#2 Dites si les équations suivantes représentent des ellipses :

a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

oui

b) $\frac{16x^2}{400} + \frac{25y^2}{400} = \frac{400}{400}$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ oui

c) $\frac{3x^2 + 3y^2}{3} = \frac{48}{3}$

$x^2 + y^2 = 16$

Donc NON

d)) $\frac{x^2}{9} + \frac{y}{25} = 1$

NON car y n'est pas du second degré !

Représentation graphique d'une ellipse centrée à l'origine

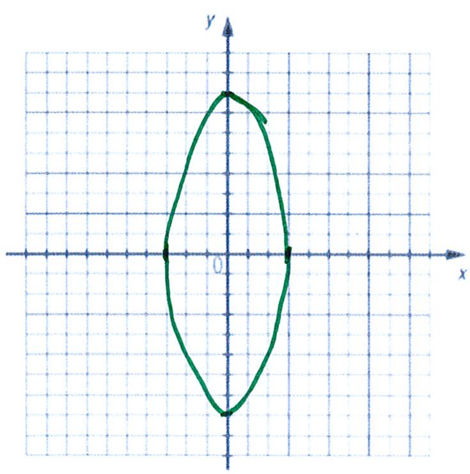
Il te suffit de connaître les sommets !

Exercices :#1 Représente graphiquement l'ellipse associée aux l'équations suivantes :

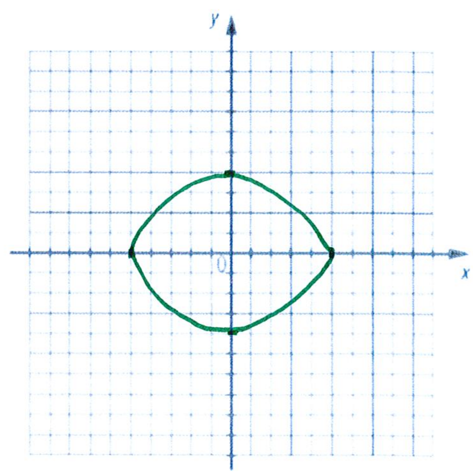
a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{64} = 1$

$a = 3$

$b = 8$

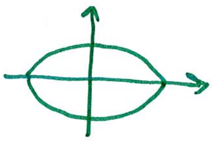


b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ $a = 5$ $b = 4$



#2 Dans chaque cas, déterminez les coordonnées des sommets et des foyers de l'ellipse.

a) $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{169} = 1$



$a = 15$ $\quad a^2 = b^2 + c^2$

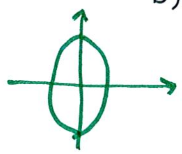
$b = 13$ $\quad 225 = 169 + c^2$

$c = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

Donc Sommets : $(-15,0), (15,0)$
$(0,-13\ (0,13)$

Foyers : $(-2\sqrt{14}, 0)$ et $(2\sqrt{14}, 0)$

b) $\frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{196} = 1$



$a = 11$ $\quad b^2 = a^2 + c^2$

$b = 14$ $\quad 196 = 121 + c^2$

$c = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

Sommets : $(-11,0), (11,0)$
$(0,-14)\ (0,14)$

Foyers : $(0, -5\sqrt{3})$ et $(0, 5\sqrt{3})$

#3 Dans chaque cas, déterminez les coordonnées des 4 sommets de l'ellipse :

a) $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

$(-1,0), (1,0)$

$(0,-2)$ et $(0,2)$

b) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$

$(-8,0), (8,0)$

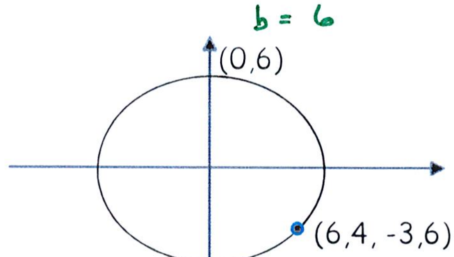
$(0,-6)$ et $(0,6)$

Recherche de l'équation de l'ellipse centrée à l'origine :

1-Connaissant un sommet et un point : Remplace le x et le y par les coordonnées du point et le paramètre connu afin de trouver l'autre paramètre.

Ex :

$b = 6$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Rép : $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$

$$\frac{6.4^2}{a^2} + \frac{(-3,6)^2}{6^2} = 1$$

$$\frac{40,96}{a^2} + \frac{12,96}{36} \underset{-\frac{12.96}{36}}{=} \frac{36}{36} - \frac{12.96}{36}$$

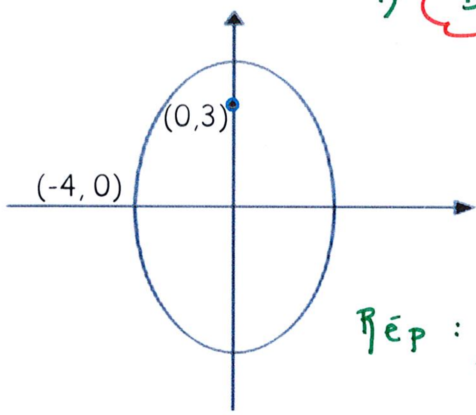
$$\frac{40,96}{a^2} = \frac{23,04}{36}$$

$$a^2 = \frac{36 \cdot 40,96}{23,04}$$

$$a^2 = 64$$

2-Connaissant le foyer et un paramètre : Utilise Pythagore pour trouver le paramètre manquant.

Ex :



1) $\boxed{b > a \text{ donc}}$

$b^2 = a^2 + c^2$

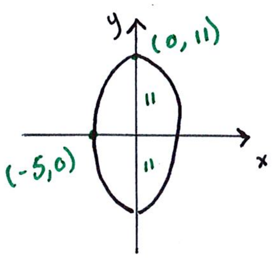
$b^2 = (-4)^2 + 3^2$

$b = 5$

Rép : $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

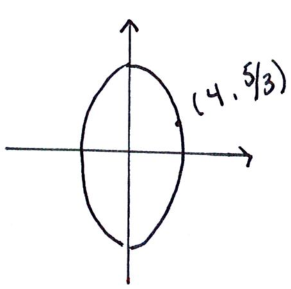
Exercices

#1 Détermine l'équation d'une ellipse verticale centrée à l'origine ayant un grand axe de 22 unités et un sommet situé à (-5, 0). $a = 5 \quad b = 11$!



$\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{121} = 1$

#2 Détermine l'équation d'une ellipse centrée à l'origine qui passe par le point $(4, \frac{5}{3})$ et dont deux sommets sont situés à (0, -6) et (0, 6).



$b = 6$

Pt$(4, 5/3)$
$\quad x \quad y$

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$\dfrac{4^2}{a^2} + \dfrac{(5/3)^2}{36} = 1$

$\dfrac{16}{a^2} + \dfrac{25/9}{36} = 1$

$\dfrac{16}{a^2} + \dfrac{25}{324} = 1$

$\dfrac{16}{a^2} = \dfrac{324}{324} - \dfrac{25}{324}$

$\dfrac{16}{a^2} = \dfrac{299}{324}$

$a^2 = \dfrac{16 \cdot 324}{299} = \dfrac{5184}{299}$

Rép: $\dfrac{x^2}{5184/299} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

#3 Un menuisier fabrique une table de forme elliptique qui possède les caractéristiques suivantes :

- La distance entre les deux foyers est de 2m. => $c = 1$
- La longueur du petit axe est de 1,5 m. a ou b ! Disons $b = 0{,}75$

a) Établissez l'équation de l'ellipse qui correspond au pourtour de la table.

1) Trouve a :

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = 0{,}75^2 + 1^2$

$a^2 = 1{,}5625$ ou $25/16$

Donc $\frac{x^2}{1{,}5625} + \frac{y^2}{0{,}5625} = 1$

ou

$\frac{x^2}{25/16} + \frac{y^2}{9/16} = 1$

b) Quelles sont les dimensions minimales d'une planche rectangulaire dans laquelle on peut y découper la table d'un seul morceau ?

longueur = grand axe

$= 2a$

$= 2\sqrt{25/16}$

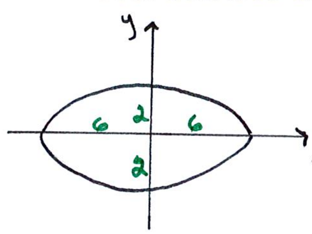
$= 2.5\,m$

largeur = petit axe

$= 1{,}5\,m$

Donc 2.5m par 1,5 m

#4 Le grand axe d'une ellipse centrée à l'origine mesure 12 unités et le petit axe mesure 4 unités. Détermine l'équation de l'ellipse et quelles sont les coordonnées des sommets et des foyers si l'axe transversal est l'axe des x.



1) Équation : $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$

$a = 6$

$b = 2$

2) Sommets :

$(-6, 0)$ $(6, 0)$

$(0, -2)$ $(0, 2)$

3) Trouve c :

$a^2 = b^2 + c^2$

$6^2 = 2^2 + c^2$

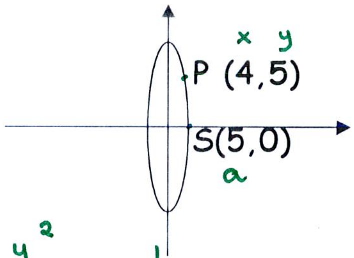
$\sqrt{32} = \sqrt{c^2}$

$c = \pm 4\sqrt{2}$

Donc Foyers :

$(-4\sqrt{2}, 0)$ et $(4\sqrt{2}, 0)$

#5 Trouve l'équation de l'ellipse



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{4^2}{5^2} + \frac{5^2}{b^2} = 1$$

$-16/25$

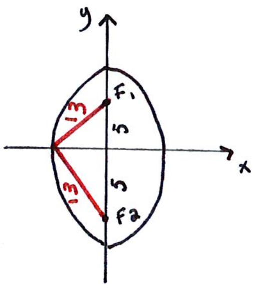
$$\frac{16}{25} + \frac{5^2}{b^2} = \frac{25}{25} - \frac{16}{25}$$

$$\frac{25}{b^2} = \frac{9}{25} \qquad b^2 = \frac{25 \cdot 25}{9}$$

$$b^2 = 625/9$$

Rép: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{625/9} = 1$

#6 Trouve l'équation du lieu géométrique dont la somme des distances à deux points fixes dont les coordonnées sont F_1 (0,5) et F_2 (0,-5) est égale à 26.



Donc $b = 13$

$c = 5$

trouve a !

$$b^2 = a^2 + c^2$$

$$13^2 = a^2 + 5^2$$

$$169 = a^2 + 25$$

$$a^2 = 144$$

Rép : $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$

#7 Une piste de course est de forme elliptique. La longueur du grand axe est de 80 cm et la distance focale est de 64 cm. Quelle est la longueur du petit axe? a ou b !

1) $2c = 64 \Rightarrow c = 32$

$2a = 80 \Rightarrow a = 40$

2) Trouve b

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$40^2 = b^2 + 32^2$$

$$1600 = b^2 + 1024$$

$$576 = b^2$$

$$24 = b$$

3) Donc le petit axe mesure $2 \cdot b$

alors $2 \cdot 24 = 48$ cm

Régions associées à l'ellipse

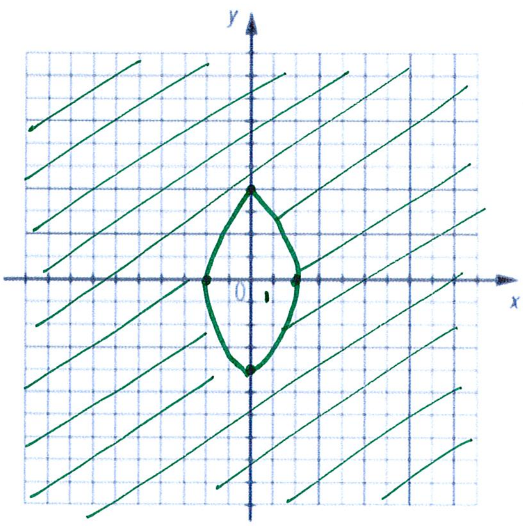
Voici les étapes pour représenter la région intérieure ou extérieure à une ellipse :

1. Transformer l'inéquation en équation sous la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
2. Tracer la courbe frontière :
   trait plein si $\geq$ ou $\leq$
   trait pointillé si $>$ ou $<$
3. Hachurer : l'intérieure de la courbe si $\leq$ ou $<$
   l'extérieur de la courbe si $\geq$ ou $>$

Ou prenez un point témoin !!

Exercice : Représente graphiquement la région associée à chaque inéquation

a) $20x^2 + 5y^2 \geq 80$



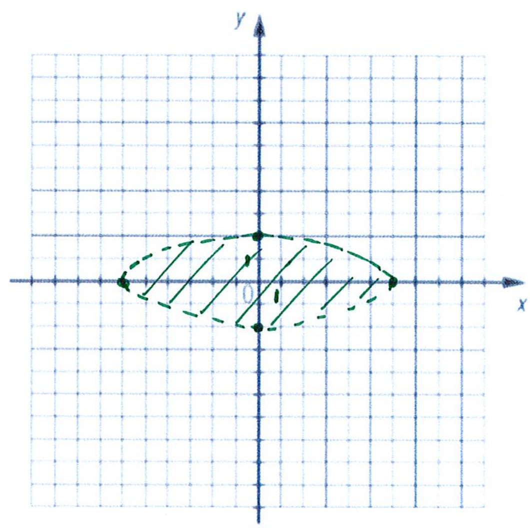
$$\frac{20x^2}{80} + \frac{5y^2}{80} = \frac{80}{80}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$a = 2$

$b = 4$

b) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} < 1$



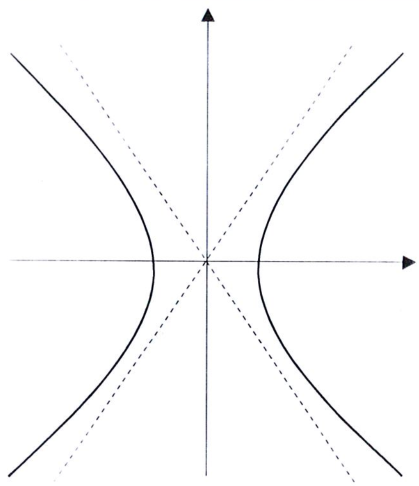
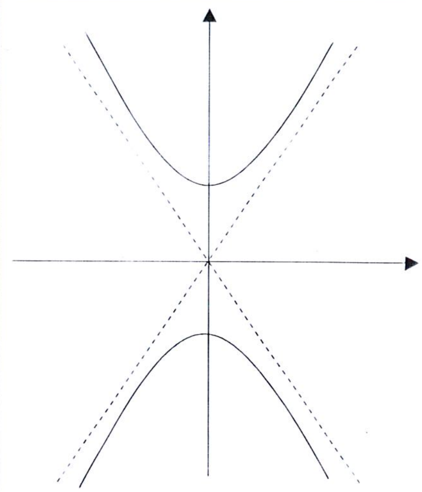
$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$a = 6$

$b = 2$

L'hyperbole (centrée à l'origine !!!)

Lieu géométrique décrit par l'ensembles des points dont la valeur absolue de la différence des distances à deux points fixe est constante. Ces deux points fixes sont les foyers de l'hyperbole.

	Axe transverse horizontal	Axe transverse vertical
Graphique :		
Équation sous la forme canonique :	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$
Équations des asymptotes :	$y = \frac{b}{a}x$ et	$y = -\frac{b}{a}x$
Coordonnées des foyers :	$(c, 0)$ et $(-c, 0)$	$(0, c)$ et $(0, -c)$
Coordonnées des sommets :	$(a, 0)$ et $(-a, 0)$	$(0, b)$ et $(0, -b)$

Les paramètres a, b et c vérifient l'équation suivante :

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

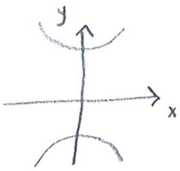
Représentation graphique d'une hyperbole centrée à l'origine

Étapes :

1) Détermine l'ouverture de l'hyperbole
2) Détermine et trace les asymptotes
3) Détermine et place les sommets et les foyers

Exercices

#1Dans chaque cas, détermine les coordonnées des sommets et des foyers de l'hyperbole



a) $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{144} = -1$

$a = 9$ $\quad c^2 = a^2 + b^2$

$b = 12$ $\quad c^2 = 81 + 144$

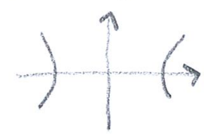
$c^2 = 225$

$c = 15$

Sommets :
$(0, 12)$ et $(0, -12)$

Foyers :
$(0, 15)$ et $(0, -15)$

asymptotes : $y = \pm \frac{12}{9} x$ $\quad y = \pm \frac{4x}{3}$



b) $\frac{x^2}{52} - \frac{y^2}{12} = 1$

$a = \sqrt{52}$ $\quad c^2 = a^2 + b^2$

$b = \sqrt{12}$ $\quad c^2 = 52 + 12$

$c = 8$

Sommets : $(-2\sqrt{13}, 0)$ et $(2\sqrt{13}, 0)$

Foyers : $(-8, 0)$ et $(8, 0)$

#2 Représente graphiquement les hyperboles suivantes :

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$

$a = 2$

$b = 5$

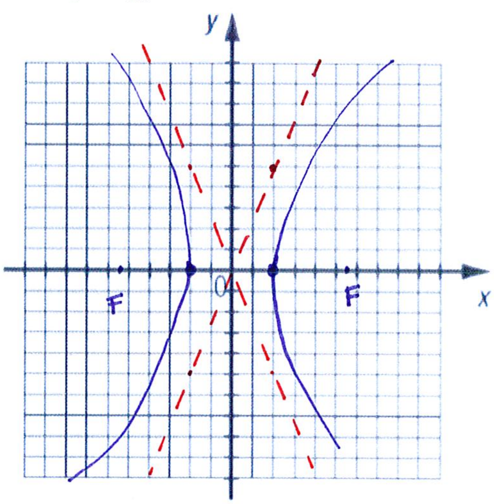
asymptotes :
$y = \pm \frac{5}{2} x$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 4 + 25$

$c = \sqrt{29}$

$\approx 5{,}39$



b) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{49} = -1$

$a = 10$

$b = 7$

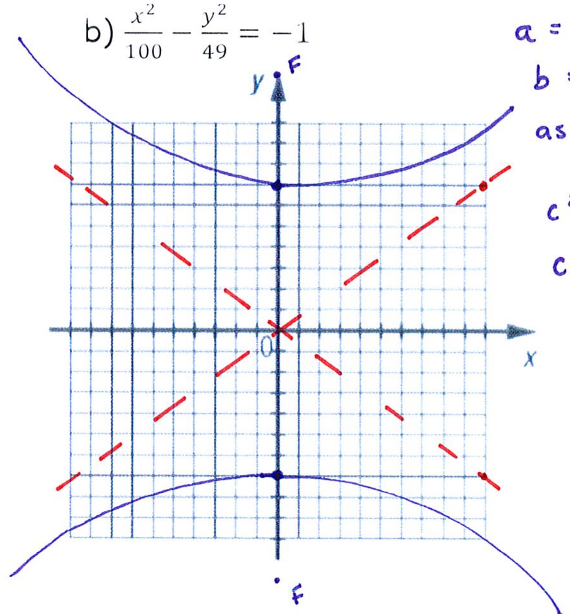
asy : $y = \pm \frac{7}{10}$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 100 + 49$

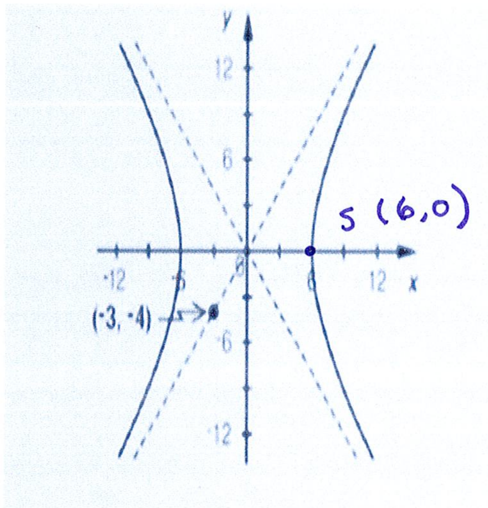
$c = \sqrt{149}$

$\approx 12{,}21$



Recherche de l'équation de l'hyperbole centrée à l'origine

Voyons comment trouver l'équation d'une hyperbole centrée à l'origine à l'aide des deux exemples suivants :

1) 

1) Déduire la forme recherchée d'après l'orientation de la courbe :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2) Trouver l'équation d'une asymptote :

$(0,0)$ et $(-3,-4)$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-0}{-3-0} = \frac{4}{3} \qquad y = \frac{4}{3}x$$

3) À l'aide du sommet et de l'équation de l'asymptote déduire le paramètre b :

$$y = \frac{b}{a}x$$

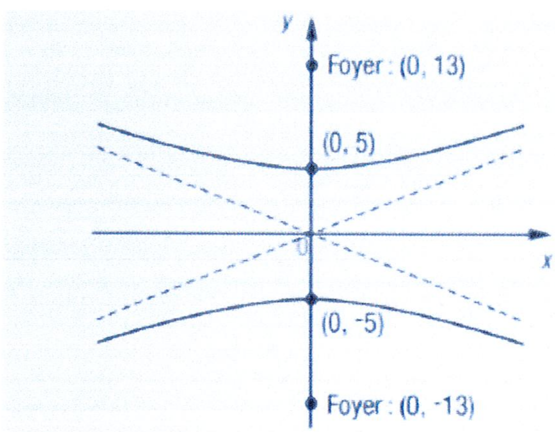
$$\frac{4}{3} = \frac{b}{6}$$

$$b = \frac{6 \cdot 4}{3}$$

$$b = 8$$

Rép :

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$$

2) 

1) Déduire la forme recherchée d'après l'orientation de la courbe :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

2) Trouver le paramètre a à l'aide de Pythagore

$c = 13 \qquad a = ?$

$b = 5$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$13^2 = a^2 + 5^2$$

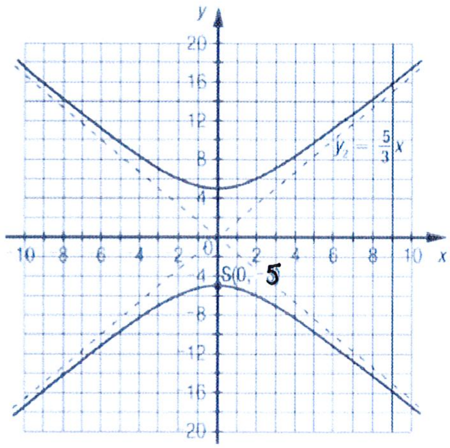
$$144 = a^2$$

Donc $$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = -1$$

Exercices

#1 : Établissez l'équation de chacune des coniques illustrées ci-dessous.

a)



1) Forme :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

2) $b = 5$

$$y = \frac{5}{3}x$$

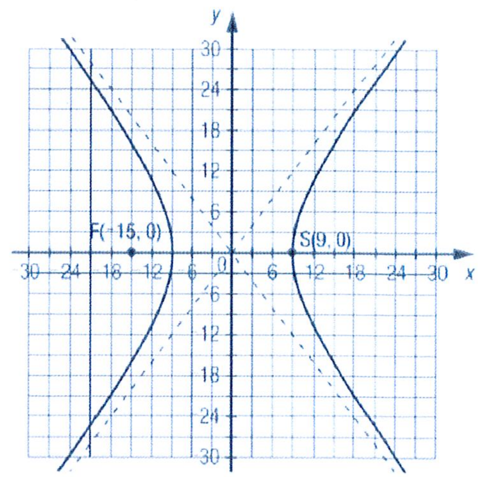
Donc $\frac{5}{3} = \frac{5}{a}$

$a = 3$

Rép :

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = -1$$

b)



1) Forme

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2) $a = 9$

$c = 15$

$b = ?$

$c^2 = a^2 + b^2$

$15^2 = 9^2 + b^2$

$144 = b^2$

Rép :

$$\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{144} = b^2$$

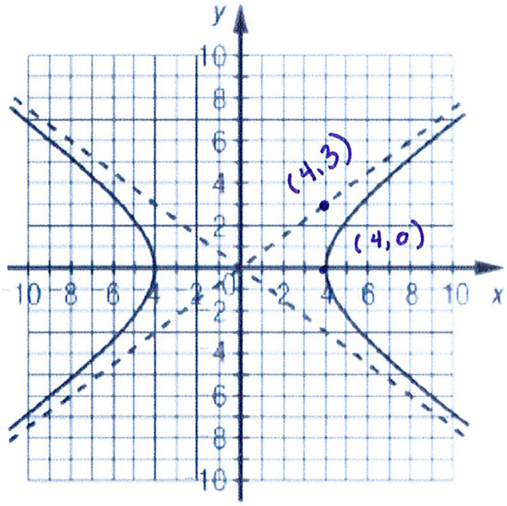
#2 Dans chaque cas, déterminez

1) les coordonnées des foyers de l'hyperbole

2) les équations des asymptotes

3) l'équation de l'hyperbole

a)



1) asymptotes :

$$y = \pm \frac{3}{4} x$$

2) $a = 4$

3) Trouve b :

$$\frac{3}{4} = \frac{b}{4} \qquad b = 3$$

4) Trouve c :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

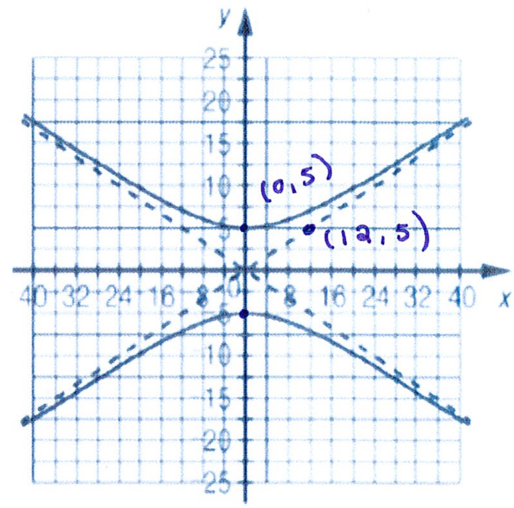
$$c^2 = 4^2 + 3^2$$

$$c = 5$$

Donc foyers : $(-5, 0)$ et $(5, 0)$

Équation : $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

b)



1) asymptotes :

$$y = \pm \frac{5}{12} x$$

2) $b = 5$

3) Trouve a :

$$\frac{5}{12} = \frac{5}{a} \qquad a = 12$$

4) Trouve c :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 12^2 + 5^2$$

$$c = 13$$

Donc foyers : $(0, -13)$ et $(0, 13)$

Équation : $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{25} = -1$