Nom : ______________________________ École Montcalm
Groupe : ____________________________ Math SN5

Bilan 3
(CD-2)

1. **LA COURSE D'ORIENTATION** Afin de planifier ses déplacements entre trois balises, une personne représente leur position dans un plan cartésien gradué en kilomètres. À la suite de cette représentation, elle remarque que :

- les coordonnées de la balise A sont (1, 2) ;
- les composantes du vecteur associé au déplacement de la balise A vers la balise B sont (6, 8) ;
- la norme du vecteur associé au déplacement de la balise B vers la balise C est 12 km et son orientation est de 30°.

a) Quelles sont les coordonnées de la balise C ?

____

b) Déterminez la norme et l'orientation du vecteur associé au déplacement de la balise A vers la balise C.

____

2. **LA RÉSOLUTION** La démarche ci-dessous permet de résoudre l'équation trigonométrique $5 \cos A - 2 = \sin^2 A - \cos^2 A$

① $5 \cos A - 2 = \sin^2 A - \cos^2 A$

② $5 \cos A - 2 = 1 - \cos^2 A - \cos^2 A$

③ $2 \cos^2 A + 5 \cos A - 3 = 0$

④ $2 \cos^2 A + 6 \cos A - \cos A - 3 = 0$

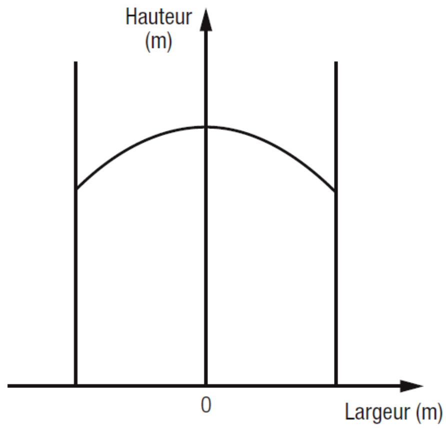
⑤ $(2 \cos A - 1)(\cos A + 3) = 0$

a) Expliquez comment il est possible de passer d'une étape à l'autre de cette démarche.

____
____
____
____
____

b) Complétez la résolution de cette équation.

3. **LE TOIT VOÛTÉ** Dans un magasin à rayons, le plafond d'un corridor a la forme d'une voûte parabolique. Le graphique suivant illustre une coupe transversale du corridor.



Le foyer de la courbe associée au plafond est situé sur le sol, la hauteur maximale du plafond est de 4 mètres et la hauteur des murs est de 3 mètres.

a) Établissez l'équation de la parabole associée au plafond de ce corridor.

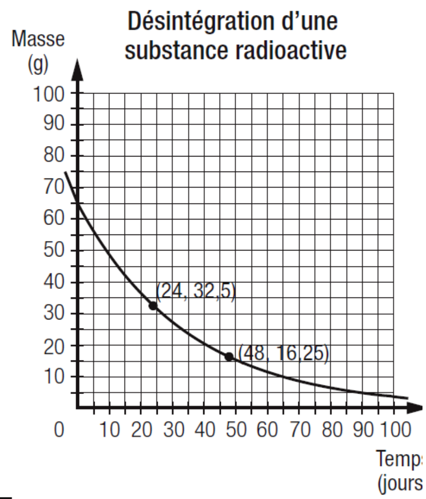
____

b) Déterminez la largeur du corridor.

____

4. **LES BALEINES À BOSSE** Pendant 24 mois, des océanographes compilent des données sur la masse moyenne d'une population de baleines à bosse. Ils ont observé que celle-ci varie selon la fonction $m(t) = 25 \sin \frac{\pi t}{12} + 80$, où t représente le temps écoulé (en mois) depuis le début des observations et $m(t)$ représente la masse moyenne (en tonnes) d'une baleine à bosse. Pendant la période d'observation, déterminez à quels moments la masse moyenne d'une baleine à bosse était exactement de 100 tonnes.

5. **LA RADIOACTIVITÉ** Le graphique ci-contre illustre la diminution exponentielle de la masse d'une substance radioactive selon le temps écoulé (en jour) depuis le début de sa désintégration. L'équation de la courbe illustrée est de la forme y = a(base)^x.



a) Déterminez la règle de la fonction qui permet de calculer le temps écoulé selon la masse restante de cet élément.

____

b) S'il reste 4 g de substance, combien de temps s'est-il écoulé à la seconde près ?

____

c) Combien de temps après le début de la désintégration cette substance aura-t-elle perdu 75 % de sa masse ?

____

7. **LA BONBONNE DE PROPANE** À la suite de l'ouverture d'une bonbonne de propane, la masse y de gaz (en g) présente à l'intérieur diminue selon la règle $y = 10\,000(0{,}99)^{2x}$, où x représente le temps écoulé (en s) depuis l'ouverture.

a) Quelle est la masse de gaz dans la bonbonne avant son ouverture ?

b) Après combien de temps la masse a-t-elle diminué de moitié ?

c) Pendant combien de temps la masse de propane dans la bonbonne est-elle d'au moins 50 g ?

d) La bonbonne est considérée comme vide lorsqu'elle contient 1 g ou moins de propane. Après combien de temps peut-on considérer que la bonbonne est vide ?

8. **LE TAUX DE TAXATION** Le conseil municipal d'une ville instaure un nouveau règlement pour le calcul du taux de taxation. Le taux y (en %) est calculé selon la règle $y = 0{,}1|x - 6| + 0{,}8$, où x correspond au temps écoulé (en années) depuis l'application de ce règlement.

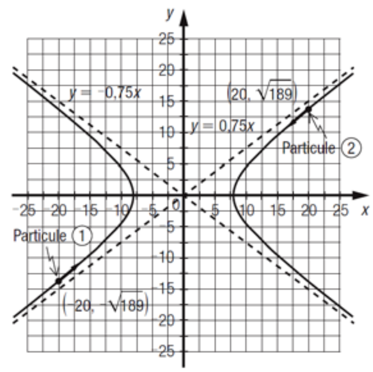
a) Quel est le taux de taxation au moment de mettre ce règlement en application ?

b) À quel moment le taux sera-t-il de 1,3 % ?

c) Pendant combien de temps le taux de taxation est-il à inférieur ou égal à 1,11 % ?

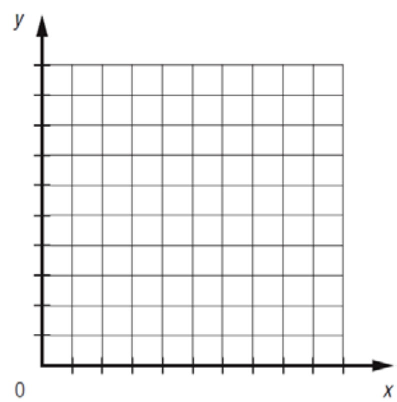
9. **LA RÉPULSION** Lors d'une expérience en physique, on propulse l'une vers l'autre avec la même vitesse deux particules chargées d'électricité statique. On a représenté la position initiale des particules ainsi que leur trajectoire dans le plan cartésien ci-dessous gradué en micromètres.

Trajectoires de deux particules



Sachant que la trajectoire de chaque particule correspond à l'une des branches de la même hyperbole centrée à l'origine, déterminez la distance minimale qui sépare les deux particules.

10. **LES VAGUES** À la suite du passage d'un bateau sur un lac, une série de vagues fait osciller une bouée. La hauteur de la bouée (en cm) par rapport au fond du lac varie selon la règle $h(x) = 45 \sin 4(x - \pi) + 90$, où x correspond au temps écoulé (en s) depuis le passage du bateau.



a) Dans le plan cartésien ci-contre, représentez graphiquement cette situation pour les 3 premières secondes.

b) À quelle hauteur du fond du lac se trouve la bouée juste au moment où passe le bateau ?

c) Au cours des trois premières secondes, à quels moments la bouée atteint-elle sa hauteur maximale ?

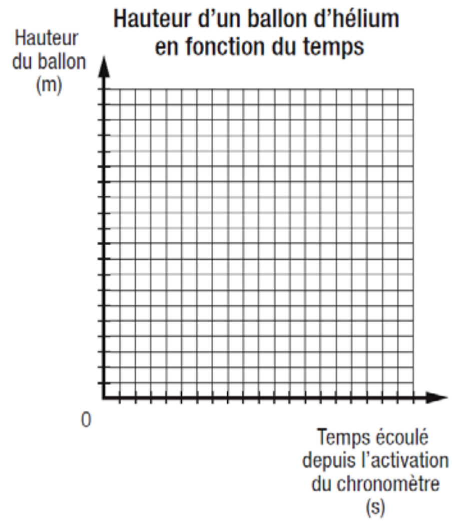
11. **LE BALLON D'HÉLIUM** Une personne retient un ballon d'hélium à 2 m du sol. Cette personne active un chronomètre et lâche le ballon 5 s après. Neuf secondes plus tard, le ballon se trouve à une hauteur de 35 m. À partir du moment où le ballon est lâché, sa hauteur varie en fonction du temps selon une fonction racine carrée.

a) Établissez la règle de la fonction associée à la situation.

____

b) Représentez graphiquement cette situation à partir du moment où le chronomètre est activé.

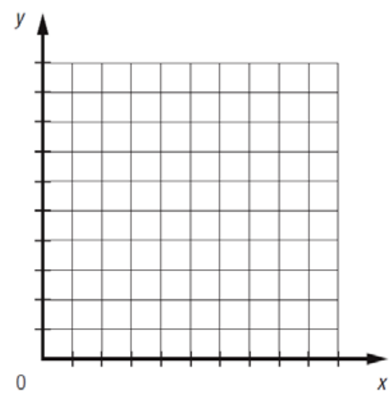
c) Pendant combien de temps le ballon sera-t-il à une hauteur inférieure ou égale à 105 m ?



12. **LA COURSE AUTOMOBILE** Lors d'une course automobile, un audiologiste enregistre l'intensité I du son (en dB) provenant des bolides en fonction du temps t écoulé (en min) depuis le début de la course. Voici le résumé des données recueillies :

Résumé des données

Intensité initiale (dB)	156
Intensité maximale (dB)	156
Intensité minimale (dB)	**52**
Temps écoulé entre deux minimums d'intensité (min)	4
Type de courbe s'ajustant à toutes les données	Sinusoïde



De plus, le seuil de douleur de l'oreille humaine est de 130 dB et la course dure 90 min.

a) Dans le plan cartésien ci-dessus :

1) représentez la fonction $I(t)$ pour les 18 premières minutes de la course ;

2) indiquez l'ensemble des moments où une personne se trouvant au même endroit que l'audiologiste devrait ressentir de la douleur.

b) Calculez la durée totale pendant laquelle une personne se trouvant au même endroit que l'audiologiste devrait ressentir de la douleur.

Corrigé :

1. a) Les coordonnées de la balise B sont (7, 10). Les composantes du vecteur associé au déplacement de la balise B vers la balise C sont $(6\sqrt{3}, 6)$. Donc les coordonnées de la balise C sont $(7 + 6\sqrt{3}, 16)$.

b) Puisque les composantes du vecteur associé au déplacement de la balise A vers la balise C sont $(6 + 6\sqrt{3}, 14)$:

- la norme du vecteur est $\sqrt{(6 + 6\sqrt{3})^2 + 14^2}$, soit environ 21,56 km ;
- l'orientation de ce vecteur est arc tan $\frac{14}{6 + 6\sqrt{3}}$, soit environ de 40,5°.

2. a) Pour passer à l'étape ②, on a substitué $\sin^2 A$ à $1 - \cos_2 A$ puisque $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

Pour passer à l'étape ③, on a soustrait $1 - 2\cos^2 A$ des deux membres de l'équation.

Pour passer à l'étape ④, on a exprimé 5 cos A comme la différence entre 6 cos A et cos A.

Pour passer à l'étape ⑤, on a effectué une mise en évidence double dans laquelle la variable à considérer est cos A.

b) $(2\cos A - 1)(\cos A - 3) = 0$

$2\cos A - 1 = 0$ $\qquad$ $\cos A + 3 = 0$

$2\cos A = 1$ $\qquad$ $\cos A = -3$

$\cos A = \frac{1}{2}$

$A = \frac{\pi}{3} + \frac{4n\pi}{3}$, où $n \in \mathbb{Z}$.

Impossible puisque le cosinus d'un angle trigonométrique ne peut pas être inférieur à -1.

3. a) Puisque les coordonnées du sommet sont (0, 4) et la distance sommet-foyer est de 4 m, l'équation de la courbe associée au plafond est $x^2 = -16(y - 4)$.

b) En substituant 3 à y dans l'équation, on trouve $x = 4$ et $x = -4$. La largeur du corridor est donc de 8 m.

4. Il s'agit de résoudre l'équation $m(t) = 25 \sin \frac{\pi t}{12} + 80 = 100$ pour une période de la fonction, c'est-à-dire pour $0 \leq \frac{\pi t}{12} \leq 2\pi$ ou $0 \leq t \leq 24$.

$$25 \sin \frac{\pi t}{12} + 8 = 100$$

$$\sin \frac{\pi t}{12} = 0,8$$

$$\frac{\pi t}{12} = \text{arc} \sin(0,8)$$

$\frac{\pi t}{12} \approx 0,9273$ $\qquad$ $\frac{\pi t}{12} \approx \pi - 0,9273$

$t \approx 3,54$ mois. $\qquad$ $t \approx 8,46$ mois.

Les moments où la masse moyenne d'une baleine à bosse était exactement de 100 tonnes sont à 3,54 mois et à 8,46 mois suivant le début de l'étude.

5. a) En substituant les coordonnées des points à x et à y dans l'équation, on obtient le système formé des équations $32,5 = a(\text{base})^{24}$ et $16,25 = a(\text{base})^{48}$. En isolant « a » dans les deux équations et en les comparant, on obtient :

$$\frac{32,5}{(\text{base})^{24}} = \frac{16,25}{(\text{base})^{48}}$$

$$\frac{(\text{base})^{48}}{(\text{base})^{24}} = \frac{16,25}{32,25} = \frac{1}{2}$$

$$(\text{base})^{24} = \frac{1}{2}$$

$(\text{base}) = \sqrt[24]{0,5}$ et $a = 65$.

La règle est donc $y = 65\left(\sqrt[24]{0,5}\right)^x$.

La règle de la réciproque est $x = \log_{\sqrt[24]{0,5}} \frac{y}{65}$.

b) Il s'agit de résoudre l'équation $x = \log_{\sqrt[24]{0,5}} \frac{4}{65}$.

On trouve $x \approx$ 96,54 jours soit environ 93 jours, 12 h, 52 min et 48 s.

c) La règle $y = 65\left(\sqrt[24]{0,5}\right)^x$ permet de déduire que la masse initiale de substance radioactive est de 65 g.

Il s'agit donc de résoudre l'équation $65\left(\sqrt[24]{0,5}\right)^x = 0,25(65)$.

On obtient $x = 48$ jours.

7. **a)** La quantité initiale de propane est de 10 000 g ou 10 kg.

b) $10\ 000(0{,}99)^{2x} = 5000 \Rightarrow x = 0{,}5 \log_{0,99}0{,}5 \Rightarrow x \approx 34{,}49$ s

c) $10\ 000(0{,}99)^{2x} \leq 50 \Rightarrow x \geq 0{,}5 \log_{0,99}000{,}5 \Rightarrow x \geq \approx 263{,}59$ s

d) $10\ 000(0{,}99)^{2x} = 1 \Rightarrow x = 0{,}5 \log_{0,99}0{,}00001 \Rightarrow x \approx 458{,}21$ s

8. **a)** Le taux de taxation est de 1,4 %.

b) $0{,}1|x - 6| + 0{,}8 = 1{,}3$

$|x - 6| = 5$

$x = 11$ et $x = 1$.

Le taux sera de 1,3 % 1 an et 11 ans après l'application du règlement.

c) $0{,}1|x - 6| + 0{,}8 \leq 1{,}11$

$|x - 6| \leq 3{,}1$

$x - 6 \geq {}^-3{,}1$ et $x - 6 \leq 3{,}1$.

$2{,}9 \leq x \leq 9{,}1$

Le taux de taxation sera d'au plus 1,11 % pendant 6,2 ans.

9. L'équation de la courbe qui supporte les deux trajectoires est de la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Puisque les pentes des deux asymptotes sont de 0,75 et de $^-0{,}75$, on en déduit que $b = 0{,}75a$ et on a :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(0{,}75a)^2} = 1$$

En substituant les coordonnées $(20, \sqrt{189})$ à x et à y, on obtient :

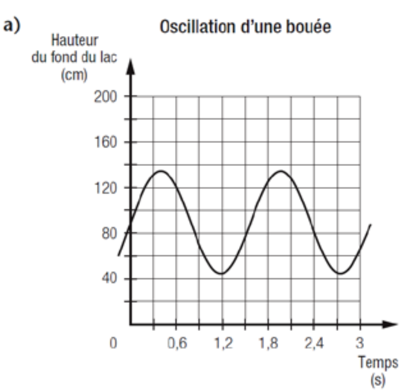
$$\frac{20^2}{a^2} - \frac{\sqrt{189}^2}{(0{,}75a)^2} = 1$$

$$\frac{400}{a^2} - \frac{336}{a^2} = 1$$

$a^2 = 64$ et $a = 8$.

La distance minimale qui sépare les deux particules correspond à la distance entre les deux sommets. Cette distance mesure 2a et vaut 16 micromètres.

10. **a)**



b) La bouée se trouve à une hauteur de 90 cm.

c) La bouée atteint le maximum après un quart de période et après une période et 1,25 période. Puisque la période de la fonction est $0{,}5\pi$, la bouée atteint sa hauteur maximale, soit 135 cm, après environ 0,39 s et après environ 1,96 s.

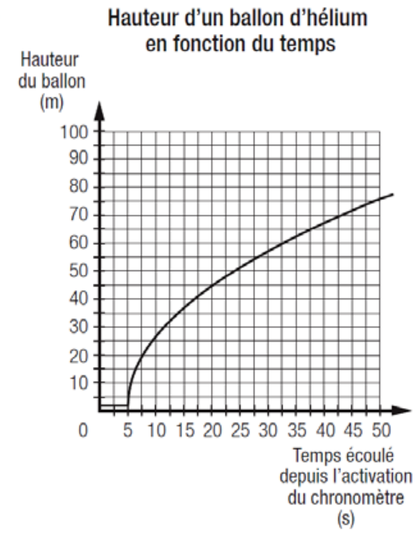
b) La bouée se trouve à une hauteur de 90 cm.

c) La bouée atteint le maximum après un quart de période et après une période et 1,25 période. Puisque la période de la fonction est $0{,}5\pi$, la bouée atteint sa hauteur maximale, soit 135 cm, après environ 0,39 s et après environ 1,96 s.

11. **a)** La règle de la fonction est :

$$y = \begin{cases} 2 & \text{pour } x \in [0, 5[\\ 11\sqrt{x-5} + 2 & \text{pour } x \in [5, \infty+ \end{cases}$$

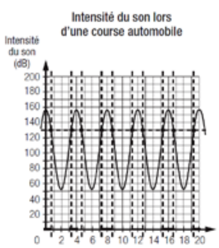
b)



c) Il s'agit de résoudre l'inéquation $11\sqrt{x-5} + 2 \leq 105$. On obtient $5 \leq x \leq \approx 92{,}7$.

Le ballon sera à une hauteur inférieure ou égale à 105 m pendant environ 92,7 s.

12. **a)** 1) et 2)



b) La sinusoïde peut avoir comme équation
$I(t) = 52 \cos\frac{\pi}{2}t + 104$. Il s'agit donc de résoudre l'inéquation $52 \cos\frac{\pi}{2}t + 104 \geq 130$.
$52 \cos\frac{\pi}{2}t + 104 \geq 130 \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2}t \geq 0{,}5$

Pour une période, on a : $0 \leq \frac{\pi}{2}t \leq \frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}t \leq 2\pi$

$$\Rightarrow 0 \leq t \leq \tfrac{2}{3} \text{ et } \tfrac{10}{3} \leq t \leq 4.$$

Durant une période, l'intensité est d'au moins 130 dB pour $\frac{4}{3}$ min. Or, une période dure 4 min et la course dure 90 min. Il y a donc 22,5 périodes et l'intensité est d'au moins 130 dB pour une durée de $22 \times \frac{4}{3} + 0{,}5 \times \frac{4}{3}$ min, puisque la dernière demi-période commence à un pic d'intensité sonore.
La durée totale pendant laquelle une personne se trouvant au même endroit que l'audiologiste devrait ressentir de la douleur est de 30 min.