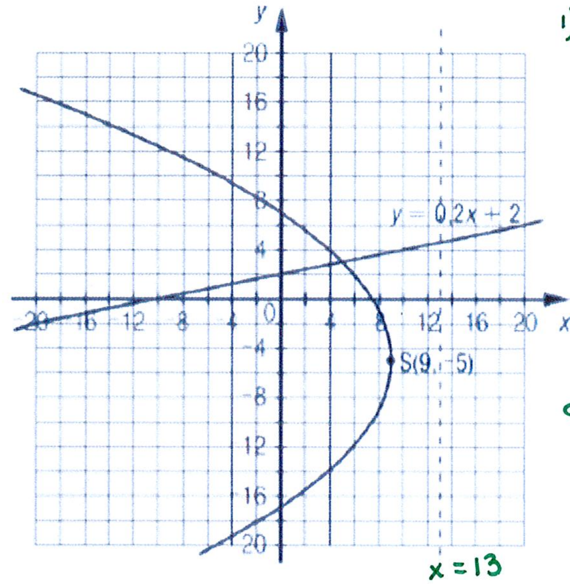
Méthodes algébriques

Les méthodes de comparaison, de substitution et de réduction permettent de déterminer les coordonnées du ou des points d'intersection, s'il ou ils existent, entre une droite et une conique ou entre une parabole et une autre conique.

Exercices

#1 Dans chaque cas, déterminez les coordonnées du ou des points d'intersection entre la droite et la conique.

a)



1) Trouve l'équation de la parabole :

Forme : $(y-k)^2 = -4c(x-h)$

sommet $(9, -5)$

$c = 4$

donc $(y+5)^2 = -16(x-9)$

2) Par substitution : trouve x

$(0{,}2x+2+5)^2 = -16(x-9)$

$(0{,}2x+7)^2 = -16(x-9)$

$0{,}04x^2 + 2{,}8x + 49 = -16x + 144$

$0{,}04x^2 + 18{,}8x - 95 = 0$

Donc $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \dfrac{-18{,}8 \pm \sqrt{(18{,}8)^2 - (4 \cdot 0{,}04 \cdot -95)}}{0{,}08}$

$x = \dfrac{-18{,}8 \pm \sqrt{368{,}64}}{0{,}08}$

$x_1 = -475 \qquad x_2 = 5$

3) Trouve y :

$y = 0{,}2x + 2$

$y_1 = 0{,}2 \cdot -475 + 2$

$y_1 = -93$

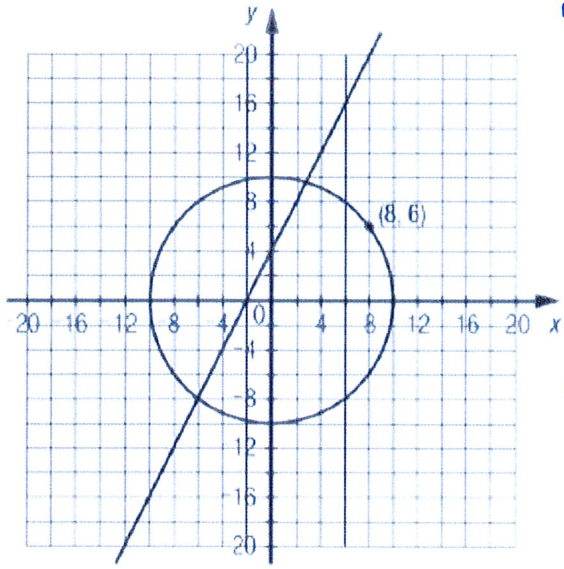
et

$y_2 = 0{,}2 \cdot 5 + 2$

$y_2 = 3$

Rép : $(5, 3)$ et $(-475, -93)$

b)



1) Trouve l'équation de la droite:

$(-2, 0)$ et $(0, 4)$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-0}{0--2} = 2$$

donc $y = 2x + 4$

2) Trouve l'équation du cercle:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$8^2 + 6^2 = r^2$$

$$100 = r^2$$

donc $x^2 + y^2 = 100$

3) Par substitution trouve x:

$$x^2 + (2x+4)^2 = 100$$

$$x^2 + 4x^2 + 16x + 16 = 100$$

$$5x^2 + 16x - 84 = 0$$

donc $x = \dfrac{-16 \pm \sqrt{16^2 - (4 \cdot 5 \cdot -84)}}{10}$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{1936}}{10}$$

$x_1 = -6$ et

$x_2 = 2,8$

4) Trouve y

$$y = 2x + 4$$

$$y_1 = 2 - 6 + 4$$

$$y_1 = -8$$

$$y_2 = 2 \cdot 2,8 + 4$$

$$y_2 = 9,6$$

Rép:

$(-6, -8)$ et $(2.8, 9.6)$