Exercices préparatoires

Étape 2 (Fcts réelles et vecteurs)

CD-1 *(Résoudre des situations problèmes)*

« 2019-20»

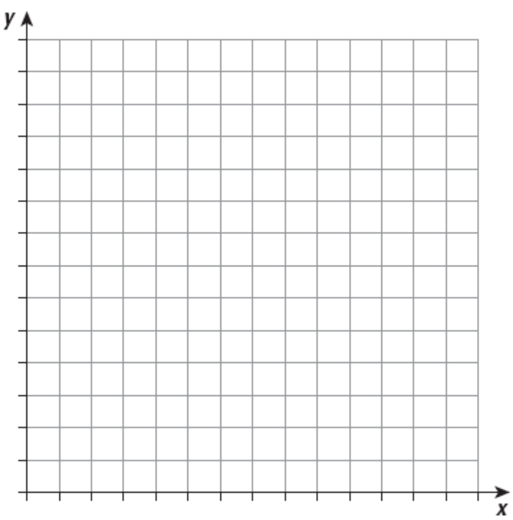
Sciences naturelles 5

Nom :____

Groupe : __________

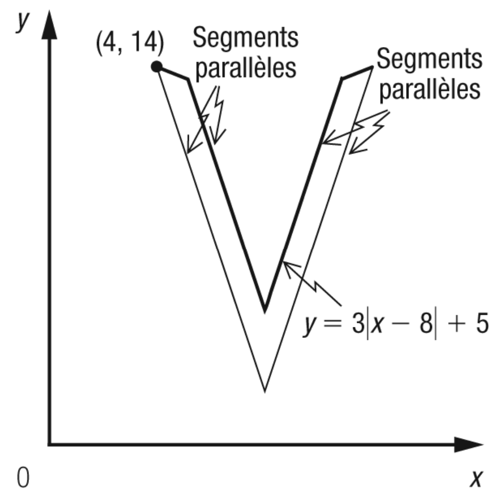
1 Des chercheurs étudient la migration de deux groupes d'oiseaux à l'aide de balises radio qu'ils installent sur quelques spécimens. La distance D (en km) parcourue par les oiseaux du groupe A est donnée par la règle $D = 90\sqrt{2t}$, tandis que celle parcourue par les oiseaux du groupe B est donnée par la règle $D = \frac{9000t}{9t+50}$, où t représente le nombre de jours écoulés depuis l'installation des balises.

Donnez l'intervalle du nombre de jours durant laquelle les oiseaux du groupe A ont parcouru une distance inférieure à celle du groupe B.



2 Le logo de l'entreprise Vélo de la Vieille-Ville est représenté dans le plan cartésien ci-dessous, gradué en centimètres. En plus des renseignements donnés dans le graphique, il est établi que :

- Le logo est symétrique ;
- Les extrémités supérieures du logo sont des segments dont les pentes sont de ⁻0,5 et de 0,5 ;



Calculez :

a) le périmètre de ce logo ;

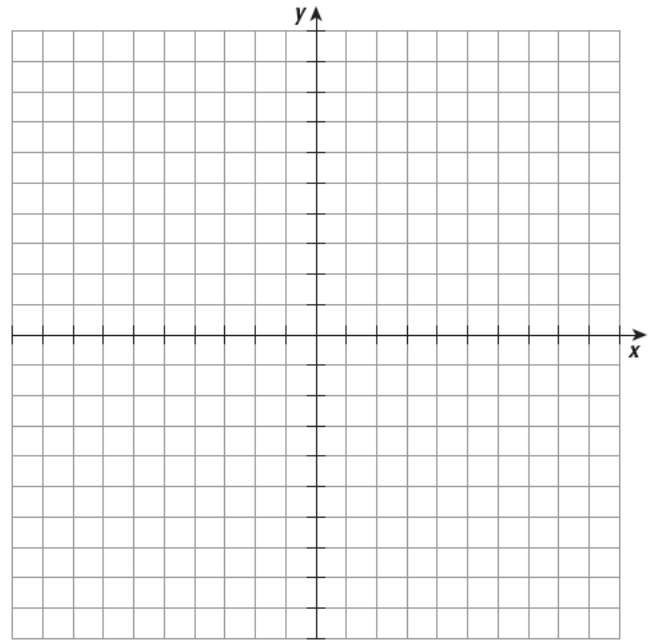
b) l’aire de ce logo ;

3 Déterminez le périmètre du quadrilatère ABCD, sachant qu'il est formé par l'intersection des fonctions :

$$f_1(x) = \frac{3}{2}|x-2|-2$$

et

$$f_2(x) = -2|x|+4.$$



4 Des climatologues effectuent des relevés de températures sur une période de 15 jours. Le tableau ci-dessous montre les résultats de ces relevés.

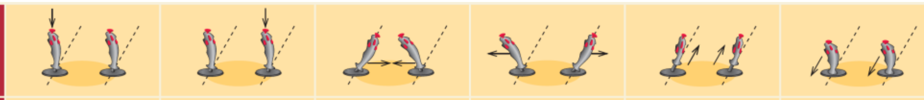
La règle $C = \frac{5(f-32)}{9}$ permet de calculer la température C en degrés Celsius selon la température en degrés Fahrenheit.

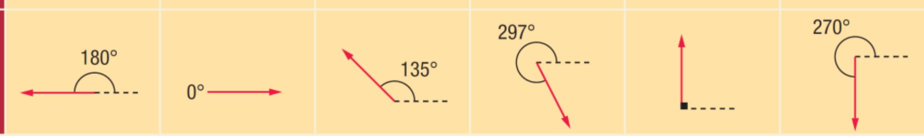
Déterminez la règle qui permet de calculer la température (en degrés Celsius) selon le temps en jours.

Jour	Température (°F)
1	-4
2	-5,8
3	-6,55
4	-7,12
5	-7,6
6	-8,02
7	-8,41
8	-8,76
9	-9,09
10	-9,40
11	-9,69
12	-9,97
13	,-10,24
14	-10,49
15	-10,73

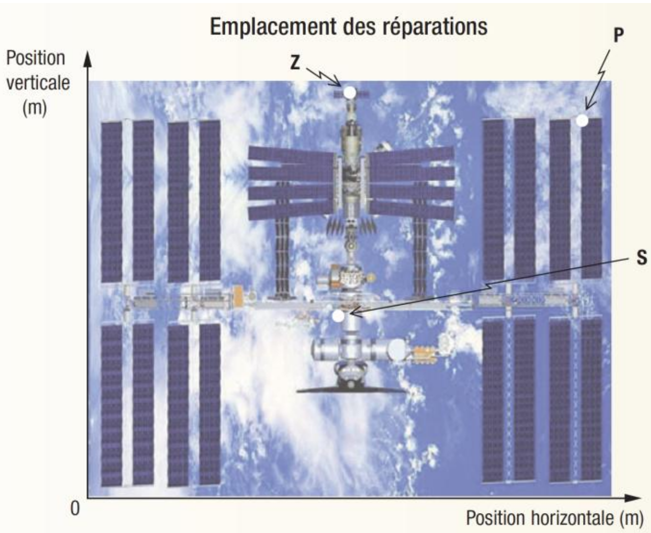
1. Sortie dans l'espace

Des réacteurs placés au dos de la combinaison d'une astronaute et contrôlés à partir de deux manettes lui permettent de se déplacer dans l'espace pour effectuer des réparations à la Station spatiale internationale. À la suite d'un bris d'équipement, les déplacements possibles sont limités à certaines orientations. L'astronaute pense pouvoir effectuer les réparations malgré tout. Pour y parvenir, elle doit programmer la longueur (en m) du déplacement engendré par chaque manipulation de base des manettes d'après les renseignements suivants.





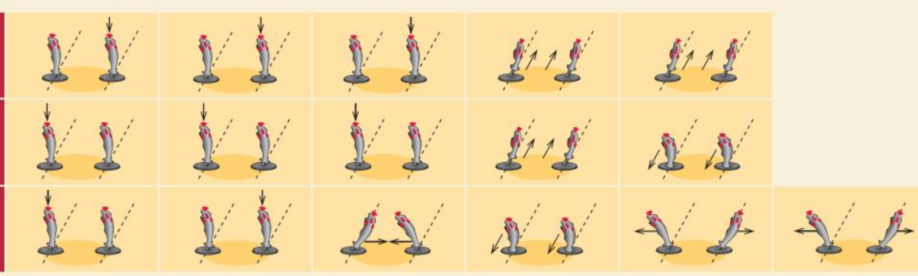
Manipulation de base des manettes						
Orientation du déplacement engendré	180°	0°	135°	297°		270°



Point	Description
S(50, 32)	Sas de sortie
P(92, 68)	Panneau solaire
Z(55, 74)	Module Zvezda

Distance maximale permise entre la position finale de l'astronaute et le sas de sortie : 25 cm

Série de manipulations qui permet de se rendre :



du sas de sortie au panneau solaire	
du panneau solaire au module Zvezda	
du module Zvezda au sas de sortie	

Déterminez la longueur du déplacement que l'astronaute doit programmer pour chaque manipulation de base des manettes.

1 Résumez dans vos mots ce que vous comprenez de la tâche demandée.

2 Quelles sont les données importantes connues ?

3 Quelles sont les notions mathématiques nécessaires à la réalisation de cette SAÉ ?

4 Effectuer les calculs en lien avec les trois séries de manipulations.

Du sas de sortie au panneau solaire :

Du panneau solaire au module Zvezda :

Du module Zvezda au sas de sortie :

5 Formulez votre solution.

7 Des chercheurs étudient la migration de deux groupes d'oiseaux à l'aide de balises radio qu'ils installent sur quelques spécimens. La distance D (en km) parcourue par les oiseaux du groupe A est donnée par la règle $D = 90\sqrt{2t}$, tandis que celle parcourue par les oiseaux du groupe B est donnée par la règle $D = \frac{9000t}{9t+50}$, où t représente le nombre de jours écoulés depuis l'installation des balises.

Donnez l'intervalle du nombre de jours durant laquelle les oiseaux du groupe A ont parcouru une distance inférieure à celle du groupe B.

$9000t \,\lfloor\, 9t+50$

$9000t + 5000/1000$

-5000

$y = \frac{-5000}{9t+50} + 1000$

$y = \frac{-50000}{9(t+50/9)} + 1000$

$\frac{90\sqrt{2t}}{90} = \frac{9000t}{9t+50} \cdot \frac{1}{90}$

$(\sqrt{2t})^2 = \frac{(100t)^2}{(9t+50)^2}$

$2t = \frac{10000t^2}{81t^2+900t+2500}$

$81t^2+900t+2500 = \frac{10000t^2}{2t}$

$81t^2+900t+2500 = 5000t$

$81t^2-4100t+2500 = 0$

$s: -50 + -4050 = -4100$

$p: -50 \times -4050 = 202500$

ou $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$81t^2 - 50t - 4050t + 2500 = 0$

$t(81t-50) - 50(81t-50) = 0$

$(81t-50)(t-50) = 0$

$t-50 = 0$ $\quad$ $81t-50=0$

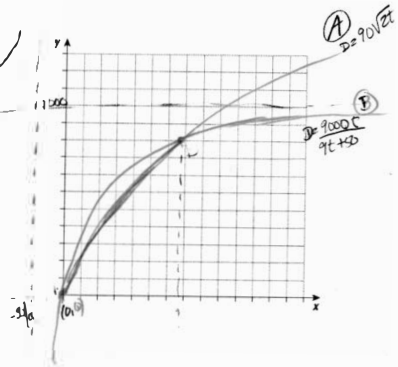
$t = 50$ $\quad$ $t = 50/81 = 0{,}617$

Au début : (0,0) les 2 groupes sont identiques

Autre point de rencontre après 50 jours (900km)

L'intervalle du nombre de jours durant laquelle A était inférieure à B

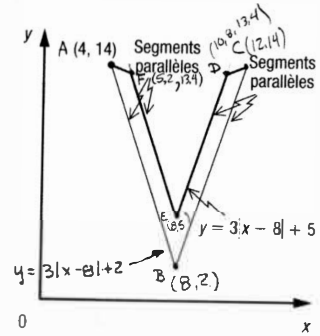
$t \in \,]0{,}617, 50[$



12

1 Le logo de l'entreprise Vélo de la Vieille-Ville est représenté dans le plan cartésien ci-dessous, gradué en centimètres. En plus des renseignements donnés dans le graphique, il est établi que :

- Le logo est symétrique ;
- Les extrémités supérieures du logo sont des segments dont les pentes sont de ⁻0,5 et de 0,5 ;



Calculez :

a) le périmètre de ce logo ;

1° Équation de la 2e valeur absolue

$y = 3|x-8|+k$

pt (4,14)

$14 = 3|4-8|+k$

$14 = 12+k$

$k = 2$

$y = 3|x-8|+2$

2° Coordonnées du pt F :

Équation droite $\overline{AF}$:

$y = -0{,}5x+b$

pt (4,14)

$14 = -0{,}5(4)+b$

$14 = -2+b$

$b = 16$ $\quad$ $y = -0{,}5x+16$

Équation droite $\overline{EF}$:

$y = -3x+b$

pt (8,5) $\quad 5 = -3(8)+b$

$5 = -24+b$

$b = 29$ $\quad y = -3x+29$

$-0{,}5x+16 = -3x+29$

$2{,}5x = 13$

$x = 5{,}2$

$y = 13{,}4$

3° Longueur des segments :

$d(AB) = \sqrt{(4-8)^2+(14-2)^2} = 12{,}65$

$d(AF) = \sqrt{(4-5{,}2)^2+(14-13{,}4)^2} = 1{,}34$

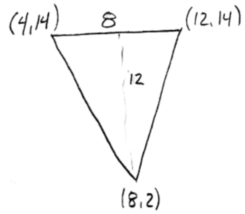
$d(EF) = \sqrt{(5{,}2-8)^2+(13{,}4-5)^2} = 8{,}85$

4° Périmètre :

$2 \cdot (12{,}65+1{,}34+8{,}85) = \boxed{45{,}68\text{ cm}}$

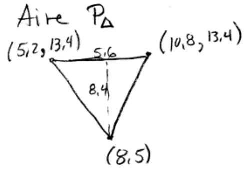
2

1) Aire G∆ b) l'aire de ce logo ;



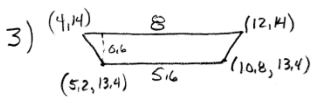
$A_{G\Delta} = \frac{8 \times 12}{2} = 48\ cm^2$

2) Aire P∆



$A_{P\Delta} = \frac{5,6 \times 8,4}{2} = 23,52\ cm^2$

3)



$A_{trapèze} = \frac{(8+5,6)\cdot 0,6}{2} = 4,08\ cm^2$

$A_{TOT} = 48 - 23,52 - 4,08$

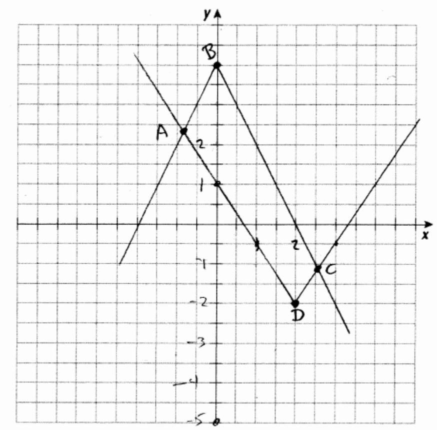
$\boxed{A_{TOT} = 20,4\ cm^2}$

3 Déterminez le périmètre du quadrilatère ABCD, sachant qu'il est formé par l'intersection des fonctions :

$$f_1(x) = \frac{3}{2}|x-2| - 2$$

et

$$f_2(x) = -2|x| + 4.$$



1) Sommets : B(0,4) et D(2,-2)

2) Sommet A : $(-6/7, 16/7)$

Intersection entre branche $\overline{AB}$ et $\overline{AD}$

$\overline{AB}$: $y = 2x+4$

$\overline{AD}$: $y = -\frac{3}{2}x + 1$

Comparaison :

$2x+4 = -\frac{3}{2}x+1$

$\frac{7}{2}x = -3$

$x = \frac{-6}{7}$

$y = 16/7$

3) Sommet C : $(18/7, -8/7)$

Intersection entre $\overline{BC}$ et $\overline{CD}$

$\overline{BC}$: $y = -2x+4$

$\overline{CD}$: $y = 3/2x - 5$

$-2x+4 = \frac{3}{2}x - 5$

$9 = \frac{7}{2}x$

$x = 18/7 \quad y = -8/7$

4) Longueur (distance)

$d(A,B) = \sqrt{(-6/7-0)^2 + (16/7-4)^2} = 1,92$

$d(B,C) = \sqrt{(18/7-0)^2 + (-8/7-4)^2} = 5,75$

$d(C,D) = \sqrt{(18/7-2)^2 + (-8/7+2)^2} = 1,03$

$d(A,D) = \sqrt{(-6/7-2)^2 + (16/7+2)^2} = 5,15$

5) Périmètre = 13,85 unités

6 Des climatologues effectuent des relevés de températures sur une période de 15 jours. Le tableau ci-dessous montre les résultats de ces relevés.

La règle $C = \frac{5(f-32)}{9}$ permet de calculer la température C en degrés Celsius selon la température en degrés Fahrenheit.

Déterminez la règle qui permet de calculer la température (en degrés Celsius) selon le temps en jours.

Jour	Température (°F)
1	-4
2	-5,8
3	-6,55
4	-7,12
5	-7,6
6	-8,02
7	-8,41
8	-8,76
9	-9,09
10	-9,40
11	-9,69
12	-9,97
13	,-10,24
14	-10,49
15	-10,73

• Déterminer la règle de la table de valeurs (racine carrée)

$y = a\sqrt{b(x-h)} + k$

$b = 1$ car vers la droite

$y = a\sqrt{1(x-1)} - 4$

Pt (2, -5,8)

$-5{,}8 = a\sqrt{(2-1)} - 4$

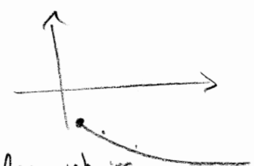
$-5{,}8 = a - 4$

$a = -1{,}8$

$y = -1{,}8\sqrt{x-1} - 4$

↳ nb. jours

Temp °F



• Déterminer la règle qui calcule la T °C selon nb jrs.

$C(F(x)) = ?$

$C = \frac{5(f-32)}{9}$

$C(x) = \frac{5((-1{,}8\sqrt{x-1} - 4) - 32)}{9}$

$C(x) = \frac{5(-1{,}8\sqrt{x-1} - 36)}{9}$

$C(x) = \frac{-9\sqrt{x-1} - 180}{9}$

$\boxed{C(x) = -\sqrt{x-1} - 20}$

Voici un exemple de démarche qui permet d'effectuer la tâche :

Voici les vecteurs qui entrent en jeu dans cette situation.

Orientation du déplacement engendré			135°	297°		270°
Vecteur associé à ce déplacement	$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\vec{w}$	$\vec{r}$	$\vec{s}$	$\vec{t}$

- **Du sas de sortie au panneau solaire.**

  Le déplacement de l'astronaute lors de cette étape correspond au vecteur SP.

  De plus, la série de manipulations associée à cette étape correspond à la combinaison linéaire $3\vec{v} + 2\vec{s}$, où $\vec{v} = (a, 0)$ et $\vec{s} = (0, b)$. On a donc :

  $3\vec{v} + 2\vec{s} = \overrightarrow{SP}$

  $3(a, 0) + 2(0, b) = (92 - 50, 68 - 32)$

  $a = 14$, $b = 18$, $\vec{v} = (14, 0)$ et $\vec{s} = (0, 18)$.

  On en déduit que chaque déplacement :

  – vers la droite doit avoir une longueur de 14 m ;
  – vers l'avant doit avoir une longueur 18 m.

- **Du panneau solaire au module Zvezda.**

  Le déplacement de l'astronaute lors de cette étape correspond au vecteur PZ.

  De plus, la série de manipulations associée à cette étape correspond à la combinaison linéaire $\vec{s} + 3\vec{u} + \vec{t}$, où $\vec{s} = (0, 18)$, $\vec{u} = (c, 0)$ et $\vec{t} = (0, d)$. On a donc :

  $3\vec{u} + \vec{s} + \vec{t} = \overrightarrow{PZ}$

  $3(c, 0) + (0, 18) + (0, d) = (55 - 92, 74 - 68)$

  $c = \frac{-37}{3}$, $d = -12$, $\vec{u} = \left(\frac{-37}{3}, 0\right)$ et $\vec{t} = (0, -12)$.

  On en déduit que chaque déplacement :

  – vers la gauche doit avoir une longueur d'environ 12,33 m ;
  – vers l'arrière doit avoir une longueur de 12 m.

- **Du module Zvezda au sas de sortie.**

  Le déplacement de l'astronaute lors de cette étape correspond au vecteur ZS.

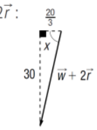
  De plus, la série de manipulations associée à cette étape correspond à la combinaison linéaire $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{t} + 2\vec{r}$, où $\vec{u} = \left(\frac{-37}{3}, 0\right)$, $\vec{v} = (14, 0)$ et $\vec{t} = (0, -12)$. On a donc :

  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{t} + 2\vec{r} = \overrightarrow{ZS}$.

  $\left(\frac{-37}{3}, 0\right) + (14, 0) + (0, -12) + \vec{w} + 2\vec{r} = (50 - 55, 32 - 74)$

  $\vec{w} + 2\vec{r} = \left(\frac{-20}{3}, -30\right)$

Voici la représentation graphique du vecteur associé à $\vec{w} + 2\vec{r}$:



On en déduit que :

– $x \approx 77{,}47°$

– $\|\vec{w} + 2\vec{r}\| = \sqrt{30^2 + \left(\frac{20}{3}\right)^2}$, soit $\approx 30{,}73$ m

On peut ensuite :

– tracer une droite parallèle à $\vec{w}$ passant par l'origine de $\vec{w} + 2\vec{r}$;
– tracer une droite parallèle à $\vec{r}$ passant par l'extrémité de $\vec{w} + 2\vec{r}$.

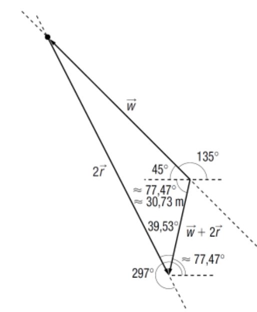
On obtient les vecteurs $\vec{w}$ et $2\vec{r}$.

La loi des sinus permet de déduire que :

$\|\vec{w}\| \approx 63{,}29$ m

$\|\vec{r}\| \approx 41{,}94$ m

On a donc $\vec{w} \approx (-44{,}75, 44{,}75)$ et $\vec{r} \approx (19{,}04, -37{,}37)$.



- **Résumé des déplacements engendrés par chaque manipulation des manettes.**

Manipulation des manettes						
Orientation du déplacement engendré			135°	297°		270°
Longueur du déplacement engendré	≈ 12,33 m	14 m	≈ 63,29 m	≈ 41,94 m	18 m	12 m

- **Validation.**

  En additionnant algébriquement tous les vecteurs associés à l'ensemble des manipulations, on obtient le résultat suivant :

  Déplacement résultant $= 3\vec{v} + 2\vec{s} + \vec{s} + 3\vec{u} + \vec{t} + \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{t} + 2\vec{r}$
  $= 4\vec{v} + 3\vec{s} + 4\vec{u} + 2\vec{t} + \vec{w} + 2\vec{r}$
  $\approx 4(14, 0) + 3(0, 18) + 4(-12{,}33, 0) + 2(0, -12) + (-44{,}75, 44{,}75) + 2(19{,}04, -37{,}37)$
  $\approx (0{,}01, 0{,}01)$

  Puisque la norme de ce vecteur est environ 1,41 cm, l'astronaute arrivera à environ 1,41 cm de la position exacte du sas.

  Ce décalage est acceptable puisque le maximum permis est de 25 cm.

  Voici la représentation graphique de cette situation.