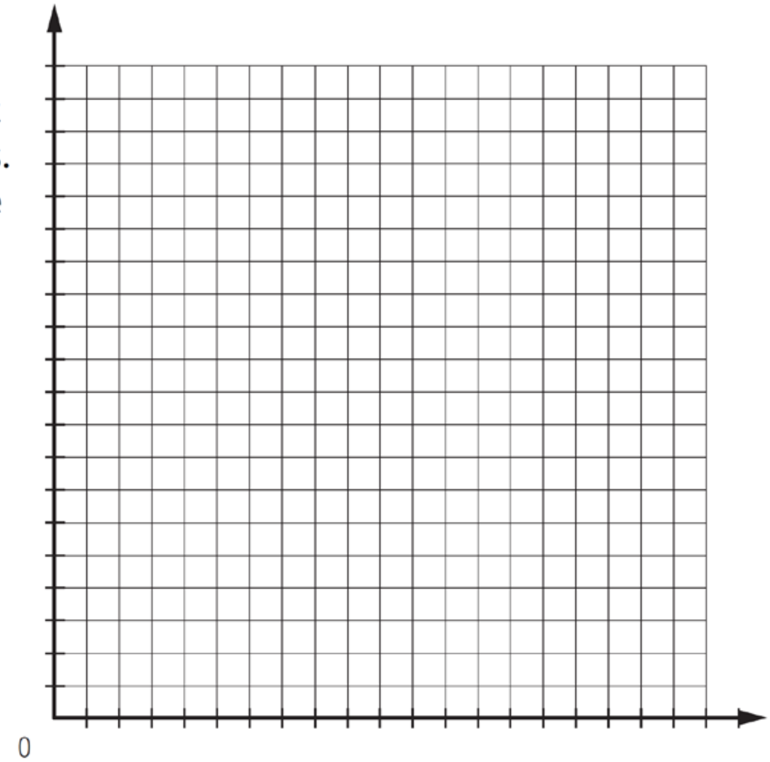
Nom : ___________________________ École Montcalm
Groupe : ________________________ Math SN5

Bilan 2
CD-2

1- **LA SEMENCE** Afin d'obtenir une qualité supérieure de gazon, un jardinier ensemence uniformément un terrain avec deux types de graines. Il établit que chaque centimètre carré de terrain doit recevoir au moins 25 graines et au plus 40 graines de type A, au plus 30 graines de type B, au plus deux fois plus de graines de type A que de graines de type B et au plus 60 graines au total.

Un sac de graines de type A contient 1 million de graines et coûte 20 $, et un sac de graines de type B contient 1,5 million de graines et coûte 28 $.

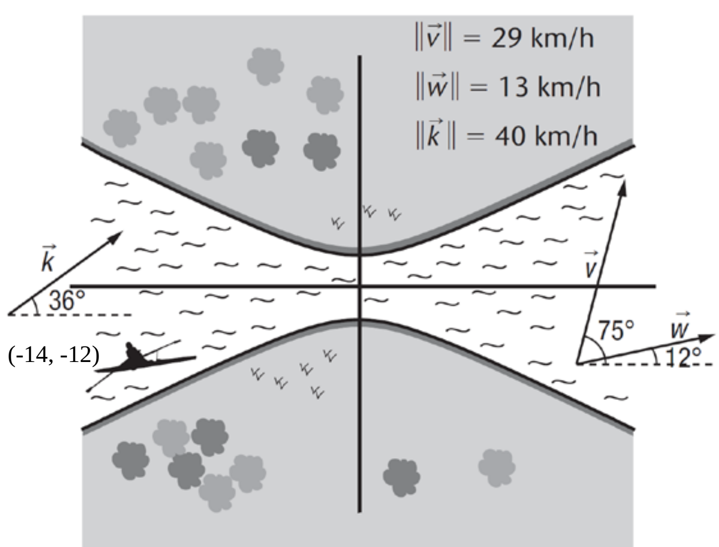


Déterminez le nombre de graines de chaque type à semer dans un centimètre carré de terrain pour que le coût d'ensemencement d'un centimètre carré soit minimal.

2- **LE KAYAK** Un kayakiste s'apprête à traverserun canyon représenté dans un plan cartésien gradué en kilomètres par une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = -1$.

Sur le schéma ci-contre, $\vec{v}$ représente la vitesse du vent, $\vec{w}$, la vitesse du courant et $\vec{k}$, la vitesse du kayakiste.

Sachant que la vitesse résultante du kayakiste correspond à la somme des vecteurs, $\vec{k}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, déterminez si le kayakiste pourra traverser le canyon sans heurter les parois.



3- **LA CONCENTRATION** Dans un mélange contenant initialement 3 mol de solvant et 0,5 mol de soluté, on déverse continuellement du solvant au rythme de 0,15 mol/min et du soluté au rythme de 0,09 mol/min. De plus, 1 mol de solvant occupe un volume de 10 L et 1 mol de soluté, un volume de 6 L.

Sachant que la concentration correspond au rapport $\frac{\text{quantité } Q \text{ de soluté (mol)}}{\text{volume } V \text{ du mélange (en L)}}$,

démontrez que la concentration du mélange augmentera et se rapprochera sans cesse de $\frac{3}{68}$ mol/L, sans jamais l'atteindre.

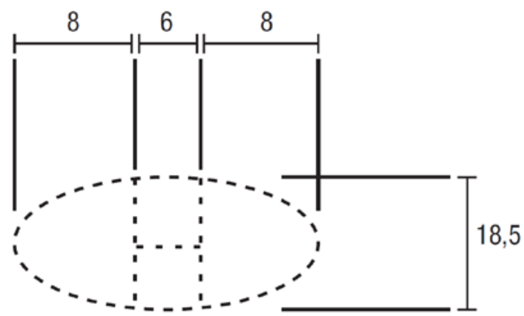
4- **LE LOGO** Une entreprise d'articles promotionnels doit coudre le logo des Canadiens de Montréal sur des chandails. Les figures ci-contre indiquent de quelle façon seront cousus les logos.

Le fil utilisé pour coudre le « C » est rouge et est cousu selon une ellipse et celui pour coudre le « H » est blanc. Les fils cousus forment une figure symétrique selon un axe horizontal et selon un axe vertical.

Quelle est la longueur du fil blanc nécessaire pour coudre un de ces logos ?

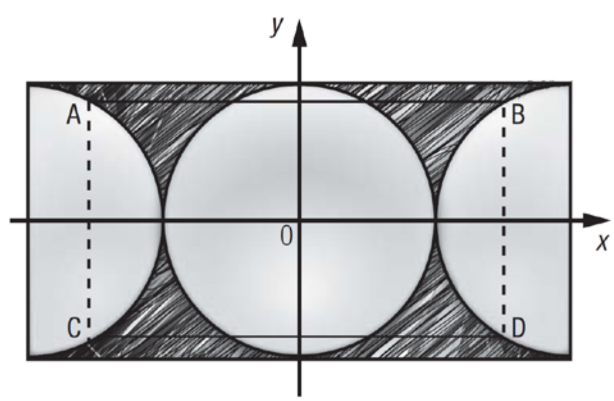
Logo

Fils cousus



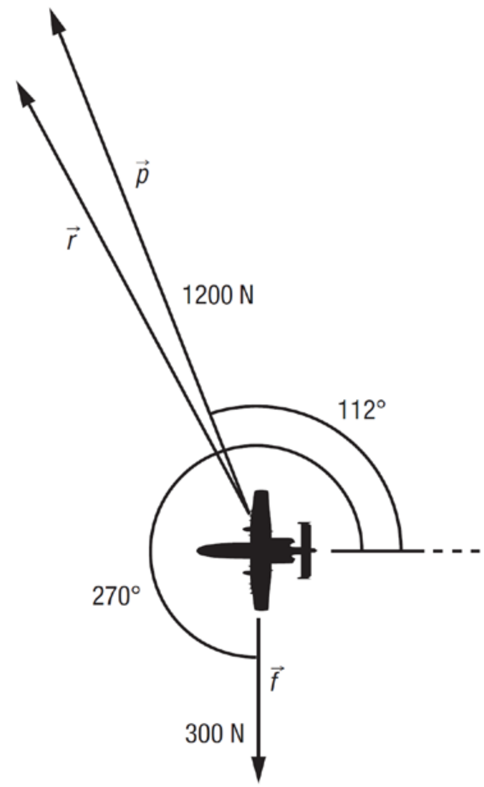
5- **LA BOUCLE DE CEINTURE** Sur la boucle de ceinture rectangulaire illustrée dans le plan cartésien ci-contre, on trouve un cercle centré à l'origine et tangent aux deux branches d'une hyperbole. La base de la boucle mesure 8 cm et sa hauteur, 4 cm. De plus, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ et m $\overline{AB}$ = m $\overline{CD}$ = 6 cm.

Déterminez la mesure de $\overline{BD}$.



6- **L'INFLUENCE DU VENT** Voici des renseignements concernant les forces exercées sur un avion :

- Ses moteurs lui fournissent une poussée $\vec{p}$.
- Le vent lui oppose une force de frottement $\vec{f}$.
- La force résultante (en N) exercée sur l'avion correspond à $\vec{p} + \vec{f}$.
- Le déplacement $\vec{d}$ (en m) de l'avion a la même orientation que $\vec{r}$.
- Le travail W (en J) effectué par l'avion correspond à $\vec{p} \bullet \vec{d}$.



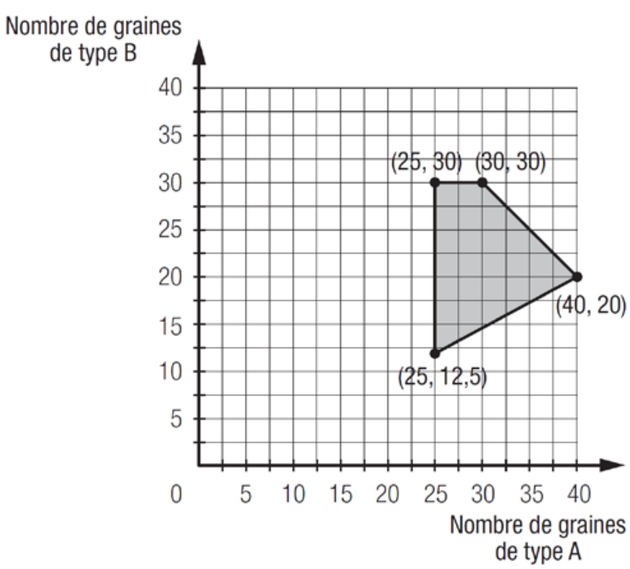
Le schéma ci-contre illustre cette situation.

Le vent change de direction et oppose maintenant une force de 250 N orientée à 300°.

a) Pour un déplacement de 100 m, le travail effectué par l'avion augmentera-t-il ou diminuera-t-il si celui-ci modifie sa poussée de façon à garder la même force résultante $\vec{r}$? Expliquez votre réponse.

Corrige

1- Si x et y représentent respectivement le nombre de graines de type A et le nombre de graines de type B pour chaque centimètre carré de terrain, voici le système d'inéquations et le polygone de contraintes associés à cette situation.



$x \geq 25$
$x \leq 40$
$y \leq 30$
$y \geq 0{,}5x$
$x + y \leq 60$

La règle de la fonction à optimiser est $f(x, y) = \frac{20}{1\,000\,000}x + \frac{28}{1\,500\,000}y$.

Le dernier point à coordonnées entières touché par une droite baladeuse associée à la fonction à optimiser est situé au point (25, 13). Pour minimiser le coût d'ensemencement de 1 cm^2 de terrain, celui-ci doit recevoir 25 graines de type A et 13 graines de type B.

2- $\vec{v} = (29 \cos 75°, 29 \sin 75°)$, soit $(\approx 7{,}51, \approx 28{,}01)$.
$\vec{w} = (13 \cos 12°, 13 \sin 12°)$, soit $(\approx 12{,}72, \approx 2{,}7)$.
$\vec{k} = (40 \cos 36°, 40 \sin 36°)$, soit $(\approx 32{,}36, \approx 23{,}51)$.

Vitesse résultante : $(\approx 52{,}59, \approx 54{,}22)$

Ce vecteur est supporté par une droite dont la pente est environ de 1,03 et qui passe par le point $(^-14, ^-12)$.

L'équation de cette droite est $y \approx 1{,}03x + 2{,}42$.

En calculant les coordonnées des possibles points d'intersection de cette droite et de l'hyperbole, on remarque que l'équation formée n'a pas de solution, donc qu'il n'y a aucun point d'intersection.

Le kayakiste pourra traverser le canyon sans heurter les parois.

3- La quantité Q de soluté (en mol) augmente en fonction du temps x (en s) selon la règle $Q = 0{,}5 + 0{,}09x$.
Le volume V de mélange (en L) augmente en fonction du temps x (en s) selon la règle :
$V = 3 \times 10 + 0{,}5 \times 6 + 0{,}15 \times 10 \times x + 0{,}09 \times 6 \times x = 33 + 2{,}04x$
La concentration C varie en fonction du temps selon la règle $C = \frac{0{,}5 + 0{,}09x}{33 + 2{,}04x}$ ou $C = \frac{50 + 9x}{3300 + 204x}$.
En effectuant la division, on obtient :

$$C = \frac{-\frac{1625}{3468}}{x + \frac{275}{12}} + \frac{9}{204}$$

Cette règle est celle d'une fonction rationnelle dont l'équation de l'asymptote horizontale est $C = \frac{9}{204}$ ou $\frac{3}{68}$. Selon la définition d'une asymptote, on en déduit que la concentration augmentera et se rapprochera de $\frac{3}{68}$ mol/L, mais sans jamais l'atteindre.

4- Si on représente le logo par une ellipse centrée à l'origine :

- son équation est $\frac{x^2}{11^2} + \frac{y^2}{9{,}25^2} = 1$;
- les équations des droites verticales qui supportent les coutures blanches sont $x = ^-3$ et $x = 3$;
- les coordonnées des points d'intersection de ces droites et de l'ellipse sont $(^-3, \approx 8{,}9)$, $(3, \approx ^-8{,}9)$, $(^-3, \approx 8{,}9)$ et $(^-3, \approx ^-8{,}9)$;
- la longueur de fil blanc nécessaire est donc environ de 6 cm + 4(8,9 cm), soit environ de 41,6 cm.

5- Puisque le rayon du cercle est de 2 cm et qu'il est tangent à l'hyperbole, on en déduit que a = 2.
De plus, la courbe passe par le point situé à (4, 2) et on a :

$$\frac{4^2}{2^2} - \frac{2^2}{b^2} = 1$$
$$b^2 = \frac{4}{3}$$

L'équation de l'hyperbole est $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1$.

En substituant 3 à x dans l'équation, on obtient : $\frac{3^2}{4} - \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{15}}{3}$

Par symétrie, on en déduit que m $\overline{BD} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$, soit environ de 2,6 cm.

6-

a)

- Travail initial effectué par l'avion pour un déplacement de 100 m
  $\vec{p} = (1200 \cos 112°, 1200 \sin 112°)$, soit $(\approx -449{,}53, \approx 1112{,}62)$.
  $\vec{f} = (300 \cos 270°, 300 \sin 270°)$, soit $(0, -300)$.
  $\vec{r} = (\approx -449{,}53, \approx 812{,}62)$
- Orientation de $\vec{r} = 180° - \arctan \frac{812{,}62}{449{,}53}$: environ 118,98°.
  $\vec{d} = (\approx 100 \cos 118{,}98°, \approx 100 \sin 118{,}98°)$, soit $(\approx -48{,}45, \approx 87{,}48)$.
  $W = \vec{p} \cdot \vec{d}$
  $W \approx (-449{,}53, 1112{,}62) \cdot (-48{,}45, 87{,}48)$
  $W \approx 119\,111{,}73$ J
- Calcul de la poussée $\vec{p}$ permettant de conserver la même force résultante
  $\vec{f} = (250 \cos 300°, 250 \sin 300)$, soit $(125, \approx -216{,}51)$.
  $\vec{r} = (\approx -449{,}53, \approx 811{,}62)$
  $\vec{p} = \vec{r} - \vec{f}$
  $\vec{p} = (\approx -574{,}3, \approx 1028{,}13)$
- Travail effectué par l'avion
  $W = \vec{p} \cdot \vec{d}$
  $W \approx (-574{,}3, 1028{,}13) \cdot (-48{,}45, 87{,}48)$
  $W \approx 117\,776{,}79$ J
  Le travail effectué par l'avion diminuera