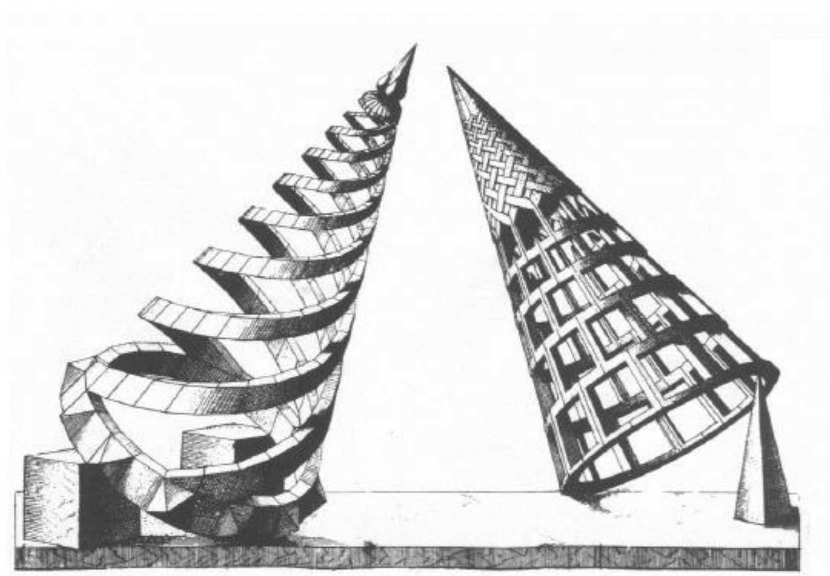
Les coniques



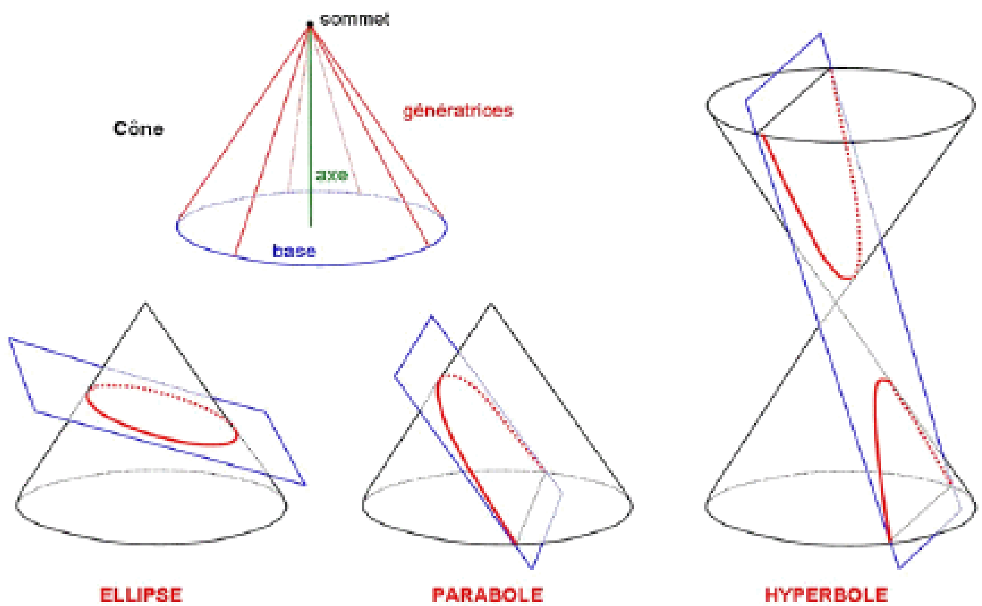
ATHÉMATIQUE SN5

Nom : ____________________ Groupe : _________

Les coniques

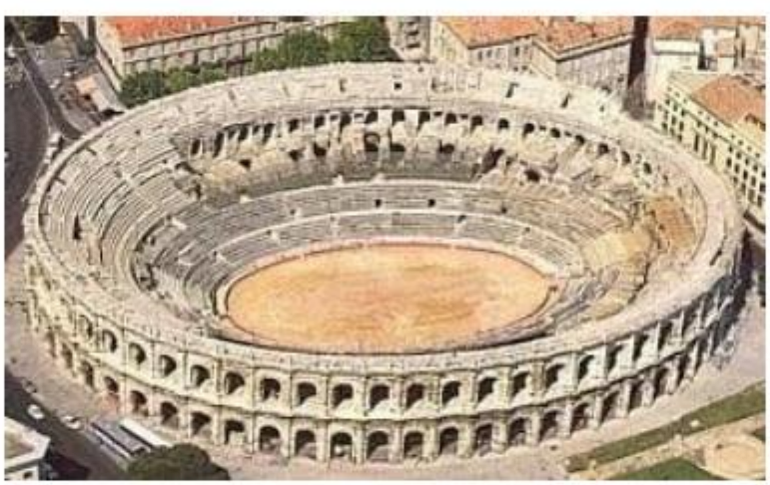
Une conique est une courbe définie par l'intersection d'un plan et d'une surface conique. **Un lieu géométrique** est un ensemble de points ayant une caractéristique _________________. Chaque conique est **un lieu géométrique.**

Les coniques ont été décrites et construites (par Apollonius (-262; -190) à partir d'un cône de révolution coupé par un plan :

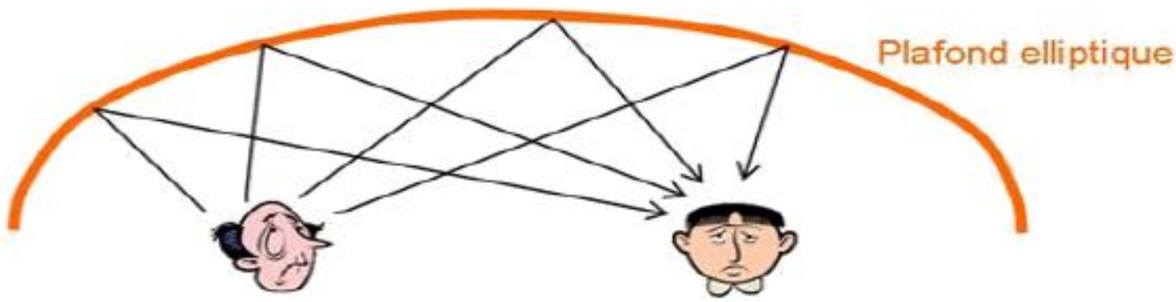


Si elles ont passionné les savants de l'Antiquité, c'est avant tout parce que les coniques sont très présentes dans l'environnement. Voici quelques exemples :

Les arènes de Nîmes dont la forme est une ellipse :

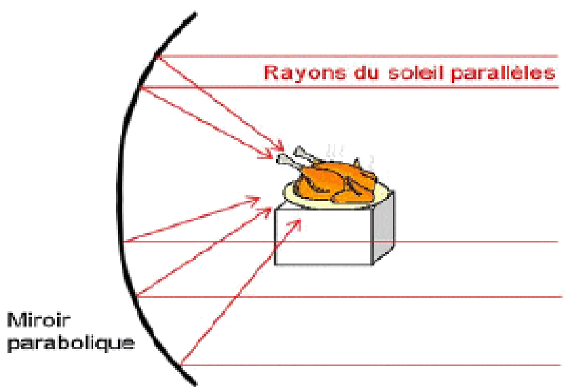


Le plafond elliptique de l'abbaye de la Chaise Dieu en Haute-Loire qui par une propriété géométrique de l'ellipse offrait la possibilité aux lépreux de venir se confesser.



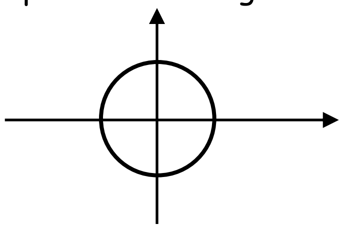
En se réfléchissant sur le plafond dont la forme est elliptique, les ondes sonores se propagent d'un foyer à l'autre.

Les paraboles connaissent une propriété analogue mise en application pour les fours solaires ou les radars. Les rayons du soleil, tous parallèles, se réfléchissent sur la parabole et convergent tous en un point, le foyer. L'énergie due au rayon du soleil se trouve concentrée et permet de chauffer.



Le cercle :

Le cercle est un lieu géométrique, car c'est une ligne courbe fermée dont tous les points sont à égale distance d'un même point appelé ______________.



Cette année, nous verrons uniquement le cercle centré à l'origine !

L'équation canonique du cercle centré à l'origine est :

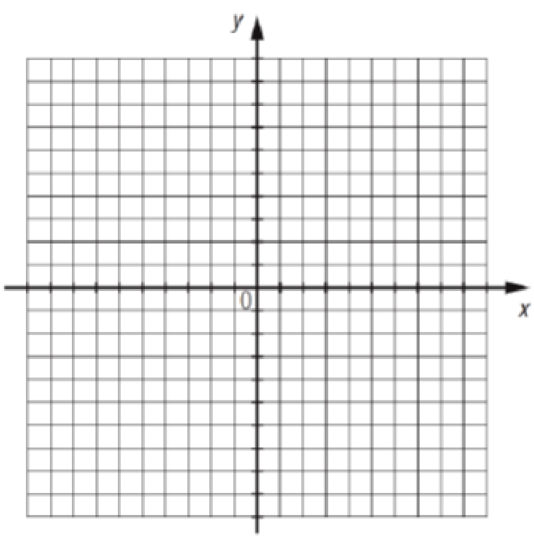
Démonstration :

Représentation graphique d'un cercle centré à l'origine

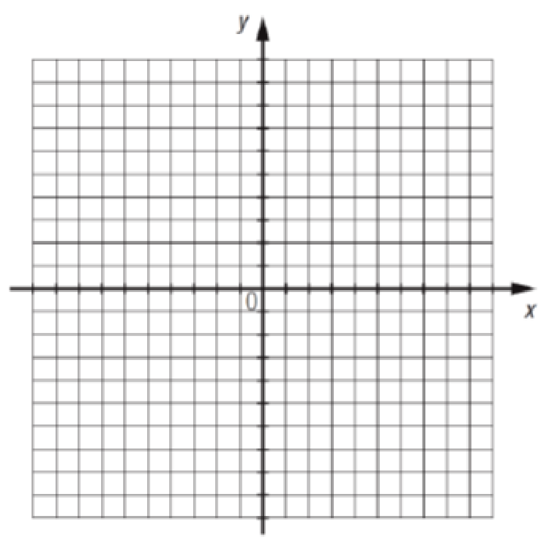
Il te suffit de connaître le rayon !

Représente graphiquement chacun des cercles suivants :

a) $x^2 + y^2 = 169$



b) $x^2 + y^2 = 20$



Recherche de l'équation du cercle centré à l'origine

Pour trouver l'équation du cercle centré à l'origine sous sa forme canonique, il suffit de :

- Substituer la mesure du _______________ dans cette forme
- Substituer les coordonnées _________________________________ pour trouver le rayon.

Exercices :

#1 Parmi les équations suivantes, lesquelles sont représentées dans le plan cartésien par un cercle? Si possible détermine le rayon du cercle.

a) $x^2 + y^2 = 25$

b) $2x^2 + y^2 = 4$

c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$

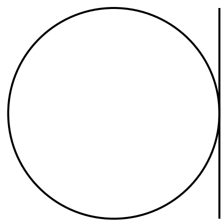
d) $y^2 = 20 - x^2$

e) $x^2 - y^2 = 16$

#2 Déterminez l'équation canonique du cercle centré à l'origine et dont le rayon mesure 4.

#3 Un cercle centré à l'origine passe par le point P(-5, 12). Quelle est son équation ?

#4 La droite d'équation $x - 4 = 0$ est tangente à un cercle centré à l'origine. Quelle est l'équation de ce cercle ?



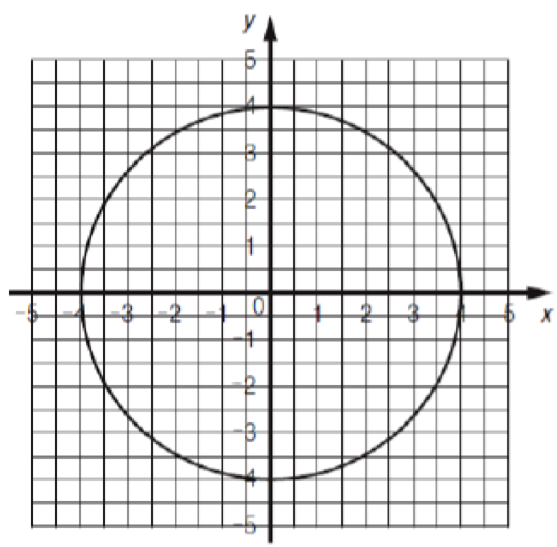
#5 Les coordonnées d'un point du cercle centré à l'origine sont (6, 3). Quelles sont les coordonnées des deux points du cercle dont l'abscisse est 4?

#6Le segment reliant les points A (5. –1) et B (-5, 1) est le diamètre d'un cercle centré à l'origine. Quelle est l'équation de ce cercle ?

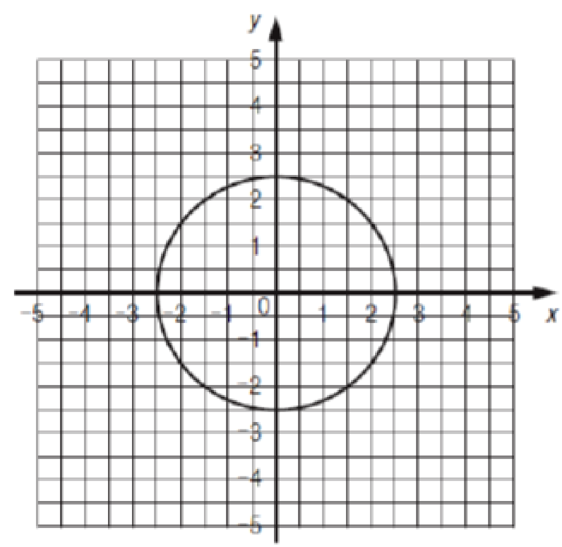
#7 Un menuisier doit construire un plafond dans un hangar en forme de demi-cylindre. La largeur totale du hangar est de 10 m. Quelle longueur doit-il donner aux pièces de bois qui soutiendront le plafond si celui-ci doit être à une hauteur de 3,5 mètres?

#8 Établissez l'équation de chacun des cercles suivants :

a)



b)



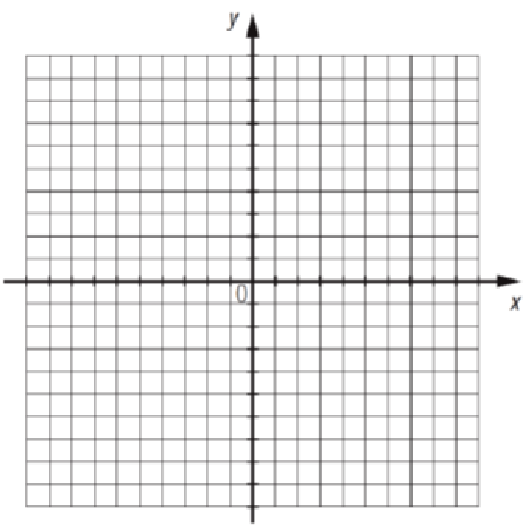
Régions associées au cercle

Voici les étapes pour représenter la région intérieure ou extérieure à un cercle :

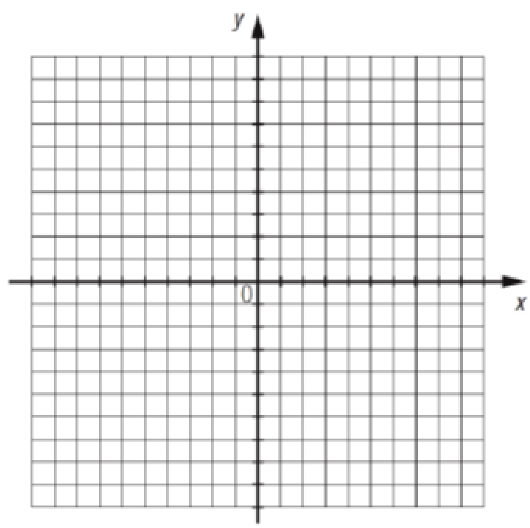
1. Transformer l'inéquation en équation sous la forme $x^2 + y^2 = r^2$
2. Tracer la courbe frontière :
   trait plein si ____________________
   trait pointillé si __________________
3. Hachurer : l'intérieure de la courbe si _______________
   l'extérieur de la courbe si _______________

Exercice : Représente graphiquement la région associée à chaque inéquation

a) $x^2 + y^2 < 16$

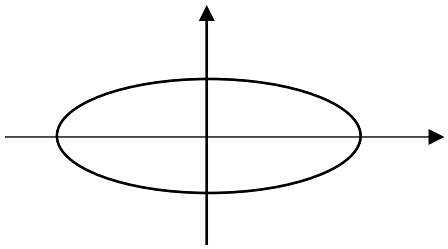


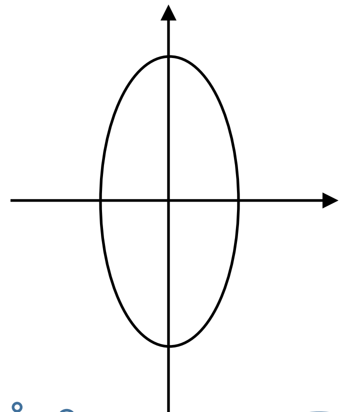
b) $x^2 + y^2 \geq 81$



L'ellipse

Une ellipse est un lieu géométrique décrit par l'ensemble des points dont la somme des distances à deux points fixes est _______________. Les deux points fixes sont les ______________.





Ellipse centré à l'origine seulement!

Dans la représentation graphique d'une ellipse dont l'équation s'écrit sous la forme

- Les coordonnées du centre sont __________
- La longueur de l'axe horizontal correspond à _______________
- La longueur de l'axe vertical correspond à _________________
- La distance entre les foyers correspond à _________________
- Les foyers sont toujours situés sur le plus grand des deux axes (aussi nommé axe ______________________)
- La relation entre la valeur du paramètre a, celle du paramètre b et celle du paramètre c est donnée par :

- Les coordonnées des sommets sont ____________________________

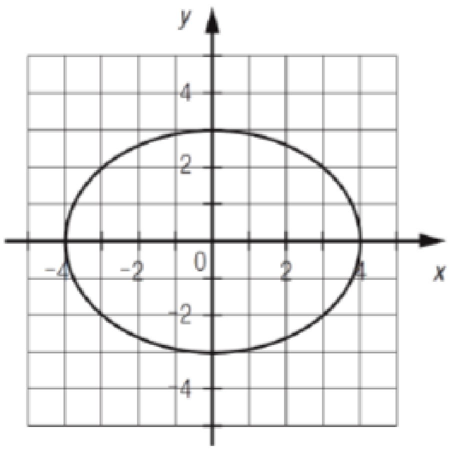
Exercices : #1 Dans chaque cas, déterminez :

1) La longueur du demi-axe horizontal (paramètre a)

2) La longueur du demi-axe vertical (paramètre b)

3) L'équation de l'ellipse sous la forme : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

a)

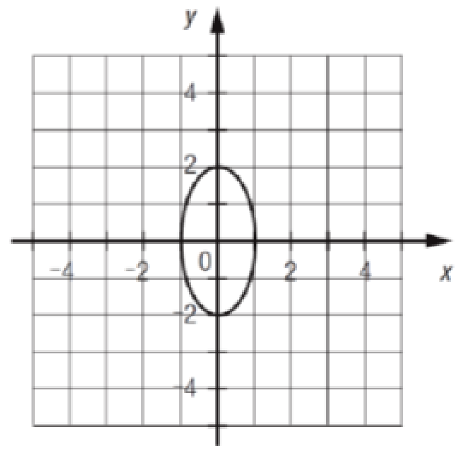


1) ____________________

2) ____________________

3) ____________________

b)

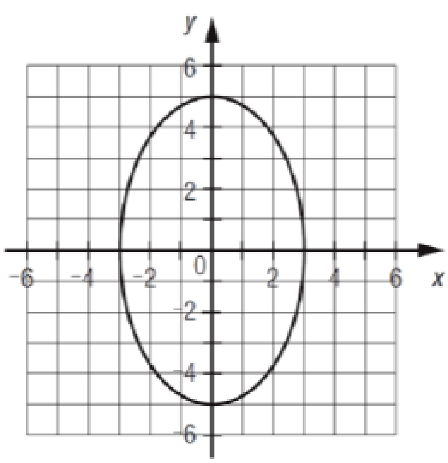


1) ____________________

2) ____________________

3) ____________________

c)

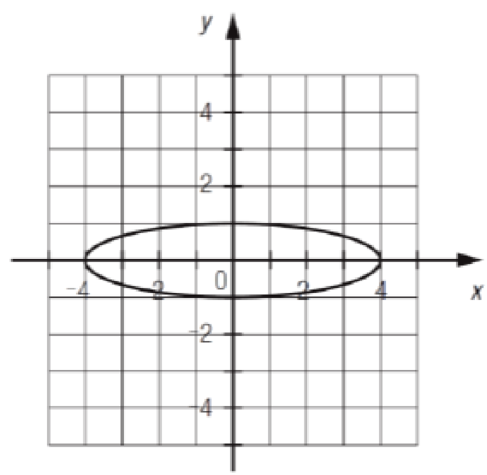


1) ____________________

2) ____________________

3) ____________________

d)



1) ____________________

2) ____________________

3) ____________________

#2 Dites si les équations suivantes représentent des ellipses :

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

b) $16x^2+25y^2=400$

c) $3x^2+3y^2=48$

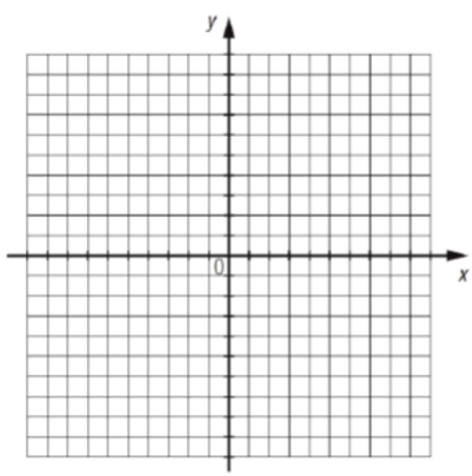
d)) $\frac{x^2}{9}+\frac{y}{25}=1$

Représentation graphique d'une ellipse centrée à l'origine

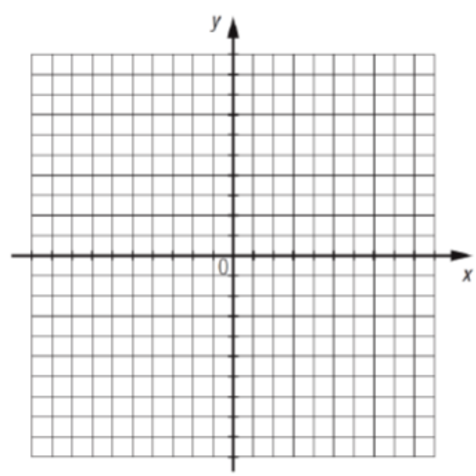
Il te suffit de connaître les sommets !

Exercices :#1 Représente graphiquement l'ellipse associée aux l'équations suivantes :

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{64}=1$



b) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$



#2 Dans chaque cas, déterminez les coordonnées des sommets et des foyers de l'ellipse.

a) $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{169} = 1$

b) $\frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{196} = 1$

#3 Dans chaque cas, déterminez les coordonnées des 4 sommets de l'ellipse :

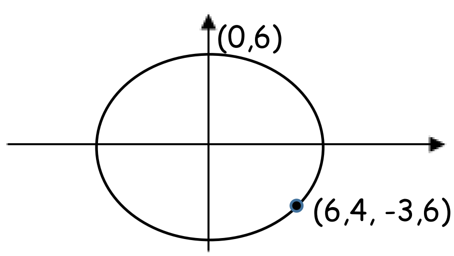
a) $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

b) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$

Recherche de l'équation de l'ellipse centrée à l'origine :

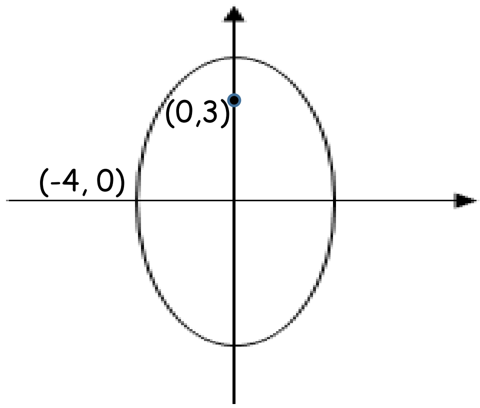
1-Connaissant un sommet et un point : Remplace le x et le y par les coordonnées du point et le paramètre connu afin de trouver l'autre paramètre.

Ex :



2-Connaissant le foyer et un paramètre : Utilise Pythagore pour trouver le paramètre manquant.

Ex :



Exercices

#1 Détermine l'équation d'une ellipse verticale centrée à l'origine ayant un grand axe de 22 unités et un sommet situé à (-5, 0).

#2 Détermine l'équation d'une ellipse centrée à l'origine qui passe par le point $(4, \frac{5}{3})$ et dont deux sommets sont situés à (0, -6) et (0, 6).

#3 Un menuisier fabrique une table de forme elliptique qui possède les caractéristiques suivantes :

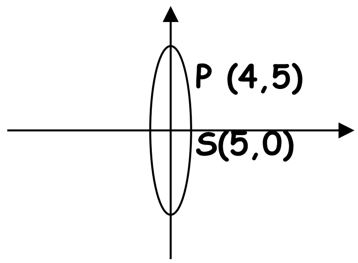
- La distance entre les deux foyers est de 2m.
- La longueur du petit axe est de 1,5 m.

a) Établissez l'équation de l'ellipse qui correspond au pourtour de la table.

b) Quelles sont les dimensions minimales d'une planche rectangulaire dans laquelle on peut y découper la table d'un seul morceau ?

#4 Le grand axe d'une ellipse centrée à l'origine mesure 12 unités et le petit axe mesure 4 unités. Détermine l'équation de l'ellipse et quelles sont les coordonnées des sommets et des foyers si l'axe transversal est l'axe des x.

#5 Trouve l'équation de l'ellipse



#6Trouve l'équation du lieu géométrique dont la somme des distances à deux points fixes dont les coordonnées sont (0,5) et (0,-5) est égale à 26.

#7 Une piste de course est de forme elliptique. La longueur du grand axe est de 80 cm et la distance focale est de 64 cm. Quelle est la longueur du petit axe?

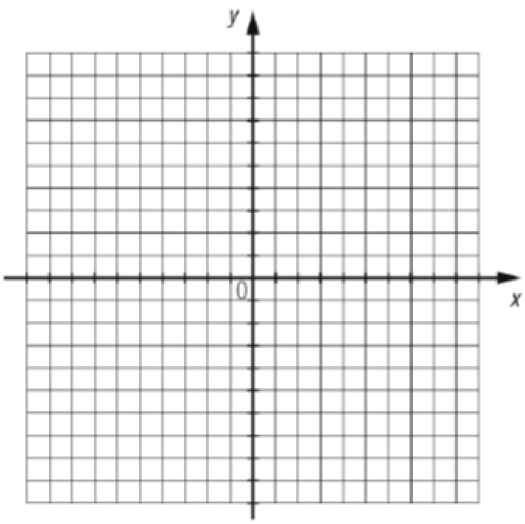
Régions associées à l'ellipse

Voici les étapes pour représenter la région intérieure ou extérieure à une ellipse :

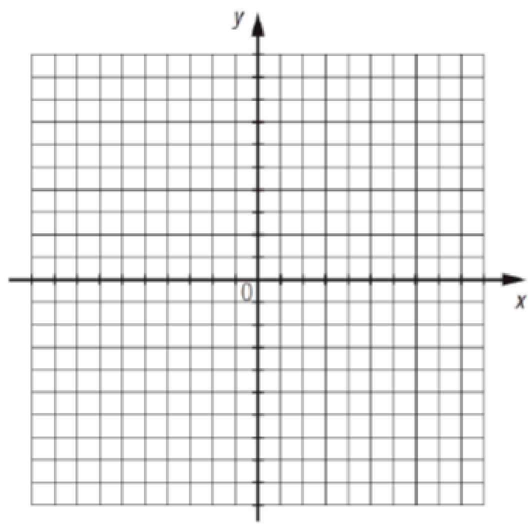
1. Transformer l'inéquation en équation sous la forme $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
2. Tracer la courbe frontière :
   trait plein si ____________________
   trait pointillé si __________________
3. Hachurer : l'intérieure de la courbe si ______________
   l'extérieur de la courbe si ______________

Exercice : Représente graphiquement la région associée à chaque inéquation

a) $20x^2+5y^2\geq 80$

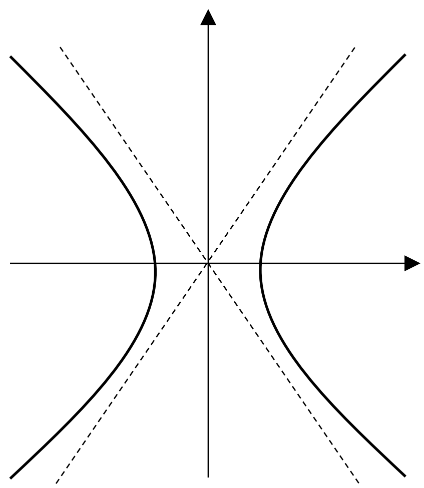
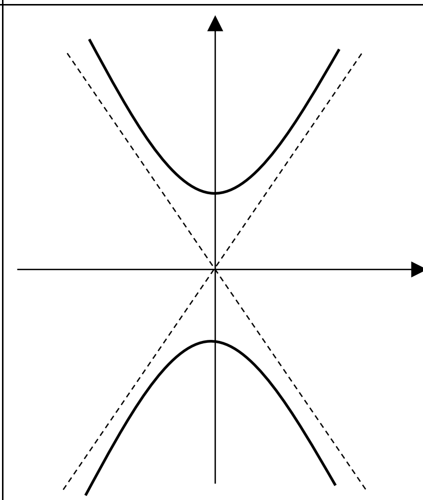


b) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}<1$



L'hyperbole (centrée à l'origine !!!)

Lieu géométrique décrit par l'ensembles des points dont la valeur absolue de la différence des distances à deux points fixe est ________________. Ces deux points fixes sont les foyers de l'hyperbole.

	Axe transverse horizontal	Axe transverse vertical
Graphique :		
Équation sous la forme canonique :		
Équations des asymptotes :		
Coordonnées des foyers :		
Coordonnées des sommets :		

Les paramètres a, b et c vérifient l'équation suivante :

Représentation graphique d'une hyperbole centrée à l'origine

Étapes :

1) Détermine l'ouverture de l'hyperbole
2) Détermine et trace les asymptotes
3) Détermine et place les sommets et les foyers

Exercices

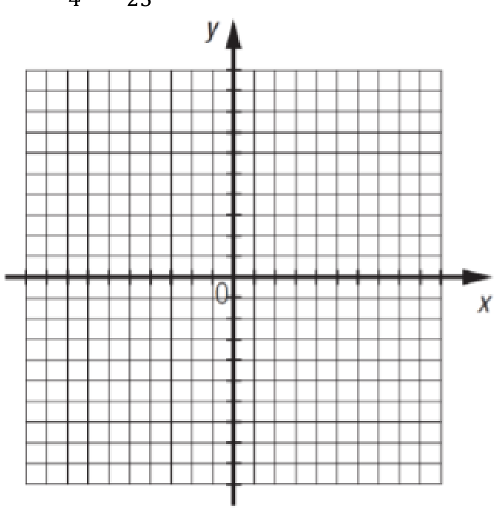
#1Dans chaque cas, détermine les coordonnées des sommets et des foyers de l'hyperbole.

a) $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{144} = -1$

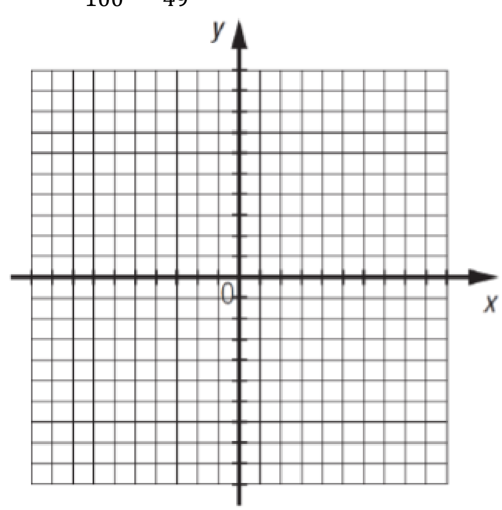
b) $\frac{x^2}{52} - \frac{y^2}{12} = 1$

#2 Représente graphiquement les hyperboles suivantes :

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$



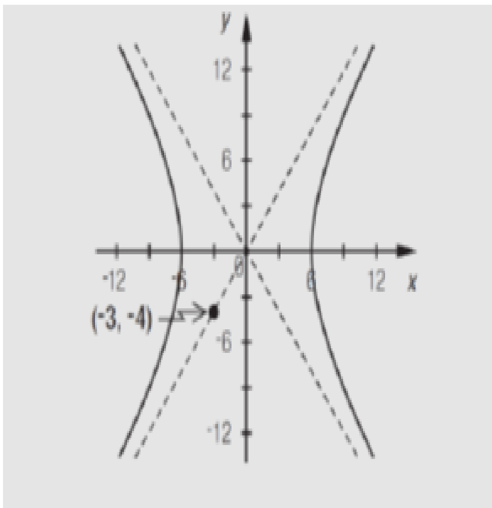
b) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{49} = -1$



Recherche de l'équation de l'hyperbole centrée à l'origine

Voyons comment trouver l'équation d'une hyperbole centrée à l'origine à l'aide des deux exemples suivants :

1)

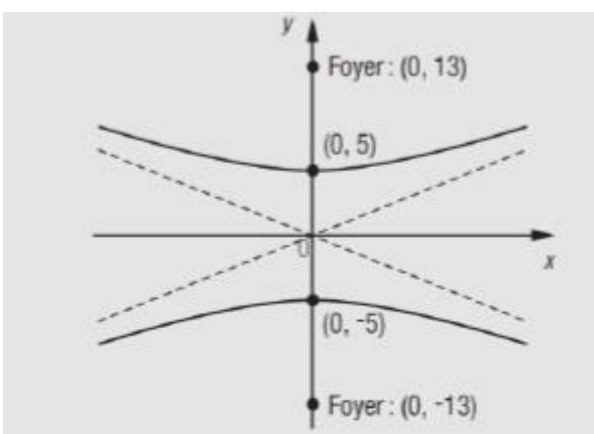


1) Déduire la forme recherchée d'après l'orientation de la courbe :

2) Trouver l'équation d'une asymptote :

3) À l'aide du sommet et de l'équation de l'asymptote déduire le paramètre *b* :

2)



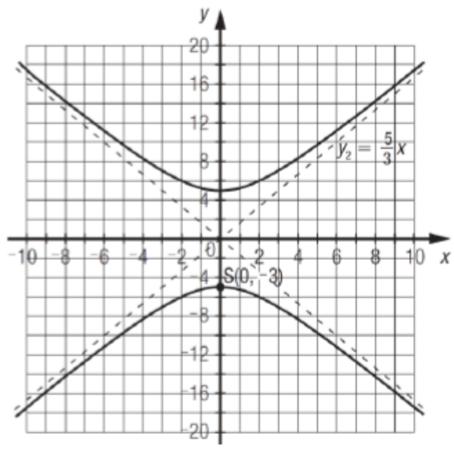
1) Déduire la forme recherchée d'après l'orientation de la courbe :

2) Trouver le paramètre *a* à l'aide de Pythagore :

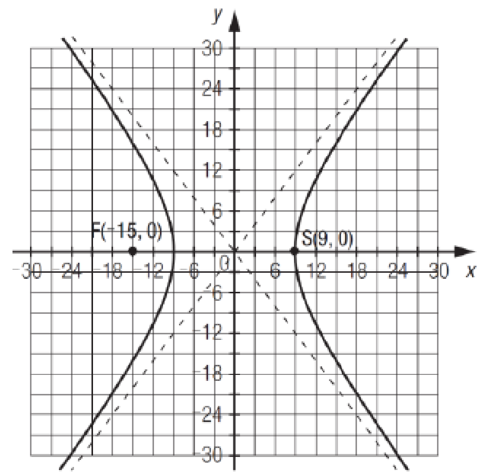
Exercices

#1 : Établissez l'équation de chacune des coniques illustrées ci-dessous.

a)



b)



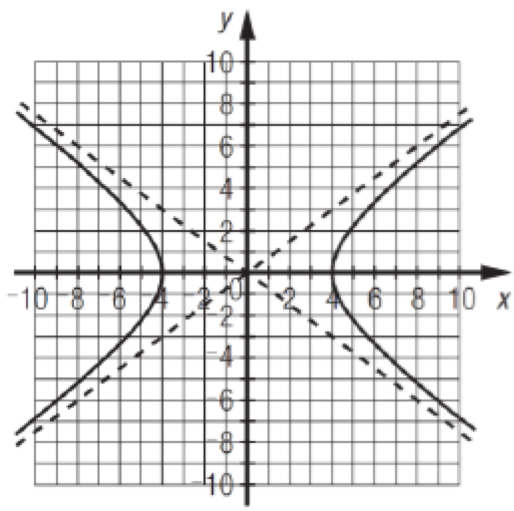
#2 Dans chaque cas, déterminez

1) les équations des asymptotes

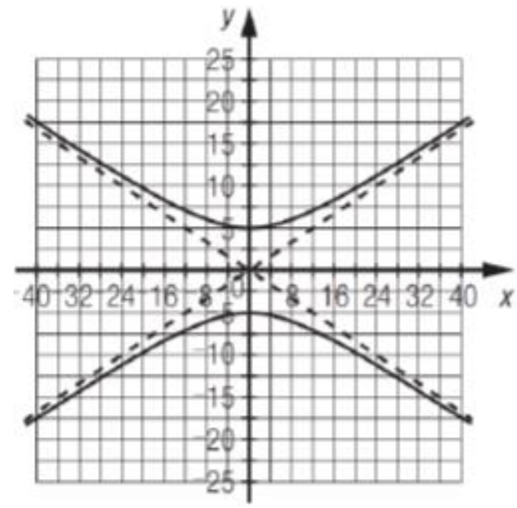
2) les coordonnées des foyers de l'hyperbole

3) l'équation de l'hyperbole

a)



b)



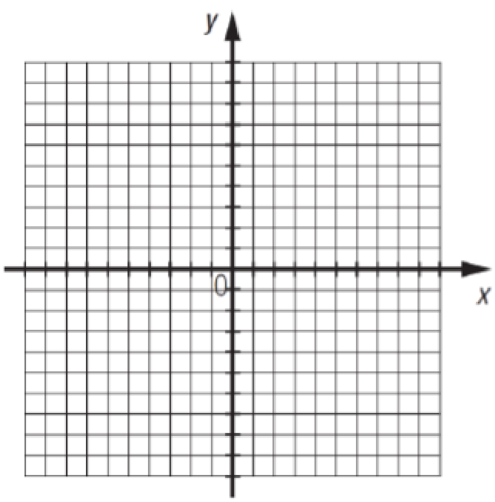
Régions associées à l'hyperbole

Voici les étapes pour représenter la région intérieure ou extérieure à l'hyperbole :

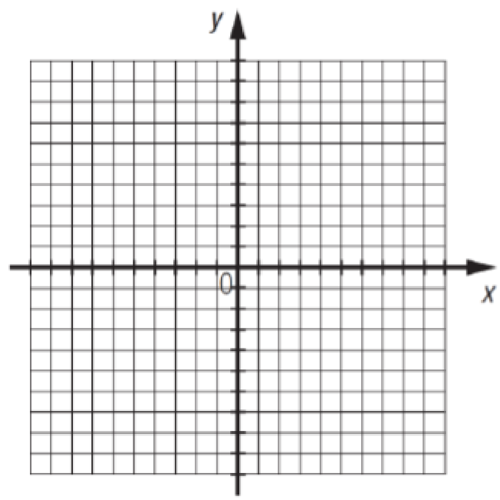
1. Transformer l'inéquation en équation sous la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$
2. Tracer la courbe frontière :
   trait plein si ____________________
   trait pointillé si __________________
3. Utiliser un point témoin pour trouver la région à hachurer.

Exercice : représentez graphiquement la région associée à chaque inéquation

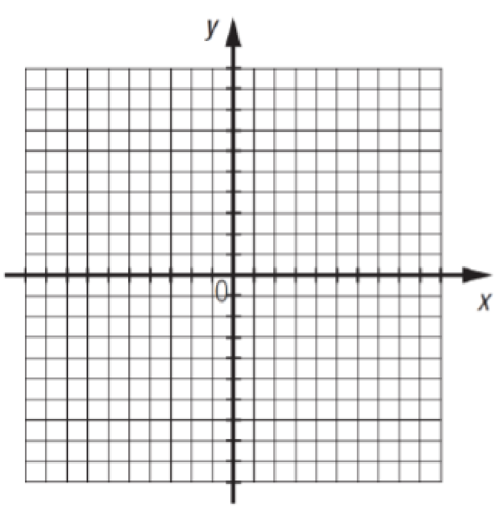
a) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{36} \leq 1$



b) $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{25} < -1$

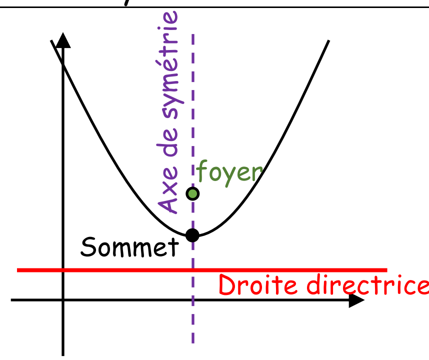
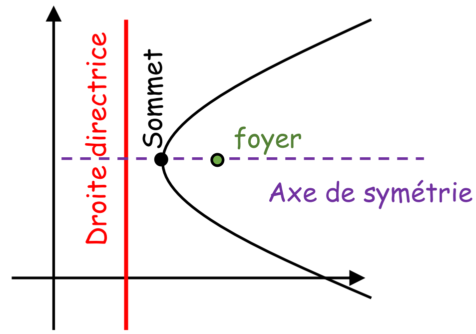


c) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} > -1$



La parabole (translatée cette fois ‼)

Lieu géométrique dont tous les points sont situés à égale distance d'une droite fixe, appelée ___________________ et d'un point fixe appelé foyer.

	Axe de symétrie verticale	Axe de symétrie horizontal
Graphique	 	
Équation sous la forme canonique :		
Coordonnées du sommet :		
Coordonnées du foyer :		
Équation de l'axe de symétrie :		
Équation de la directrice :		
Ouverture de la parabole si $c > 0$		
Ouverture de la parabole si $c < 0$		
Distance entre foyer et directrice		

Représentation graphique de la parabole translatée :

Étapes :

1. Détermine son ouverture : droite-gauche ou haut-bas ?
2. Détermine son sommet et son foyer
3. Trace également sa droite directrice

Exercices :

#1 Dans chaque cas, détermine les coordonnées de sommet et du foyer de la parabole :

a) $(x + 37)^2 = 124\,(y - 28)$

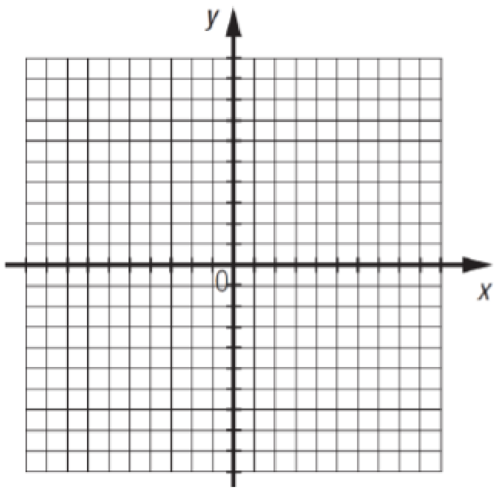
b) $(y - 37)^2 = -56\,(x + 19)$

c) $(x + 21)^2 = -4\,y$

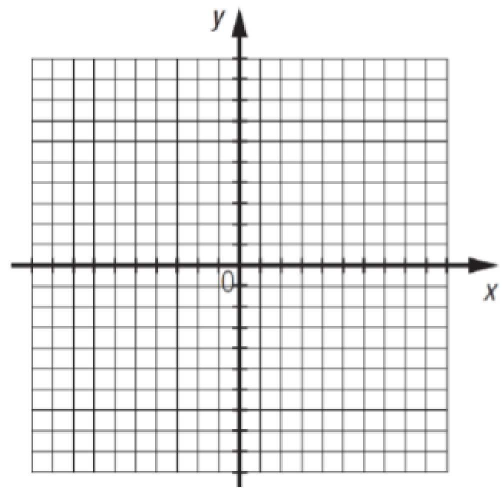
d) $(y - 7)^2 = 16\,(x - 6)$

#2 Représente graphiquement les paraboles suivantes :

a) $(x+2)^2 = 10\,(y+7)$



b) $(y+6)^2 = -8\,(x-15)$



Recherche de l'équation de la parabole

Étapes :

1) D'après l'orientation de la courbe déterminer la forme recherchée :

$$(x-h)^2 = 4c(y-k) \quad ou \quad (y-k)^2 = 4c(x-h)$$

2) Déduire certains renseignements concernant les paramètres c, h et k

Exercices

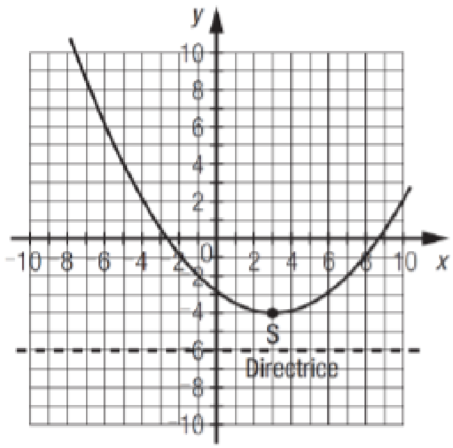
#1 Dans chaque cas, déterminez

1) l'équation de la directrice de la parabole

2) Les coordonnées du foyer de la parabole

3) L'équation de la parabole

a)

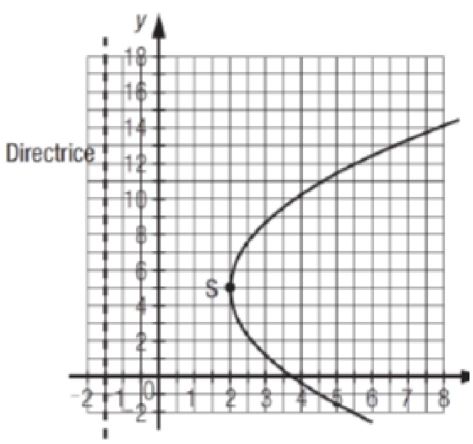


1) Directrice :________________

2) Foyer :______________

3) Équation :____________________________

b)

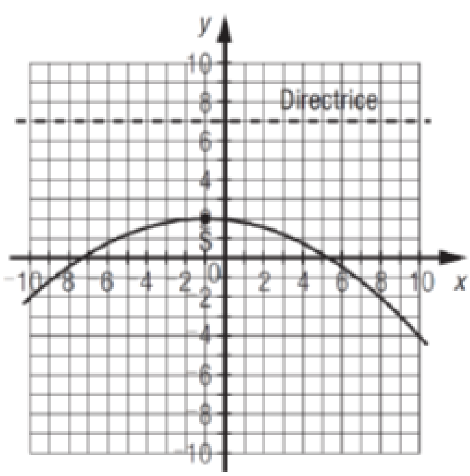


1) Directrice :________________

2) Foyer :______________

3) Équation :____________________________

c)



1) Directrice :________________

2) Foyer :______________

3) Équation :____________________________

#2 Trouver l'équation de la parabole dont les coordonnées du sommet sont (-2,3) et le celles du foyer sont (-5,3).

#3 Trouve l'équation de la parabole qui passe par le sommet (-4,6) et dont l'équation de la directrice est $y = -\frac{15}{2}$

#4 Trouver l'équation de la parabole qui passe par le sommet (-3,1) et par le point (-2,3).

#5 Le foyer d'une parabole se situe au point (-4,5) du plan cartésien et la directrice de cette parabole a comme équation $y - 3 = 0$. Trouve l'équation de la parabole.

#6 La droite d'équation $x = 4$ est la directrice de la parabole de sommet (6,4). Trouve l'équation de cette parabole.

#7 Voici l'équation d'une parabole : $(y+3)^2 = -9(x-4)$

Trouve :

1- les coordonnées du sommet

2-l'équation de l'axe de symétrie

3-les coordonnées du foyer

4-l'équation de la directrice

Régions associées à la parabole

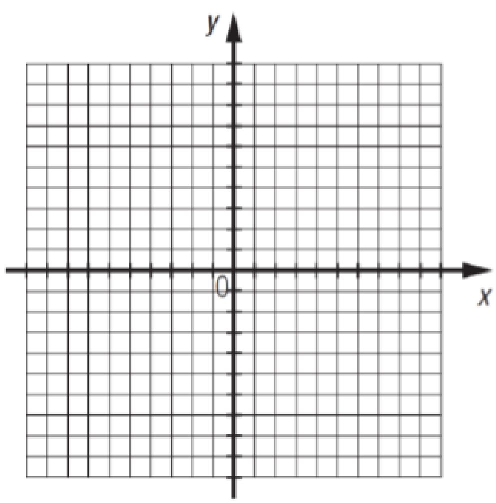
Voici les étapes pour représenter la région intérieure ou extérieure à la parabole :

1. Transformer l'inéquation en équation sous la forme
$$(x-h)^2 = 4c(y-k) \quad ou \quad (y-k)^2 = 4c(x-h)$$
2. Tracer la courbe frontière :
   trait plein si ____________________
   trait pointillé si __________________
3. Utiliser un point témoin pour trouver la région à hachurer.

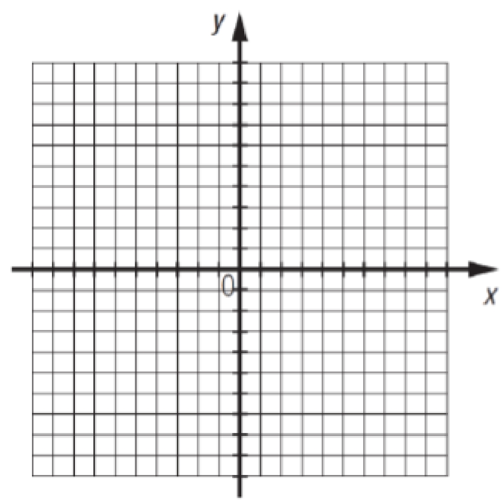
Exercice :

Représentez graphiquement la région associée à chaque inéquation :

a) $(x+3)^2 \geq -32(y-7)$



b) $(y-4)^2 > 24(x+8)$



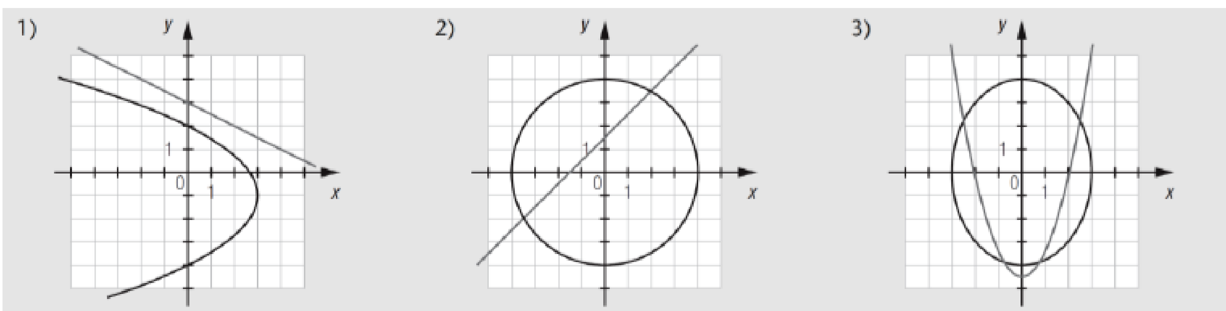
Points d'intersection entre une droite et une conique ou entre une parabole et une autre conique

Différentes stratégies permettent de déterminer les coordonnées du ou des points d'intersection entre une droite et une conique ou entre une parabole et une autre conique.

Représentation graphique

En représentant deux courbes dans un même plan cartésien, il est possible de déterminer ____________________ de points d'intersection entre ces courbes.

Voici différentes situations :



Aucun point d'intersection

Deux points d'intersection

Quatre points d'intersection

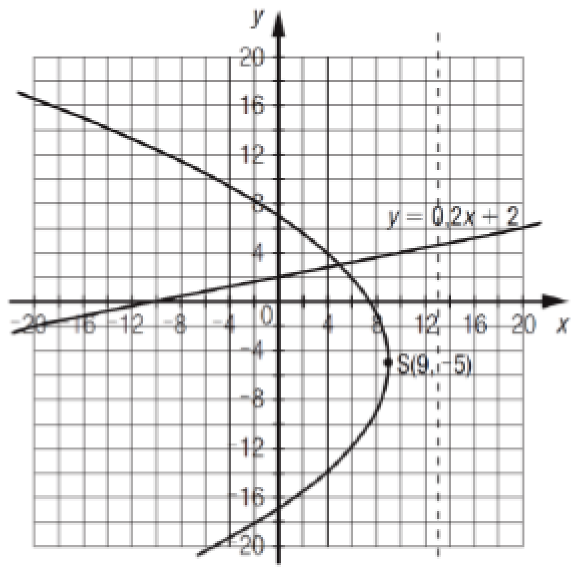
Méthodes algébriques

Les méthodes de comparaison, de substitution et de réduction permettent de déterminer les coordonnées du ou des points d'intersection, s'il ou ils existent, entre une droite et une conique ou entre une parabole et une autre conique.

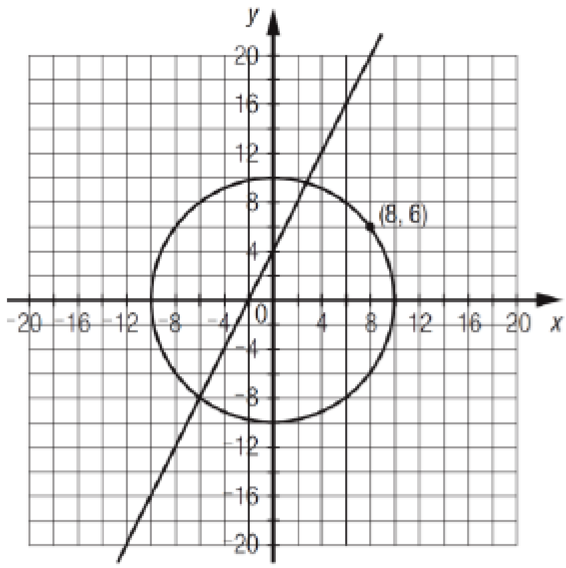
Exercices

#1 Dans chaque cas, déterminez les coordonnées du ou des points d'intersection entre la droite et la conique.

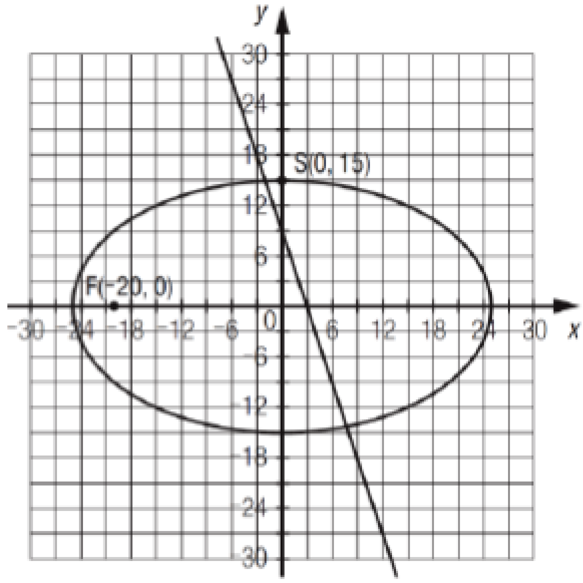
a)



b)



c)



#2 Résous les systèmes d'équations suivants

a) $y_1 = 5x - 2$

$y_2 = 5x^2 - 2x - 8$

b) $y^2 = 4{,}5x - 9$

$y^2 = 25 - x^2$

c) $y_1 = -0{,}5x^2 + 3x - 5{,}5$

$y_2 = 2x - 7$

d) $x^2 = 9y - 3$

$x^2 + y^2 = 225$

e) $-2{,}25x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

$y^2 = -20x$

f) $x^2 + y^2 = 16$

$x^2 = 3(y - 4)$

g) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$

$y^2 = 8(x + 7)$

h) $x^2 + y^2 = 34$

$x^2 = 9(y + 6)$

i) $\frac{x^2}{28} - \frac{y^2}{28} = -1$

$y^2 = -2(x-1)$

j) $(x-8)^2 = 6(y-2{,}5)$

$(x-8)^2 = 3(y+11)$

k) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{64} = 1$

$y = 4x - 1$

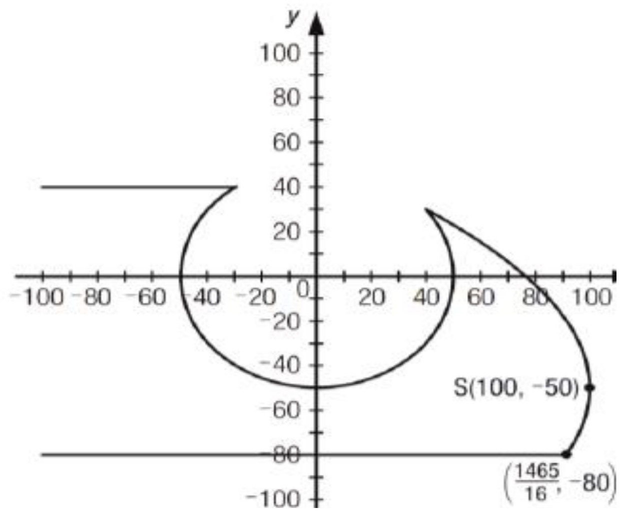
l) $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$

$x^2 = 8(y - 3)$

Problèmes écrits :

#1 Deux pylônes de 50 m de hauteur et distants de 1 km supportent un câble à haute tension. Dans sa partie la plus basse, le câble est à une hauteur de 48 m. La forme du câble est parabolique. Quelle est la hauteur du câble à 100 m à droite du pylône.

#2 Dans le cadre d'un défi scientifique, des élèves doivent réaliser le plan d'une boîte à savon à l'aide de portions de coniques. Le modèle d'un groupe d'étudiants représenté dans le graphique ci-contre, où les graduations sont en mètres, correspond à une première ébauche du prototype.



a) Quelle est l'équation de la parabole utilisée pour faire l'avant du prototype?

b) Sachant que l'abscisse du point d'intersection de la parabole et du cercle est 40, détermine l'équation du cercle.

c) Quelle est la hauteur du prototype si l'arrière du bolide rejoint le cercle à un point dont l'abscisse est -30 ?

#3 La trajectoire d'un boulet est définie par l'équation

$(x - 302)^2 = -600(y - 150)$. Ce boulet frappe le mur d'une forteresse qui correspond à la droite d'équation $x = 605$.

a) Si l'axe des x correspond au niveau du sol, est-ce que ce boulet atteindra le mur ?

b) Si la bouche du canon est située à 2 m du sol, à quelle distance du mur le canon se trouve-t-il lorsque ce boulet est lancé ?

#4 Deux haut-parleurs en forme de trompette émettent des ondes sonores dans les deux sens à partir du toit d'une voiture. Ces haut-parleurs ont été dessinés dans un plan cartésien suivant une hyperbole dont les sommets sont en (-8, 0) et (8, 0) et dont les foyers sont en (-10, 0) et (10, 0). La longueur totale des haut-parleurs est des 100 cm. Quel est le diamètre des trompettes ?

#5 Un logo représenté ci-contre dans le plan cartésien, est constitué d'un cercle et de deux ellipses. Les deux ellipses se touchent à leurs sommets A et C. Le cercle et la petite ellipse se touchent aux points B et D. Les foyers des deux ellipses se trouvent sur le cercle. L'équation du cercle est $x^2 + y^2 = 4$. Quelle est l'équation de chaque ellipse ?