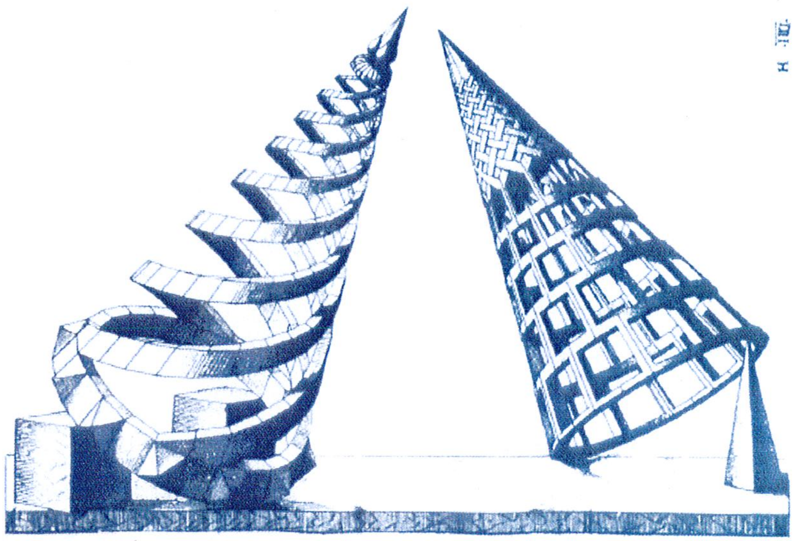
Les coniques



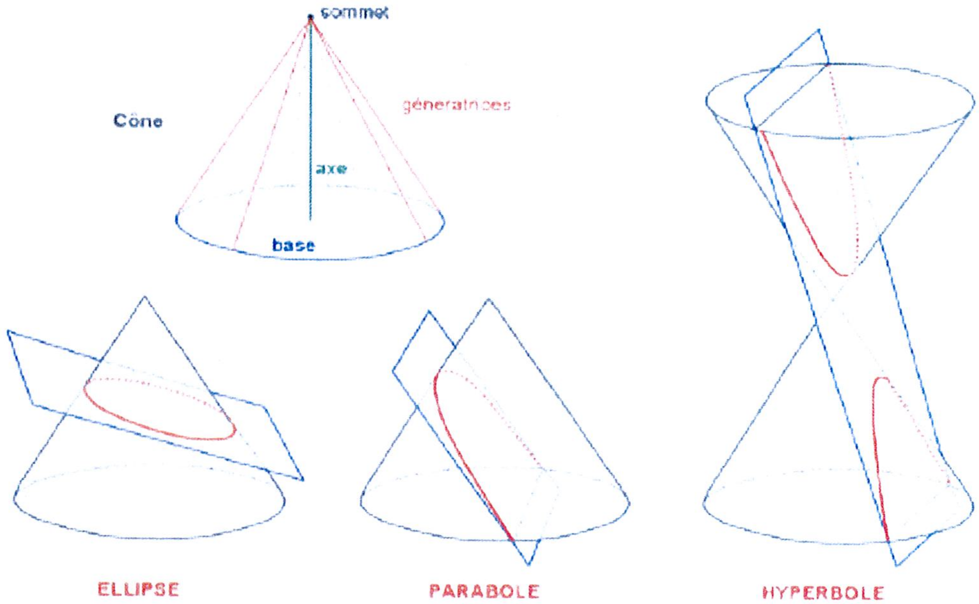
ATHÉMATIQUE SN5

Nom : ____________________ Groupe : _________

Les coniques

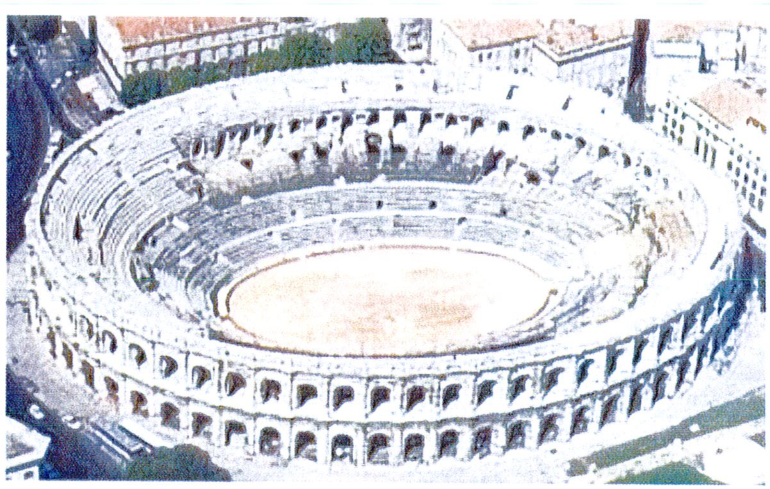
Une conique est une courbe définie par l'intersection d'un plan et d'une surface conique. **Un lieu géométrique** est un ensemble de points ayant une caractéristique _commune_. Chaque conique est **un lieu géométrique**.

Les coniques ont été décrites et construites (par Apollonius (-262; -190) à partir d'un cône de révolution coupé par un plan :

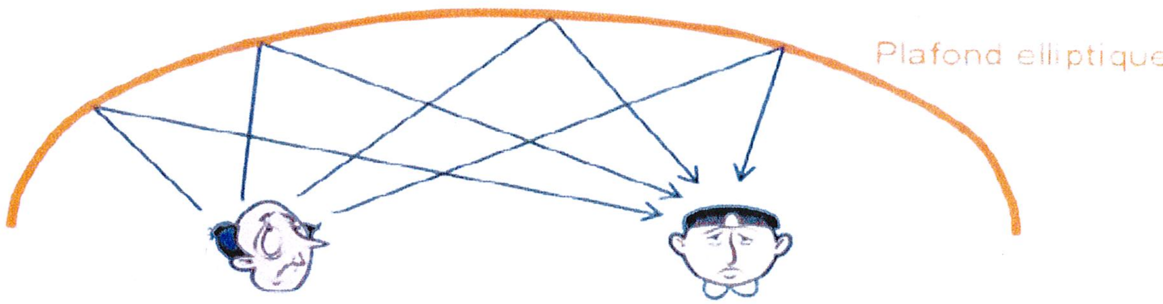


Si elles ont passionné les savants de l'Antiquité, c'est avant tout parce que les coniques sont très présentes dans l'environnement. Voici quelques exemples :

Les arènes de Nîmes dont la forme est une ellipse :

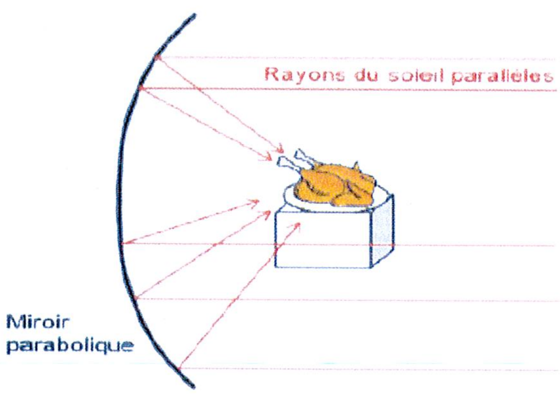


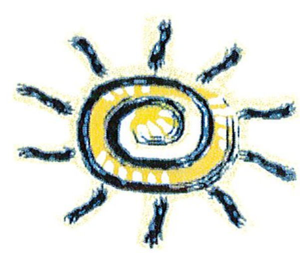
Le plafond elliptique de l'abbaye de la Chaise Dieu en Haute-Loire qui par une propriété géométrique de l'ellipse offrait la possibilité aux lépreux de venir se confesser.



En se réfléchissant sur le plafond dont la forme est elliptique, les ondes sonores se propagent d'un foyer à l'autre.

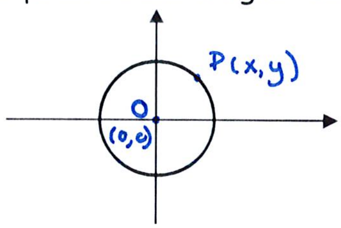
Les paraboles connaissent une propriété analogue mise en application pour les fours solaires ou les radars (parabole TV par exemple). Les rayons du soleil, tous parallèles, se réfléchissent sur la parabole et convergent tous en un point, le foyer. L'énergie due au rayon du soleil se trouve concentrée et permet de chauffer.





Le cercle :

Le cercle est un lieu géométrique, car c'est une ligne courbe fermée dont tous les points sont à égale distance d'un même point appelé centre.



Cette année, nous verrons uniquement le cercle centré à l'origine !

L'équation canonique du cercle centré à l'origine est :

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{où } r \text{ est le rayon!}}$$

Démonstration : Prenons la distance entre 2 points : (0,0) et (x,y)

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$m\overline{OP} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$

$m\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$ $m\overline{OP}$ étant le rayon !

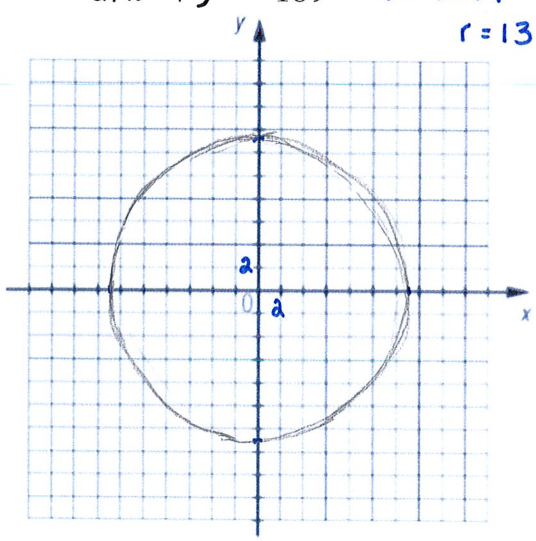
Donc $r^2 = x^2 + y^2$

Représentation graphique d'un cercle centré à l'origine

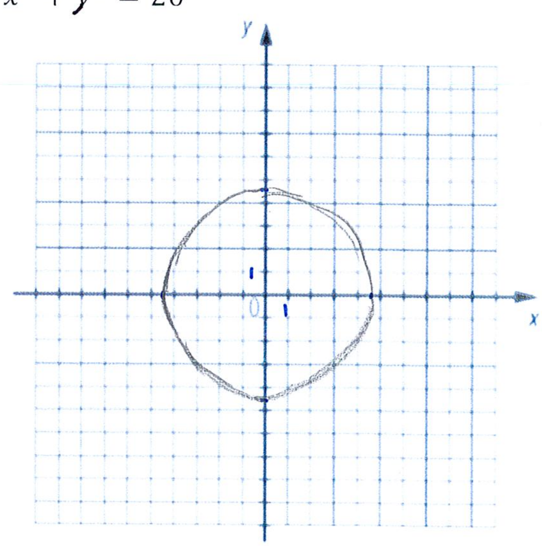
Il te suffit de connaître le rayon !

Représente graphiquement chacun des cercles suivants :

a) $x^2 + y^2 = 169$ $r = \sqrt{169}$ $r = 13$



b) $x^2 + y^2 = 20$ $r = \sqrt{20}$ $r \approx 4,47$



Recherche de l'équation du cercle centré à l'origine

Pour trouver l'équation du cercle centré à l'origine sous sa forme canonique, il suffit de :

- Substituer la mesure du rayon dans cette forme

ou

- Substituer les coordonnées d'un point de la courbe pour trouver le rayon.

Exercices :

#1 Parmi les équations suivantes, lesquelles sont représentées dans le plan cartésien par un cercle? Si possible détermine le rayon du cercle.

a) $x^2 + y^2 = 25$

oui rayon = 5

b) $2x^2 + y^2 = 4$

NON

c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$

oui rayon = 2

d) $y^2 = 20 - x^2$

oui rayon = $\sqrt{20}$

e) $x^2 - y^2 = 16$

non

#2 Déterminez l'équation canonique du cercle centré à l'origine et dont le rayon mesure 4.

$x^2 + y^2 = 16$

#3 Un cercle centré à l'origine passe par le point P(-5, 12). Quelle est son équation ?

x y

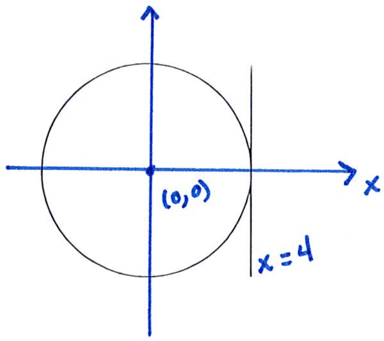
$x^2 + y^2 = r^2$

$(-5)^2 + (12)^2 = r^2$

$169 = r^2$

donc $x^2 + y^2 = 169$

#4 La droite d'équation x - 4 = 0 est tangente à un cercle centré à l'origine. Quelle est l'équation de ce cercle ?



$x^2 + y^2 = 16$

#5 Les coordonnées d'un point du cercle centré à l'origine sont (6, 3). Quelles sont les coordonnées des deux points du cercle dont l'abscisse est 4?

1) Trouve l'équation

$x^2 + y^2 = r^2$

$6^2 + 3^2 = r^2$

$45 = r^2$

donc $x^2 + y^2 = 45$

2) $y = ?$ si $x = 4$

$4^2 + y^2 = 45$

$y^2 = 45 - 16$

$y^2 = 29$

$y = \pm\sqrt{29}$

Donc $(4, -\sqrt{29})$ et $(4, \sqrt{29})$

#6Le segment reliant les points A (5. -1) et B (-5, 1) est le diamètre d'un cercle centré à l'origine. Quelle est l'équation de ce cercle ?

1) Trouve le rayon   ou d(A,B)

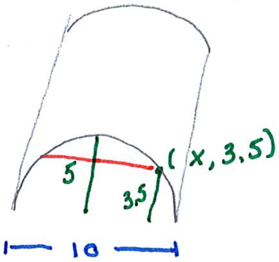
$x^2 + y^2 = r^2$

$5^2 + (-1)^2 = r^2$

$26 = r^2$

donc $x^2 + y^2 = 26$

#7 Un menuisier doit construire un plafond dans un hangar en forme de demi-cylindre. La largeur totale du hangar est de 10 m. Quelle longueur doit-il donner aux pièces de bois qui soutiendront le plafond si celui-ci doit être à une hauteur de 3,5 mètres?



$r = \frac{10}{2} = 5$

1) l'équation :

$x^2 + y^2 = 25$

2) $x = ?$ si $y = 3.5$

$x^2 + 3.5^2 = 25$

$x^2 = 25 - 12.25$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{12.75}$

$x = \pm 3.57$

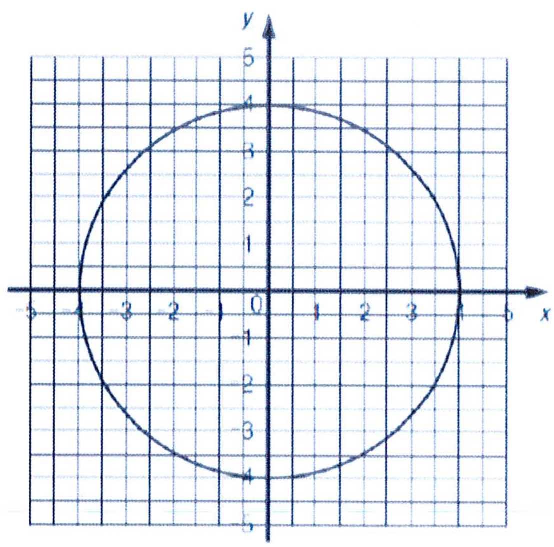
3) largeur $= 2 \times 3.57$

$= 7.14\,m$

Rép : Les pièces de bois doivent mesurer 7.14 m

#8 Établissez l'équation de chacun des cercles suivants :

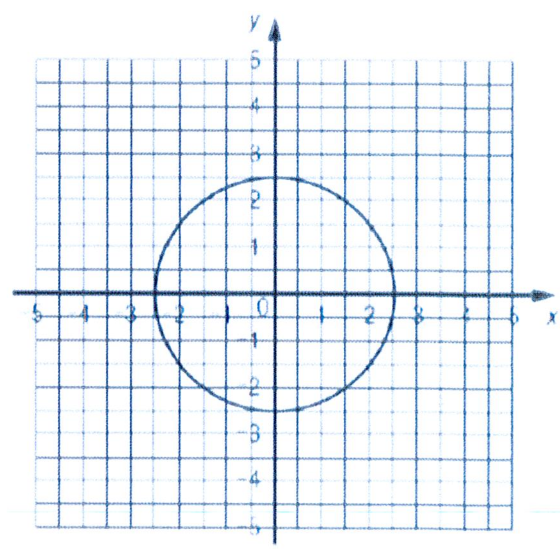
a)



$r = 4$ pt $(0, 4)$!

$x^2 + y^2 = 16$

b)



pt $(0, 2.5)$ $r = 2.5$

$x^2 + y^2 = 6.25$

Régions associées au cercle

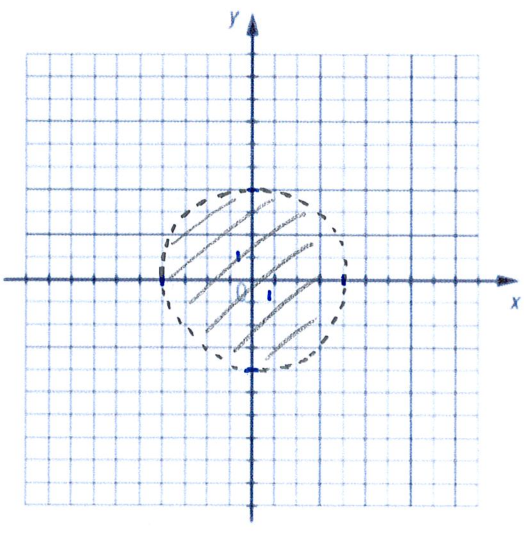
Voici les étapes pour représenter la région intérieure ou extérieure à un cercle :

1. Transformer l'inéquation en équation sous la forme $x^2 + y^2 = r^2$
2. Tracer la courbe frontière :
   trait plein si $\geq \ \leq$
   trait pointillé si $> \ <$
3. Hachurer : l'intérieure de la courbe si $\leq$ ou $<$
   l'extérieur de la courbe si $\geq$ ou $>$

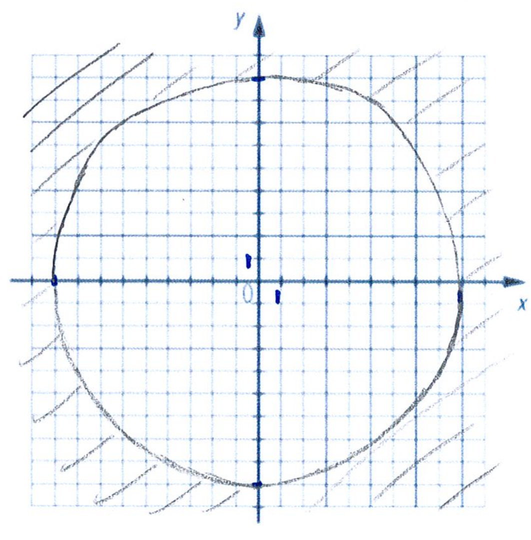
Ou prenez un point témoin !!

Exercice : Représente graphiquement la région associée à chaque inéquation

a) $x^2 + y^2 < 16$

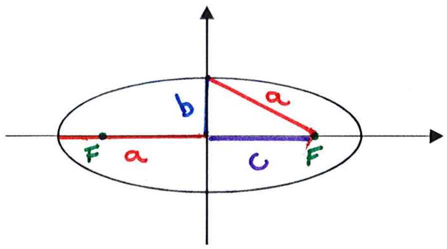


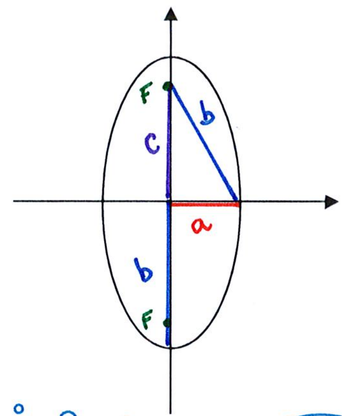
b) $x^2 + y^2 \geq 81$



L'ellipse

Une ellipse est un lieu géométrique décrit par l'ensemble des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante. Les deux points fixes sont les foyers.





Ellipse centré à l'origine seulement!

Dans la représentation graphique d'une ellipse dont l'équation s'écrit sous la forme

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

- Les coordonnées du centre sont $(0,0)$
- La longueur de l'axe horizontal correspond à $2|a|$
- La longueur de l'axe vertical correspond à $2|b|$
- La distance entre les foyers correspond à $2|c|$
- Les foyers sont toujours situés sur le plus grand des deux axes (aussi nommé axe transversal)
- La relation entre la valeur du paramètre a, celle du paramètre b et celle du paramètre c est donnée par :

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2, \text{ si } a > b \\ b^2 = a^2 + c^2, \text{ si } b > a \end{array}}$$

- Les coordonnées des sommets sont $(a,0)$, $(-a,0)$, $(0,b)$ et $(0,-b)$

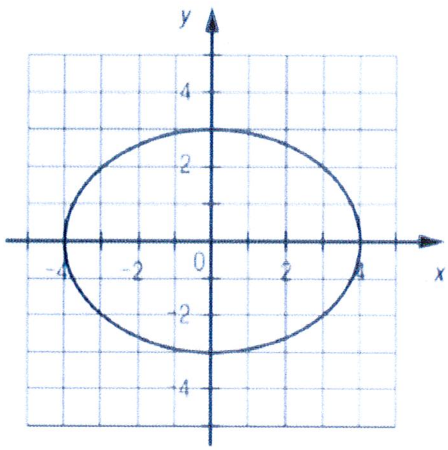
Exercice : #1 Dans chaque cas, déterminez :

1) La longueur du demi-axe horizontal (paramètre a)

2) La longueur du demi-axe vertical (paramètre b)

3) L'équation de l'ellipse sous la forme : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

a)

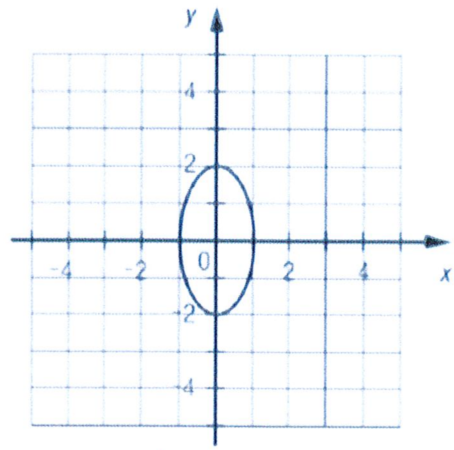


1) $a = 4$

2) $b = 3$

3) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

b)

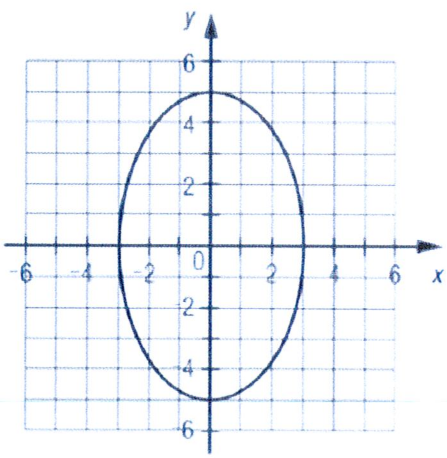


1) $a = 1$

2) $b = 2$

3) $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

c)

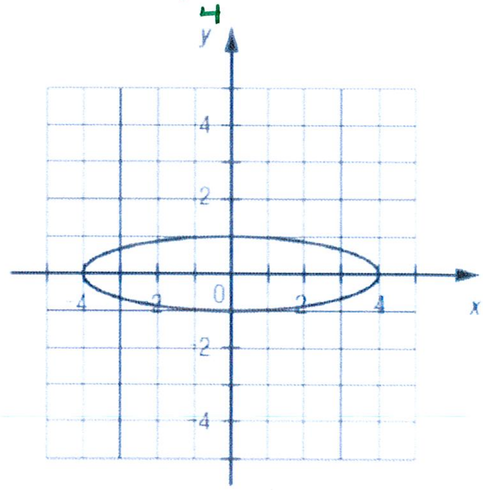


1) $a = 3$

2) $b = 5$

3) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

d)



1) $a = 4$

2) $b = 1$

3) $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$